

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΕΤΗΡΙΔΑ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΟΣ 15

**ΝΙΚΟΛΑΟΥ Π. ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗ**  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ  
ΥΠΟΤΡΟΦΟΥ ΤΟΥ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ  
ΚΡΑΤΙΚΩΝ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ

**ΕΝΝΟΙΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ,  
ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΑ, ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**

**ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ**

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1993





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΕΤΗΡΙΔΑ ΤΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΟΣ 15

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Π. ΚΑΡΑΜΠΕΤΑΚΗ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ  
ΥΠΟΤΡΟΦΟΥ ΤΟΥ ΙΔΡΥΜΑΤΟΣ  
ΚΡΑΤΙΚΩΝ ΥΠΟΤΡΟΦΙΩΝ

ΕΝΝΟΙΕΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ,  
ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΜΕΤΑΒΛΗΤΑ, ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

*που εκπονήθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών, στον Τομέα Επιστήμης Υπολογιστών  
και Αριθμητικής Ανάλυσης με την εποπτεία της τριμελούς συμβουλευτικής  
επιτροπής που ορίστηκε από την 30-10-1989 απόφαση του Τμήματος και  
της οποίας μέλη είναι :*

- |              |   |
|--------------|---|
| 1) Καθηγητής | κ. Α.Ι.Γ. Βαρδουλάκης (Επιβλέπων Καθηγητής) |
| 2) Καθηγητής | κ. Κ. Λάζος                                 |
| 3) Καθηγητής | κ. Β. Γ. Μέρτζιος                           |

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 1993

*"Η έγκριση της παρούσης διδακτορικής διατριβής υπό του Τμήματος Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης δεν υποδηλοί αποδοχήν των γωμών του συγγραφέως". (Ν.5343/1932, αρθρ. 202, παράγρ. 2)*



Η επταμελής εξεταστική επιτροπή, που ορίστηκε για την κρίση της διδακτορικής διατριβής του κ. Νικολάου Π. Καραμπετάκη, Μαθηματικού, υπότροφου του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών, συνήλθε σε συνεδρίαση στο Τμήμα Μαθηματικό του Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης την Τετάρτη 9 Ιουνίου 1993, όπου παρακολούθησε την υποστήριξη της διατριβής με τίτλο "Έννοιες Ισοδυναμίας για Γραμμικά, Χρονικά Αμετάβλητα, Πολυμεταβλητά Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου".

Η επιτροπή έκρινε ομόφωνα (με ψήφους 6 υπέρ και 0 κατά) ότι η διατριβή είναι πρωτότυπη και αποτελεί ουσιαστική συμβολή στην επιστήμη αυτό τεκμηριώνεται και από το γεγονός ότι από την παρούσα διατριβή προέκυψε ένα πλήθος δημοσιεύσεων σε διεθνή περιοδικά και συνέδρια που παραθέτουμε στην συνέχεια.

Η επιτροπή αποφάσισε να απονεμηθεί ο βαθμός "ΑΡΙΣΤΑ".

#### ΤΑ ΜΕΛΗ ΤΗΣ ΕΠΤΑΜΕΛΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ

- |    |           |   |
|----|-----------|---|
| 1) | Καθηγητής | κ. Α.Ι.Γ. Βαρδουλάκης (Επιβλέπων Καθηγητής) |
| 2) | Καθηγητής | κ. Π.—Χ. Βασιλείου                          |
| 3) | Καθηγητής | κ. Κ. Λάζος                                 |
| 4) | Καθηγητής | κ. Β. Γ. Μέρτζιος                           |
| 5) | Καθηγητής | κ. Μ. Χριστοδούλου (Απών)                   |
| 6) | Καθηγητής | κ. Τ. Κουσιουρής                            |
| 7) | Καθηγητής | κ. Μ. Στρίντζης                             |



## ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

Γεννήθηκα στις 28/12/1967 στην Δράμα και αποφοίτησα από το 2<sup>ο</sup> Λύκειο Δράμας το 1985 με βαθμό "Αριστα". Το ίδιο έτος γράφτηκα, μετά από Πανελλαδικές εξετάσεις, στο Μαθηματικό Τμήμα του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης με σειρά επιτυχίας 8<sup>η</sup>, από όπου αποφοίτησα τον Ιούλιο του 1989 με βαθμό "Αριστα". Κατά την διάρκεια των σπουδών μου στο Μαθηματικό Τμήμα έτυχα τριών υποτροφιών του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών για διάκριση σε σπουδές και ήθος.

Τον Οκτώβριο του 1989 έγινα δεκτός για εκπόνηση διδακτορικής διατριβής στο Τμήμα Μαθηματικό υπό την επίβλεψη του καθηγητή κ. Α.Ι.Βαρδουλάκη ενώ στην συνεδρίαση της Γ.Σ. του Τμήματος 112/30—4—90 καθορίστηκε το θέμα της διατριβής μου. Επειτα από γραπτές εξετάσεις σε πανελλήνιο διαγωνισμό, σε επιστήμη και γλώσσα Αγγλική, τον Μάιο του 1990 ανακηρύχθηκα υπότροφος του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών για το διάστημα 1/11/90 — 1/11/93. Κατά την διάρκεια της εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής έτυχα επιπλέον υποτροφιών από το British Council (26/1/91—30/3/91) και από την ερευνητική επιτροπή του Loughborough University (28/4/92—18/7/92) για την διαμονή μου και έρευνα στο Loughborough University υπό την επίβλεψη των Prof. A.C.Pugh και Prof. G.E.Hayton.

Εχω διδάξει τα φροντιστηριακά μαθήματα "Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων Ι" και "Μαθηματική Θεωρία Συστημάτων ΙΙ" κατά τα ακαδημαϊκά έτη 1991/92 και 1992/93 και συνέγραψα με την βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Α.Ι.Βαρδουλάκη διδακτικές σημειώσεις για τα παραπάνω μαθήματα οι οποίες και διανέμονται στους φοιτητές το ακαδημαϊκό έτος 1992/93. Εχω παρακολουθήσει μαθήματα "Εκσυγχρονισμού Συστημάτων Διοίκησης των Επιχειρήσεων" που διενεργήθηκαν από το Οικονομικό Κέντρο Αθηνών τον Ιούνιο—Ιούλιο 1992 στις Σπέτσες. Είμαι μέλος στο SIAM Society, IEEE Control System Society, IEEE Education Society, IEEE Circuit & Systems Society, IEEE System Mans & Kybernetics Society, Graduate member of IMA Society, και στην Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.



Δ Η Μ Ο Σ Ι Ε Υ Σ Ε Ι Σ

- [1] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1991, Polynomial matrices and equivalent singular pencils., presented in *Workshop on Singular Systems* organized by N.Karcanias, City University, December 1991.
- [2] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1992, Equivalence transformations of rational matrices., *Proceedings of the Second IFAC Workshop on System Structure and Control*, Prague, 3–5 September 1992, 40–43, to appear in *Kybernetika* in August 1993..
- [3] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1992, Equivalence transformations of rational matrices and applications., to appear in *Int.J.Control*.
- [4] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1992, Matrix fractions and full system equivalence, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **9**, 147–160.
- [5] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, On the solution space of singular state–space AR representations., *Proceedings of International Symposium on Implicit and Nonlinear Systems*, pp.191–196, 14–15 December 1992, Fort Worth, Texas (submitted to *System & Control Letters*).
- [6] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1993, An extension of the Wolovich definition of equivalence., submitted to *32nd IEEE Conference on Decision and Control*, December 15–17, San Antonio, and to *IEEE Trans. Auto. Control*.
- [7] Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1993, Structural properties of square linear inverse systems., accepted to *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory and Applications*, June 21–23, 1993, Chania, Crete, Greece.
- [8] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, Generalized state space system matrix equivalents of a Rosenbrock system matrix., submitted to *IMA Journal of Mathematical Control and its Information* (accepted in European Control Conference in Grenoble ,July 1991).
- [9] Karampetakis N.P., B.G.Mertzios and A.I.Vardulakis, 1992, Computation of the



- transfer function matrix and its Laurent expansion of generalized two-dimensional systems., to appear in the *Int.J.Control*.
- [10] Karampetakis N.P., B.G.Mertzios and A.I.Vardulakis, 1993, Generalized models of 2-D linear discrete systems and computation of its transfer function., *Proceedings of the Second European Control Conference*, Gronongen, Netherlands.
- [11] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, Structural invariants of polynomial matrices and solutions of autoregressive representations., to be submitted to *Siam Journal of Control*.
- [12] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the solution space of discrete time AR representations., accepted to *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory and Applications*, June 21-23, 1993, Chania, Crete, Greece.
- [13] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the solution space of continuous time AR representations., *Proceedings of the Second European Control Conference*, June 28-July 1, 1993, Groningen, The Netherlands.
- [14] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, Interpretation of a certain McMillan degree condition appearing in control., *Proceedings of Sixth IMA Conference on Control : Modeling, Computation, Information*. U.M.I.S.T., 2-4 September 1992 (submitted to *IMA Journal of Control and its Information*).
- [15] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, On a fundamental notion of equivalence in Linear System Theory., *Second IFAC Workshop on "Systems Structure and Control"*, PERGAMON PRESS, pp.356-359.
- [16] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, Notions of Equivalence for General Linear Systems., submitted to *Int.J.Control*.
- [17] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, A fundamental notion of equivalence for Linear Multivariable Systems., *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, (to appear in *IEEE Trans. Auto. Control*).

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στα παρακάτω άτομα :

Στον Επιβλέποντα Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών κ.Αυτώνη Ιωάννη Γ. Βαρδουλάκη για την συνεχή καθοδήγηση και ενθάρρυνση. Ήταν το άτομο που δεν με άφησε ποτέ ελλιπή από προβληματισμούς πάνω στην επιστήμη του, ούτε από την βιβλιογραφία που τόσο πολύ χρειαζόμουν. Αμερόληπτος κριτής στην κάθε δουλειά μου αλλά και εμπυχωτής στην κάθε δυσκολία που αντιμετώπιζα, ακόμα και το διάστημα που ήμουν στην Αγγλία. Σημαντική βοήθεια στην συγγραφή του διδακτορικού μου στάθηκε το βιβλίο του με τίτλο "Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods". Είναι πολύ σημαντικό να ξεκινάς την καριέρα σου δίπλα σε έναν μεγάλο επιστήμονα και άνθρωπο. Τον ευχαριστώ πολύ.

Στον κ. Βασίλη Γ. Μέρτζιο, Καθηγητή του Δημοκρίτειου Πολυτεχνείου Θράκης με τον οποίο συνεργάστηκα πολύ στενά παράλληλα με το διδακτορικό μου πάνω σε υπολογιστικά θέματα στην Θεωρία Ελέγχου.

Στον κ. A.C.Pugh , Reader in Linear System Theory, στο Department of Mathematical Sciences, Loughborough University of Technology για την μεγάλη του συνεργασία πάνω σε κύρια θέματα του διδακτορικού μου καθώς και για την πολύ καλή φιλοξενία και συμπαράσταση που μου προσέφερε όταν ήμουν στην Αγγλία.

Στον κ. Κων/νο Λάζο, Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών, για τις πολύτιμες συμβουλές και συμπαράσταση του καθ'όλη την διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διατριβής.

Στην Prof. Gaynor E. Taylor, στο Department of Electronic Engineering, University of Hull για τις συμβουλές και τους προβληματισμούς που μου προσέφερε πάνω

σε θέματα του διδακτορικού μου καθώς και στους Prof. A.J.J. Van Der Weiden για την γενναιόδωρη προσφορά του διδακτορικού του ως βοήθημα στην διδακτορική μου διατριβή και Prof. Tan Shaohua για την προσφορά ορισμένων εργασιών του χρήσιμων στην εκπόνηση της διατριβής.

Στο Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών Ελλάδος για την οικονομική υποστήριξη καθ'όλη την διάρκεια της διδακτορικής μου διατριβής.

Στο British Council Θεσσαλονίκης και το Loughborough University of Technology για την οικονομική τους υποστήριξη κατά την διάρκεια ερευνητικών μου ταξιδιών στην Αγγλία.

Είνα επίσης μεγάλο ευχαριστώ σε όλους εκείνους τους φίλους, τους οποίους θα ήταν δύσκολο να απαριθμήσω, οι οποίοι με γέμισαν με χαρά, δύναμη, έμπνευση και ζωντάνια όλα αυτά τα χρόνια της διατριβής.

Θα ήθελα τέλος να ευχαριστήσω καθώς και να αφιερώσω το διδακτορικό μου στους γονείς μου Θεοδώρα και Παναγιώτη Καραμπετάκη καθώς και την αδελφή μου Κάρια για την ηθική καθώς και οικονομική τους συμπαράσταση όλα αυτά τα χρόνια της έρευνας.

*Αφιερωμένο*

*Στους γονείς μου Θεοδώρα και Παναγιώτη  
καθώς και στην αδελφή μου Κάτια.*



*Λάβε υπόψη, Ω Νεόφυτε, αυτή την Αλήθεια :*

*Δεν υπάρχει τίποτα κρυμμένο που να μην μπορεί ν'ανακαλυφθεί*

*Αν η καρδιά επιθυμεί και η θέληση επιμένει*

*Και αν ο ερευνητής είναι ακούραστος και θαρραλέος.*

*Πυθαγόρας*



## Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

<b>1.</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	
1.1	Γενικές πολυωνυμικές περιγραφές γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.	σελ. 2
1.2	Το πρόβλημα της ισοδυναμίας συστημάτων κατά το διάστημα 1970–90.	σελ. 4
1.3	Σύντομη περιγραφή των κεφαλαίων της διατριβής.	σελ. 7
1.4	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.</b>	σελ. 9
<b>2.</b>	<b>ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ</b>	
2.1	Εισαγωγή.	σελ.14
2.2	Απεικονίσεις.	σελ.14
2.2.1	Εικόνα μιας απεικόνισης.	σελ.15
2.2.2	Πυρήνας μιας απεικόνισης.	σελ.15
2.2.3	Ομομορφισμοί γραμμικών απεικονίσεων.	σελ.16
2.2.3.1	Μοινομορφισμοί.	σελ.16
2.2.3.2	Επιμορφισμοί.	σελ.17
2.2.3.3	Ισομορφισμοί.	σελ.17
2.2.4	Σχέσεις Ισοδυναμίας.	σελ.19
2.2.5	Ενα αναλλοίωτο στοιχείο στο $\mathbf{R}$ .	σελ.20
2.2.5.1	Ενα πλήρες αναλλοίωτο στοιχείο στο $\mathbf{R}$ .	σελ.20
2.2.5.2	Κανονικές απεικονίσεις και κανονικές μορφές.	σελ.20
2.3	Πολυωνυμικοί πίνακες.	σελ.21
2.3.1	Στοιχειώδεις πράξεις σε πολυωνυμικούς πίνακες στο $\mathbb{C}$ .	σελ.23
2.3.2	Αλγεβρική δομή ενός πολυωνυμικού πίνακα στο $\mathbb{C}$ .	σελ.23
2.3.3	Διαιρέτες και μέγιστοι κοινοί διαιρέτες πολυωνυμικών πινάκων.	σελ.26
2.4	Ρητοί πίνακες.	σελ.28
2.4.1	Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}$ .	σελ.28
2.4.2	Περιγραφή ρητών πινάκων ως κλάσμα πολυωνυμικών πινάκων.	σελ.31



2.4.3	Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων στο $s=\infty$ .	σελ.32
2.4.4	Ιδιότητες των μηδενικών και των πόλων στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ρητών πινάκων.	σελ.37
2.5	Ελάχιστος βαθμός ενός ρητού πίνακα.	σελ.42
2.6	Ο McMillan βαθμός ενός ρητού πίνακα.	σελ.43
2.7	Αλγεβρική δομή ιδιόμορφων πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων (singular pencils).	σελ.44
2.8	Περίληψη.	σελ.49
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		σελ.50

### 3. ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.1	Εισαγωγή.	σελ.53
3.2	Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}$ .	σελ.54
3.3	Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο $s=\infty$ .	σελ.66
3.4	Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ .	σελ.68
3.5	Περίληψη.	σελ.85
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		σελ.86

### 4. ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΧΗ $\Omega \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1	Εισαγωγή.	σελ.90
4.2	Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων σε μια περιοχή $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ .	σελ.91
4.3	Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων σε μια περιοχή $\Omega \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ .	σελ.99
4.4	Μηδενική δομή στο $\Omega \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ κάτω από ανάδραση εξόδου.	σελ.111
4.5	Συνθήκες απουσίας μηδενικών στο $s=\infty$ ρητών πινάκων.	σελ.118
4.6	Περίληψη.	σελ.125
BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		σελ.126

## 5. ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ $C\{w\}$ -ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

- 5.1 Εισαγωγή. σελ.129
- 5.2 Ελάχιστες πραγματώσεις ρητών πινάκων. σελ.130
- 5.3 Ρητοί πίνακες και  $C\{w\}$ -ισοδύναμοι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες. σελ.143
- 5.3.1 Ισοδύναμη πραγμάτωση Verghese (1978). σελ.144
- 5.3.2 Ισοδύναμη πραγμάτωση Bosgra & Van Der Weiden (1981). σελ.152
- 5.3.3 Ισοδύναμη πραγμάτωση Zhang (1989). σελ.166
- 5.3.4 Ισοδύναμη πραγμάτωση Tan & Vandewall (1988). σελ.175
- 5.3.5 Συγκρίσεις ισοδύναμων πραγματώσεων. σελ.182
- 5.4 Η Kronecker κανονική μορφή ρητών πινάκων. σελ.185
- 5.5 Περίληψη. σελ.190
- BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ σελ.191

## 6. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΙ ΛΥΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- 6.1 Εισαγωγή. σελ.195
- 6.2 Πεπερασμένες λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  πολυωνυμικών πινάκων. σελ.197
- 6.3 Κρουστικές λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην μηδενική δομή στο  $s=w$  πολυωνυμικών πινάκων. σελ.213
- 6.4 Κρουστικές λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην δεξιά μηδενική δομή πολυωνυμικών πινάκων. σελ.223
- 6.5 Ο ρόλος της αριστερής μηδενικής δομής πολυωνυμικών πινάκων στην ύπαρξη λύσεων μιας ιδιόμορφης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με συντελεστές πίνακες. σελ.234

6.6	Ο παραμετρικός χώρος λύσεων μιας ιδίομορφης ομογενούς εξίσωσης με συντελεστές πίνακες.	σελ.246
6.7	Περίληψη.	σελ.266
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	σελ.267
<b>7.</b>	<b>ΜΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΝΝΟΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΓΙΑ ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</b>	
7.1	Εισαγωγή.	σελ.271
7.2	Απεικονίσεις χώρων λύσεων ομογενών Γραμμικών Συστημάτων.	σελ.272
7.3	Μια θεμελιώδης ισοδυναμία.	σελ.294
7.4	Μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich.	σελ.304
7.5	Περίληψη.	σελ.310
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	σελ.311
<b>8.</b>	<b>ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ</b>	
8.1	Εισαγωγή.	σελ.315
8.2	Περιγραφή Γραμμικών Πολυμεταβλητών Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.	σελ.316
8.3	Αλγεβρική δομή Πολυωνυμικών Συστημάτων στο $\mathbb{C}$ .	σελ.325
8.4	Αλγεβρική δομή Πολυωνυμικών Συστημάτων στο $s=\infty$ .	σελ.339
8.5	Τετράγωνα αντίστροφα συστήματα.	σελ.362
8.6	Περίληψη.	σελ.369
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	σελ.370
<b>9.</b>	<b>ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ</b>	
9.1	Εισαγωγή.	σελ.375
9.2	Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί Π.Π.Σ. στο $\mathbb{C}$ .	σελ.377
9.3	Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί Π.Π.Σ. στο $\mathbb{C}U\{\infty\}$ .	σελ.388

9.3.1	Εξέλιξη ισοδύναμων μετασχηματισμών συστημάτων στο $\mathbb{C}U\{\infty\}$ .	σελ.388
9.3.2	Αναγωγή μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.	σελ.397
9.3.2α	Ισοδύναμο μοντέλο Verghese (1978).	σελ.399
9.3.2β	Ισοδύναμο μοντέλο Bosgra & Van Der Weiden (1981).	σελ.406
9.3.2γ	Ισοδύναμο μοντέλο Zhang (1989).	σελ.427
9.3.2δ	Ισοδύναμο μοντέλο Tan & Vandewall (1988).	σελ.434
9.3.2ε	Ισοδύναμο μοντέλο Vardoulakis (1991).	σελ.440
9.3.2στ	Σύγκριση πλήρως ισοδύναμων συστημάτων.	σελ.447
9.3.3	Αριστερές και δεξιές κλασματικές Π.Π.Σ. και πλήρης ισοδυναμία συστημάτων.	σελ.451
9.3.4	Τετράγωνα αντίστροφα συστήματα και πλήρης ισοδυναμία συστημάτων.	σελ.478
9.4	Περίληψη.	σελ.485
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	σελ.487
<b>10.</b>	<b>ΜΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΝΝΟΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</b>	
10.1	Εισαγωγή.	σελ.493
10.2	Βασικές θεμελιώδεις ισοδυναμίες.	σελ.495
10.3	Μια θεμελιώδης ισοδυναμία για γενικές Π.Π.Σ..	σελ.501
10.4	Γενίκευση της ισοδυναμίας Π.Π.Σ. του Wolovich.	σελ.522
10.5	Περίληψη.	σελ.536
	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	σελ.537

<b>11. Η ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ Π.Π.Σ. ΣΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΙΕΡΑΡΧΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ</b>	
11.1 Εισαγωγή.	σελ.541
11.2 Ιεραρχική θεωρία συστημάτων και πλήρης ισοδυναμία Π.Π.Σ..	σελ.542
11.3 Περίληψη.	σελ.553
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	σελ.554
<b>12. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΑΙΡΕΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ</b>	σελ.555
<b>SUMMARY</b>	σελ.558
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	σελ.561
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	σελ.564
<b>ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ</b>	σελ.579
<b>ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ</b>	σελ.586
<b>ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ</b>	σελ.595

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- 1.1 Γενικές πολυωνυμικές περιγραφές γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.
- 1.2 Το πρόβλημα της ισοδυναμίας συστημάτων κατά το διάστημα 1970–90.
- 1.3 Σύνοψη περιγραφή των κεφαλαίων της διατριβής.
- 1.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

### 1.1 Γενικές πολυωνυμικές περιγραφές γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

Στην διατριβή αυτή θα ασχοληθούμε με την μελέτη, ισοδύναμων μετασχηματισμών γενικών γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου (polynomial matrix descriptions), καθώς και με την δομή των συστημάτων αυτών. Με άλλα λόγια με την κλάση των φυσικών συστημάτων των οποίων η δυναμική συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με συντελεστές πίνακες που έχουν την μορφή

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (1.1\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (1.1\beta)$$

όπου  $\rho := d/dt$  είναι ο διαφορικός τελεστής,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$  με  $\det |A(\rho)| \neq 0$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$ , και  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  είναι πίνακες με στοιχεία πολυώνυμα,  $u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  είναι το διάνυσμα εισόδου,  $\beta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$ , είναι το διάνυσμα ψευδοκατάστασης και  $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  είναι το διάνυσμα εξόδου.

Ορισμένες ειδικές μορφές των γενικών πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων (Π.Π.Σ.) της μορφής (1.1) είναι οι εξής :

**α)** Οι Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων (state-space systems) που περιγράφονται με τον ακόλουθο τρόπο :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.2\beta)$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  και οι οποίες αποτέλεσαν το επίκεντρο της έρευνας έως και το 1974 κυρίως με τους Rosenbrock (1970) και Wolovich (1974).

β) Οι Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (*generalized state-space systems*) που περιγράφονται με την εξής μορφή :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3\beta)$$

όπου  $E \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} E \leq r$  και  $\det |sE - A| \neq 0$ ,  $B \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  και οι οποίες αποτελούν το επίκεντρο του ενδιαφέροντος της επιστημονικής κοινότητας τα τελευταία χρόνια λόγω της ενδιαφέρουσας ιδιότητας τους να εμπεριέχουν και κρουστική συμπεριφορά (infinite frequency behaviour), σε αντίθεση με τις Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων που παρουσιάζουν μόνο πεπερασμένη συμπεριφορά (finite frequency behaviour).

Οι παραπάνω γενικές Π.Π.Σ. συναντώνται σε περιγραφή συστημάτων μεγάλης κλίμακας (large scale systems) ; παραδείγματα έχουμε στα συστήματα ενέργειας (power systems) [Stott 1979, Manke et al. 1978] και στα διασυνδεδεμένα συστήματα (interconnected systems) [Rosenbrock & Pugh 1974]. Νεώτερες εφαρμογές έχουμε στην ρομποτική και στα συστήματα ουδέτερης καθυστέρησης (robotics and neutral delay systems) [Spong 1986], στην αεροδυναμική για ισοροπία σταθερής κατάστασης αεροσκαφών (aircraft dynamics with imposed algebraic relations for steady-state trim) [Stevens 1984], στην ανάλυση νευρολογικών καταστάσεων (neurological events) [Zeeman 1976, DeClaris & Rindos 1984] και στην θεωρία καταστροφών (catastrophic behaviour) [Sastry & Desoer 1981].

Πολλές φορές όμως δεν είναι δυνατό να γίνει ο διαχωρισμός μεταξύ εισόδων και εξόδων ενός συστήματος πρδ. σε ένα κλειστό σύστημα το οποίο αποτελείται από την διασύνδεση ενός ανοικτού συστήματος (plant), με έναν ελεγκτή (controller), η έξοδος του ανοικτού συστήματος είναι η είσοδος του ελεγκτή και συνεπώς η κατάσταση των μεταβλητών του συστήματος δεν είναι συγκεκριμένη (εκτός εάν θεωρήσουμε ορισμένες



συνθήκες που θα καθιστούν ποιές είναι οι έξοδοι του συστήματος (Schumacher 1991)). Στις περιπτώσεις αυτές που συνήθως έχουν σχέση με διασύνδεση συστημάτων, οικονομικά συστήματα (Leontieff model) [Leontieff 1953] κ.α., υπάρχουν ειδικές μορφές περιγραφής συστημάτων όπως η εξής (Willems 1979) :

$$A(\rho) y(t) = B(\rho) u(t) \quad (1.4)$$

όπου  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times n}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r \leq \max(p, n)$  και  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ . Η σχέση (1.4) μπορεί επίσης να γραφτεί με την μορφή ομογενούς διαφορικής εξίσωσης :

$$[A(\rho) \quad -B(\rho)] \begin{bmatrix} y(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.5)$$

Στην διατριβή αυτή θα μελετήσουμε Π.Π.Σ. της μορφής (1.1) και θα αφιερώσουμε ένα ειδικό κεφάλαιο (κεφ. 6) για την μελέτη συστημάτων της μορφής (1.5).

## 1.2 Το πρόβλημα της ισοδυναμίας συστημάτων κατά το διάστημα 1970–90.

Στην μαθηματική θεωρία συστημάτων είναι δυνατόν διαφορετικές Π.Π.Σ. της μορφής (1.1) να περιγραφούν το ίδιο φυσικό σύστημα. Ένα ουσιαστικό ερώτημα λοιπόν που γεννιέται είναι κάτω από ποιές συνθήκες μπορούν αυτές οι Π.Π.Σ. να θεωρηθούν "ισοδύναμες" ; Τι μπορεί όμως να σημαίνει η λέξη "ισοδύναμες" και που θα μπορούσε να ήταν χρήσιμη αυτή η έννοια της ισοδυναμίας συστημάτων ; Να έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς (transfer function)  $G(s) = C(s)A(s)^{-1}B(s) + D(s)$  θα ήταν μια αρχική απάντηση στο πρώτο ερώτημα. Ξέρουμε όμως ότι η συνάρτηση μεταφοράς μας δίνει μια πλήρη περιγραφή ενός "μη αναγώγιμου" συστήματος (irreducible system) πρδ. ελέγξιμου και παρατηρήσιμου συστήματος ή αλλιώς μια πλήρη εικόνα της σχέσεως εισόδου–εξόδου ενός συστήματος χωρίς καμιά πληροφορία για την εσωτερική κατάσταση του συστήματος. Αρα στην έννοια της "ισοδυναμίας" συστημάτων θα πρέπει να συμπεριληφθούν και άλλες ιδιότητες εκτός από την ταύτιση της συνάρτησης μεταφοράς, όπως ταύτιση των ιδιοτήτων της ελεγχιμότητας και της παρατηρησιμότητας συστημάτων όπως ορίστηκε από τους

Rosenbrock (1970) και Verghese (1978) καθώς και άλλων χαρακτηριστικών στοιχείων του συστήματος.

Πρώτος ο Rosenbrock (1970) με τον ορισμό της αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων (strict system equivalence) και στην συνέχεια οι Fuhrmann (1977), Rosenbrock (1977), Pugh & Shelton (1978) με την γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων (extended strict system equivalence) έδωσαν μια λύση (στο πεδίο της συχνότητας) του προβλήματος της ισοδυναμίας συστημάτων, προτείνοντας συγκεκριμένους πολυωνυμικούς μετασχηματισμούς μεταξύ των πινάκων Rosenbrock  $P(s)$ , των Π.Π.Σ. της μορφής (1.1) :

$$P(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Οι προτεινόμενες αυτές ισοδυναμίες είχαν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}$  (finite zero structure) πρδ. την συνάρτηση μεταφοράς, τους πεπερασμένους πόλους (μηδενικά) μεταφοράς (finite transmission poles (zeros)), τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά του συστήματος (finite decoupling zeros), τους πεπερασμένους πόλους (μηδενικά) του συστήματος (finite system poles (zeros)). Μια διαφορετική ερμηνεία των παραπάνω ισοδυναμιών στο πεδίο του χρόνου υπό την μορφή ισομορφισμών των πεπερασμένων χώρων λύσεων—εισόδων των "ισοδύναμων" συστημάτων έχουμε στην συνέχεια από τον Pernebo (1977).

Η επιπλέον "κρουστική" δομή (infinite frequency structure) των γενικών Π.Π.Σ. που αρχικά μελετήθηκε από τους Rosenbrock (1974), Luenberger (1978) και Verghese (1978) οδήγησε στην ανάγκη δημιουργίας καινούργιων εννοιών ισοδυναμίας. Η πιο απλή Π.Π.Σ. που διαθέτει "κρουστική" συμπεριφορά είναι η Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (δες (1.3)) και γ'αυτό τον λόγο ήταν και η πρώτη που μελετήθηκε. Πρώτος ο Verghese (1978) παρουσίασε την ισχυρή ισοδυναμία για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (strong system equivalence), βάσει συγκεκριμένων στοιχειωδών μετασχηματισμών που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  (finite and infinite zero structure) αυτής της κατηγορίας συστημάτων πρδ. την συνάρτηση μεταφοράς, τους πόλους (μηδενικά) μεταφοράς στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  (finite and infinite transmission poles

(zeros)), τα αποσυζευγμένα μηδενικά του συστήματος στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  (finite and infinite decoupling zeros), τους πόλους (μηδενικά) του συστήματος στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  (finite and infinite system poles (zeros)). Οι Pugh *et al.* (1987) με την τέλεια ισοδυναμία συστημάτων (completely system equivalence) έδωσαν τον χαρακτηρισμό της ισχυρής ισοδυναμίας υπό την μορφή πολυωνυμικού μετασχηματισμού των πινάκων Rosenbrock των ισοδύναμων Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Μια ερμηνεία στο πεδίο του χρόνου της ισχυρής ισοδυναμίας έχουμε στην συνέχεια από τους Verghese *et al.* (1981), ενώ αντίστοιχα της τέλει ισοδυναμίας συστημάτων έχουμε από τους Hayton *et al.* (1986). Την γενίκευση της ισχυρής ισοδυναμίας συστημάτων για γενικές Π.Π.Σ. έρχονται να δώσουν οι Anderson *et al.* (1985) διαμέσου δύο ξεχωριστών μετασχηματισμών των πινάκων Rosenbrock των ισοδύναμων Π.Π.Σ. ; ενός πολυωνυμικού μετασχηματισμού που διατηρεί αναλλοίωτη την πεπερασμένη μηδενική δομή των ισοδύναμων συστημάτων και ενός ρητού μετασχηματισμού που διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $s=\infty$ . Την αναγωγή των δύο αυτών μετασχηματισμών σε έναν και ταυτόχρονα την γενίκευση της τέλει ισοδυναμίας συστημάτων για γενικές Π.Π.Σ. έχουμε από τους Hayton *et al.* (1990) με τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων (full system equivalence).

Ποια είναι η χρησιμότητα των "ισοδυναμιών" συστημάτων που αναφέραμε παραπάνω ; Η χρησιμότητα έγκυται στο ότι μας δίνεται η δυνατότητα να ανάγουμε γενικές Π.Π.Σ. σε πιο απλές, όπως για παράδειγμα η Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, οι οποίες εκτός του ότι έχουν τις ίδιες ιδιότητες είναι και πιο εύκολο να μελετηθούν.

Μερικά από τα θέματα που θα μας απασχολήσουν στο κύριο μέρος της διατριβής και τα οποία θα αναφέρουμε στην επόμενη ενότητα είναι το πρόβλημα της αναγωγής μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, η ειδική μορφή της πλήρους ισοδυναμίας για αριστερά ή δεξιά κλασματικές Π.Π.Σ. (left or right matrix fraction descriptions), η ερμηνεία της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων στο πεδίο του χρόνου καθώς και η μελέτη του χώρου λύσεων συστημάτων της μορφής (1.5).

### 1.3 Σύνοψη περιγραφή των κεφαλαίων της διατριβής.

Στην ενότητα αυτή δίνεται μια σύνοψη περιγραφή των κεφαλαίων της διατριβής που ακολουθούν :

Στο κεφάλαιο 2 δίνεται μια απλή παρουσίαση βασικών μαθηματικών εννοιών πρδ. η αλγεβρική δομή ρητών πινάκων (μηδενικά (zeros) στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και ελάχιστοι δείκτες στηλών και γραμμών (minimal column and row indices)) καθώς και εργαλείων τα οποία είναι σημαντικά για την κατανόηση της διατριβής.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε την εξέλιξη των μετασχηματισμών πολυωνυμικών πινάκων που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  ή πιο γενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Στο κεφάλαιο αυτό προτείνουμε μια γενίκευση όλων αυτών των γνωστών μετασχηματισμών για την περίπτωση που αντί πολυωνυμικών πινάκων έχουμε ρητούς πίνακες όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων.

Στο κεφάλαιο 4 ορίζουμε την  $\Omega$ -ισοδυναμία ρητών πινάκων όχι κατά ανάγκη ιδίων διαστάσεων που έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή ρητών πινάκων σε μια περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{s\}$ . Εφαρμογές της ισοδυναμίας αυτής όπως θα δούμε είναι α) η μελέτη της μηδενική δομής στην περιοχή  $\mathbb{C}\{s\}$  συναρτήσεων μεταφοράς έπειτα από  $\Omega$ -πολυωνυμική ανάδραση εξόδου και β) η επέκταση των γνωστών συνθηκών απουσίας μηδενικών στο  $s=\infty$  πολυωνυμικών πινάκων (Pugh et al. 1992, Zhang 1989) για την περίπτωση των ρητών πινάκων.

Στο κεφάλαιο 5 ορίζουμε την έννοια της ελάχιστης πραγμάτωσης (minimal realization) ρητών πινάκων, προτείνουμε τρόπους αναγωγής ρητών πινάκων σε  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες (matrix pencils) και δίνουμε τέλος μια γενίκευση της μορφής Kronecker (Kronecker 1890, Gantmacher 1959) για ρητούς πίνακες.

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε τον χώρο λύσεων μιας ομογενούς διαφορικής εξίσωσης της μορφής  $A(\rho)\beta(t)=0$ , όπου  $\rho:=d/dt$  είναι ο διαφορικός τελεστής,  $A(\rho)\in\mathbb{R}[\rho]^{p\times m}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}}A(\rho)=r\leq\max(p,m)$ , σε σχέση με την αλγεβρική δομή του πίνακα  $A(\rho)$ , δίνοντας έτσι μια απάντηση στο άλυτο ερώτημα του Willems (1991) όσον αφορά την συμπεριφορά (behaviour) συστημάτων της μορφής (1.5). Η λύση του προβλήματος αυτού έχει ως σκοπό επίσης να γενικεύσει την δουλειά των Verghese & Kailath (1979), Gohberg (1982) και Vardulakis & Fragulis (1989).

Στο κεφάλαιο 7 δίνουμε μια ερμηνεία του μετασχηματισμού της πλήρους ισοδυναμίας τετράγωνων και αντιστρέψιμων πολυωνυμικών πινάκων υπό την μορφή ισομορφισμών, μεταξύ του χώρου λύσεων, των ομογενών συστημάτων που σχηματίζονται από τους ισοδύναμους πολυωνυμικούς πίνακες. Μια σημαντική επίσης απάντηση στο πότε μια σχέση της μορφής  $y(t)=N(\rho)\beta(t)$ , όπου  $A(\rho)\beta(t)=0$ , μπορεί να θεωρηθεί απεικόνιση και ακόμα πιο γενικά ισομορφισμός δίνεται στο κεφάλαιο αυτό. Η γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich (1974) για ομογενή συστήματα είναι ένα από τα επιπλέον θέματα του κεφαλαίου αυτού.

Στο κεφάλαιο 8 κάνουμε μια σύντομη αναφορά στις πολυωνυμικές περιγραφές γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, συστημάτων και στις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα συστήματα αυτά. Με την βοήθεια των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 6 δίνουμε μια γεωμετρική ερμηνεία των αναλλοίωτων μηδενικών (invariant zeros) στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  ενός συστήματος γενικεύοντας έτσι την δουλειά των Karcaniias 1975, MacFarlane & Karcaniias 1976. Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε επίσης την "πεπερασμένη" αλλά και "κρουστική" συμπεριφορά μιας ειδικής κατηγορίας γραμμικών συστημάτων τα τετράγωνα αντίστροφα συστήματα, (square inverse linear systems) προτείνοντας έτσι μια γενίκευση της δουλειάς των Rosenbrock & Van Der Weiden (1977).

Στο κεφάλαιο 9 κάνουμε μια μικρή αναφορά σε γνωστούς μετασχηματισμούς Π.Π.Σ. και στην συνέχεια προτείνουμε τρόπους αναγωγής γενικών Π.Π.Σ. σε ισοδύναμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Ορίζουμε την πλήρη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (full unimodular equivalence) για κλασματικές Π.Π.Σ. (matrix fraction descriptions), ως γενίκευση της γνωστής αντιστρέψιμης ισοδυναμίας (unimodular equivalence) (Kailath 1980, Smith 1981), και στην συνέχεια δείχνουμε ότι ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων. Η γενίκευση της ισοδυναμίας Morf (Morf 1975, Levy et al. 1977) έρχεται να κλείσει το κεφάλαιο αυτό.

Στο κεφάλαιο 10 ορίζουμε την θεμελιώδη ισοδυναμία συστημάτων (fundamental equivalence) η οποία αποτελεί, όπως και αποδεικνύεται, την ερμηνεία της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων στο πεδίο του χρόνου υπό την μορφή αμφιέσεων (ένα προς ένα και επί γραμμικών απεικονίσεων) μεταξύ του "πεπερασμένου" αλλά και του "κρουστικού" χώρου λύσεων-εισόδων των ισοδύναμων συστημάτων. Η ισοδυναμία αυτή αποτελεί μια γενίκευση της ισοδυναμίας των Pernebo (1977) και Hayton et al. (1986). Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich (1974) καθώς και με μια γενίκευση του τρόπου αναγωγής μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια "ισοδύναμη" Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων των Wolovich (1973), Wolovich & Guidorzi (1977).

Στο κεφάλαιο 11 έχουμε μια εφαρμογή της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων στην ιεραρχική θεωρία συστημάτων (hierarchical theory of systems), η οποία γενικεύει ορισμένα γνωστά αποτελέσματα των Rosenbrock & Pugh (1974).

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (I), *J.Australian Math. Soc.*, Ser.B, 27, 194–222.
- [D1] DeClaris N. and A.Rindos, 1984, Semistate analysis of neural networks in Apsysia

- California., *Proc. 27th MSCS*, Morgantown, WV, 686–689.
- [F1] Fuhrmann P.A., 1977, On strict system equivalence and similarity., *Int.J.Control*, **25**, 5–10
- [G1] Gantmacher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*. New York : Chelsea.
- [G2] Gohberg I., Langaster P and Rodman I., 1982, *Matrix Polynomials.*, Academic Press, New York.
- [H1] Hayton G.E., Fretwell P. and Pugh A.C., 1986, Fundamental equivalence of generalized state space systems., *IEEE Trans.Auto. Control*, **AC-31**, 431–439.
- [H2] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1990, Infinite frequency structure preserving transformations for general polynomial system matrices., *Int. J. Control*, **52**, 1–14.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall.
- [K2] Karcanias N., 1975, *Geometric theory of zeros and its use in feedback analysis.*, Ph.D. Thesis, University of Manchester, Elec. Eng. Dept., U.K., pp.245–247.
- [K3] Kronecker L., 1890, *Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen.*, S.–B. Akad., Berlin, 763–76.
- [L1] Leontieff W.W., 1953, Static and dynamic theory, in : *Studies in the Structure of the American Economy*. (ed. : W.W. Leontieff), Oxford University Press, NY.
- [L2] Levy B, Kung S–Y, Morf M. and Kailath T., 1977, A unification of system equivalence definitions., *Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, pp.795–800.
- [L3] Luenberger D.G., 1978, Time invariant descriptor systems., *Automatica*, **14**, 473–480.
- [M1] MacFarlane A.G.J. and Karcanias N., 1976, Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex–variable theory., *Int.J.Control*, **24**, pp.33–74.
- [M2] Manke J.W. *et al.*, 1978, Solvability of large–scale descriptor systems., Boeing Computer Services Co..

- [M3] Morf M., 1975, Extended system matrices – transfer functions and system equivalence., *Proceedings of the 1975 IEEE Conference on Decision and Control*, Houston, pp.199–206.
- [P1] Pernebo L., 1977, Notes on strict system equivalence., *Int.J.Control*, **25**, 21–38.
- [P2] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **27**, 657–672.
- [P3] Pugh A.C. ,Hayton G.E and Fretwell P., 1987, On transformations of matrix pencils and implications in Linear System Theory., *Int.J.Control*, **45**, 529–548.
- [P4] Pugh A.C., D.S.Johnson and Hayton G.E., 1992, On conditions guaranteeing two polynomial matrices possess identical zero structures., *IEEE Trans. Auto. Control*.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State Space and Multivariable Theory.*, Nelson, London.
- [R2] Rosenbrock H.H. and Pugh A.C., 1974, Contributions to a hierarchical theory of systems., *Int.J.Control*, **19**, 845–867.
- [R3] Rosenbrock H.H., 1974, Structural properties of linear dynamical systems., *Int.J.Control*, **20**, 191–202.
- [R4] Rosenbrock H.H., 1977, The transformation of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **25**, 11–19.
- [R5] Rosenbrock H.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1977, Inverse systems., *Int.J.Control*, **25**, 389–392.
- [S1] Sastry S.S. and Desoer C.A., 1981, Jump behaviour of circuit and systems., *IEEE Trans. Circuit and Systems*, **CAS–28**, 1109–1123.
- [S2] Schumacher J.M., 1991, A pointwise criterion for controller robustness., *Syst. Control Lett.*, **18**, 1–8.
- [S3] Smith M.C., 1981, Matrix fractions and strict system equivalence, *Int.J.Control*, **34**, 869–883.
- [S4] Spong M. W., 1986, A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems., *Circuit Systems & Signal Processing*.
- [S5] Stevens B.L., 1984, Modeling, simulation and analysis with state variables.,



- Report LG84RR002, Lockheed–Georgia Co., Marietta, GA.
- [S6] Stott B., 1979, Power system response dynamic calculations., *Proc. IEEE*, **67**, 219–241.
- [V1] Vardulakis A.I.G. and Fragulis G., 1989, Infinite elementary divisors of polynomial matrices and impulsive solutions of linear homogeneous matrix differential equations., *Circuit Systems and Signal Process*, **8**, 357–373.
- [V2] Vergheze G.C., 1978, *Infinite–Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems.*, Ph.D.Thesis, Stanford University.
- [V3] Vergheze G. and Kailath T., 1979, Impulsive Behaviour in Dynamical Systems : Structure and Significance., *Proc. 4th Int.Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Delft, The Netherlands, Vol.3, P.Dewilde, Ed. ; North Hollywood, Ca., Western Periodicals Co., pp.162–168.
- [V4] Vergheze G.C. ,Lèvy B.C. and Kailath T., 1981, A generalized state–space for singular systems., *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**, 811–831.
- [W1] Willems J.C., 1979, System theoretic models for the analysis of physical systems., *Riserche di Automatica*, **10**, 71–106.
- [W2] Willems J.C., 1991, Paradigms and Puzzles in the Theory of Dynamical Systems., *IEEE Trans.Auto.Control*, **AC–36**, 259–294.
- [W3] Wolovich W.A., 1973, Determination of state–space representations for linear multivariable systems., *Automatica*, **9**, 97–106.
- [W4] Wolovich W.A., 1974, *Linear Multivariable Systems.*, Springer–Verlag, New York.
- [W5] Wolovich W.A. and Guidorzi R., 1977, A general algorithm for determining state–space representations., *Automatica*, **13**, 295–299.
- [Z1] Zeeman E.C., 1976, Duffing’s equation in brain modelling., *J. Inst. Math. and Its App.* 207–214.
- [Z2] Zhang Shou–Yuan, 1989, Generalized proper inverse of polynomial matrices and the existence of infinite decoupling zeros., *IEEE Trans.on Auto.Control*, **34**, 743–745.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

### ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

- 2.1 Εισαγωγή.
- 2.2 Απεικονίσεις.
  - 2.2.1 Εικόνα μιας απεικόνισης.
  - 2.2.2 Πυρήνας μιας απεικόνισης.
  - 2.2.3 Ομομορφισμοί γραμμικών απεικονίσεων.
    - 2.2.3.1 Μοινομορφισμοί.
    - 2.2.3.2 Επιμορφισμοί.
    - 2.2.3.3 Ισομορφισμοί.
  - 2.2.4 Σχέσεις Ισοδυναμίας.
  - 2.2.5 Ένα αναλλοίωτο στοιχείο στο  $\mathbb{R}$ .
    - 2.2.5.1 Ένα πλήρες αναλλοίωτο στοιχείο στο  $\mathbb{R}$ .
    - 2.2.5.2 Κανονικές απεικονίσεις και κανονικές μορφές.
- 2.3 Πολυωνυμικοί πίνακες.
  - 2.3.1 Στοιχειώδεις πράξεις πολυωνυμικών πινάκων στο  $\mathbb{C}$ .
  - 2.3.2 Αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων στο  $\mathbb{C}$ .
  - 2.3.3 Διαίρετες και μέγιστοι κοινοί διαιρέτες πολυωνυμικών πινάκων.
- 2.4 Ρητοί πίνακες.
  - 2.4.1 Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$ .
  - 2.4.2 Περιγραφή ρητών πινάκων ως κλάσμα πολυωνυμικών πινάκων.
  - 2.4.3 Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}^{\infty}$ .
  - 2.4.4 Ιδιότητες των μηδενικών και των πόλων στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  ρητών πινάκων.
- 2.5 Ο ελάχιστος βαθμός ρητών πινάκων.
- 2.6 Ο McMillan βαθμός ρητών πινάκων.
- 2.7 Αλγεβρική δομή ιδιόμορφων πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων (singular pencils).
- 2.8 ΠΕΡΙΛΗΨΗ.

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## 2.1 Εισαγωγή.

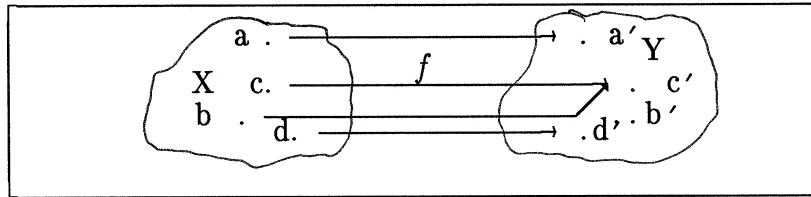
Ο πρωταρχικός στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει βασικές μαθηματικές έννοιες και εργαλεία, τα οποία είναι σημαντικά για την πλήρη κατανόηση της όλης διατριβής. Πιο αναλυτικά, στην ενότητα 2.2 παρουσιάζουμε περιληπτικά το τι είναι απεικόνιση, ορισμένα είδη απεικονίσεων όπως οι γραμμικές απεικονίσεις, τι είναι σχέση ισοδυναμίας καθώς και τι ονομάζω αναλλοίωτο στοιχείο σε ένα σύνολο  $R$ . Στις ενότητες 2.3–2.6 μελετούμε την αλγεβρική δομή ρητών και πολυωνυμικών πινάκων στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς και μερικά χαρακτηριστικά στοιχεία και ιδιότητες αυτών των πινάκων. Τέλος στην ενότητα 2.7 παρουσιάζουμε την αλγεβρική δομή μιας ιδιαίτερης μορφής πολυωνυμικών πινάκων, τα singular pencils δηλ. ιδιόμορφων πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων της μορφής  $A_0 + A_1 s$ , με  $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

## 2.2 Απεικονίσεις.

Οι παρακάτω έννοιες προέρχονται από το βιβλίο (Vardoulakis 1991). Μια απεικόνιση  $f$  (mapping) από ένα σύνολο  $X$  σε ένα σύνολο  $Y$  αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο  $x \in X$  ένα μοναδικό στοιχείο  $y \in Y$ . Το σύνολο  $X$  καλείται το πεδίο ορισμού ή σύνολο αφετηρίας της  $f$  (domain) ενώ το σύνολο  $Y$  καλείται το πεδίο τιμών ή το σύνολο αφίξεων της  $f$  (codomain). Γράφουμε  $f: X \rightarrow Y$  για να δείξουμε ότι η  $f$  είναι μια απεικόνιση με πεδίο ορισμού το  $X$  και πεδίο τιμών το  $Y$ . Εάν έχω  $f: X \rightarrow Y$  συχνά γράφουμε  $f(x)$  ή  $fx$  για το μοναδικό στοιχείο  $y$  του  $Y$  και καλούμε αυτό ως την τιμή (value) της  $f$  στο  $x$ . (ή αλλιώς η εικόνα (image) της  $f$  στο  $x$ ). Για να περιγράψουμε μια συγκεκριμένη απεικόνιση θα πρέπει να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της, καθώς και να γράψουμε την επίδραση της πάνω σε ένα τυπικό στοιχείο του πεδίου ορισμού της πρδ.  $f: X \rightarrow Y, x \rightarrow y$ . Σε κάθε συνάρτηση  $f: X \rightarrow Y$  αντιστοιχεί μια σχέση στο  $X \times Y$  η οποία δίνεται από

$$\{ \langle x, f(x) \rangle \mid x \in X \} \quad (2.1)$$

Καλούμε αυτό το σύνολο το γράφημα (graph) της  $f$ .



σχήμα 2.1

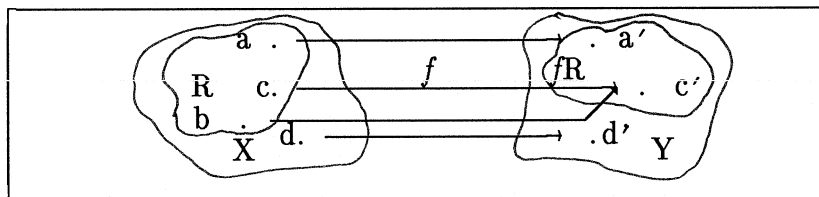
### 2.2.1 Εικόνα μιας απεικόνισης.

Εστω  $f: X \rightarrow Y$  μια απεικόνιση. Εστω  $R$  είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού  $X$  πρδ.  $R \subseteq X$ . Τότε η **εικόνα του  $R$**  (image of  $R$ ) διαμέσου της  $f$  συμβολίζεται με  $fR$  και είναι το υποσύνολο του  $Y$  το οποίο δίνεται από

$$fR := \{y \mid y \in Y \text{ και } \exists x \in R : f(x) = y\} = \{f(x) : x \in R\} \subseteq Y \quad (2.2)$$

Εαν το σύνολο  $R$  ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού  $X$  τότε μιλάμε για την **εικόνα της απεικόνισης  $f$**  (image of  $f$ ) και την συμβολίζουμε ως  $\text{Im } f$  ή  $fX$ .

$$\text{Im } f = fX := \{y \mid y \in Y \text{ και } \exists x \in X : f(x) = y\} = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y \quad (2.3)$$

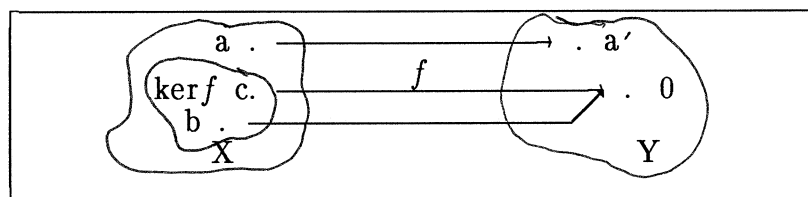


σχήμα 2.2

### 2.2.2 Ο πυρήνας μιας απεικόνισης.

Εστω  $f: X \rightarrow Y$ . Τότε ο **πυρήνας της  $f$**  (kernel of  $f$ ) συμβολίζεται με  $\ker f$  και είναι εκείνο το υποσύνολο του πεδίου ορισμού για το οποίο όλες οι τιμές διαμέσου της  $f$  αντιστοιχίζονται στο σημείο  $0$  του πεδίου τιμών  $Y$ .

$$\ker f := \{x \mid x \in X \text{ και } fx = 0 \in Y\} \subseteq X \quad (2.4)$$



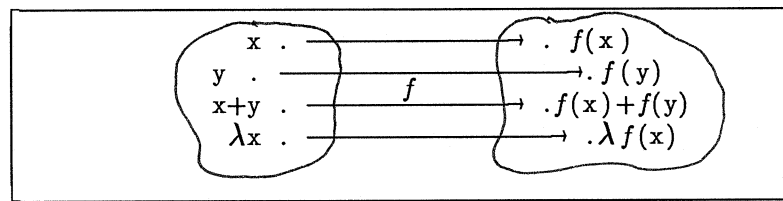
σχήμα 2.3

### 2.2.3 Ομομορφισμοί γραμμικών απεικονίσεων.

Εστω  $X, Y$  δύο γραμμικοί διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα  $\mathbb{F}$ . Μια απεικόνιση  $f: X \rightarrow Y$  ονομάζεται **ομομορφισμός** (*homomorphism*) ή **ομομορφισμός γραμμικών διανυσματικών χώρων** εαν ικανοποιεί τις δύο παρακάτω συνθήκες :

- (i)  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  για κάθε  $x_1, x_2$  τα οποία ανήκουν στο  $X$
- (ii)  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  όπου  $\lambda \in \mathbb{F}$  και  $x \in X$

Μερικές φορές μιλάμε για ομομορφισμούς από τον γραμμικό διανυσματικό χώρο  $X$  στον γραμμικό διανυσματικό χώρο  $Y$ .

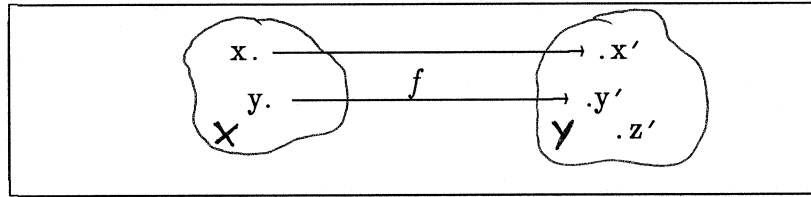


σχήμα 2.4

#### 2.2.3.1 Μονομορφισμοί.

Ένας ομομορφισμός  $f: X \rightarrow Y$  ονομάζεται **μονομορφισμός** (*monomorphism*) ή **ένεσις** (*injection*) ή **ένα προς ένα** (*one-to-one*) εαν διαφορετικά στοιχεία του  $X$  έχουν πάντα διαφορετικές εικόνες στο  $Y$ , πρδ.  $x_1 \neq x_2$  στο  $X$  συνεπάγεται  $f(x_1) \neq f(x_2)$  στο  $Y$  (ή ισοδύναμα εαν  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ). Εαν η  $f: X \rightarrow Y$  είναι ένεσις τότε λέμε ότι η  $f$  απεικονίζει το  $X$  μέσα στο  $Y$ .

**Λήμμα 2.1** Εστω  $f: X \rightarrow Y$  ένας ομομορφισμός. Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η απεικόνιση  $f$  να είναι μονομορφισμός είναι ο πυρήνας της  $f$  να περιέχει μόνο το μηδενικό στοιχείο, δηλ.  $\ker f \equiv 0_x$  □



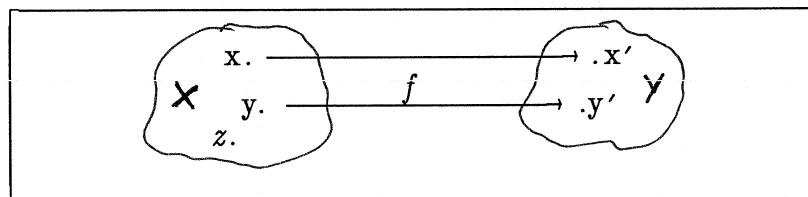
σχήμα 2.5

### 2.2.3.2 Επιμορφισμοί.

Ένας ομομορφισμός  $f: X \rightarrow Y$  ονομάζεται **επιμορφισμός** (epimorphism) ή **έφεσις** (surjection) ή **επί** (onto) εάν κάθε στοιχείο του  $Y$  είναι εικόνα τουλάχιστον ενός στοιχείου του  $X$ , εάν δηλαδή για κάθε στοιχείο  $y \in Y$  υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο  $x \in X$  τέτοιο ώστε  $f(x) = y$  ή

$$y \in Y \Rightarrow \exists x \in X : f(x) = y \quad (2.5)$$

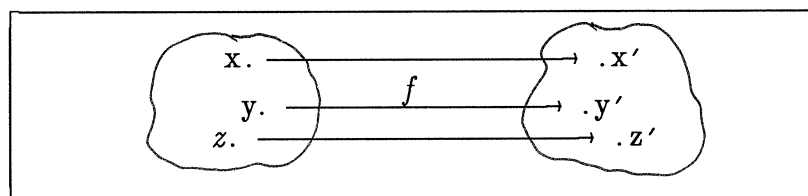
Έτσι η  $f: X \rightarrow Y$  είναι ένας επιμορφισμός εάν η  $f$  απεικονίζει το  $X$  πάνω στο  $Y$  ή αλλιώς η εικόνα της  $f$  είναι όλο το πεδίο τιμών  $Y$ , δηλ.  $\text{Im } f \equiv Y$ .



σχήμα 2.6

### 2.2.3.3 Ισομορφισμοί.

Ένας ομομορφισμός  $f: X \rightarrow Y$  ονομάζεται **ισομορφισμός** (isomorphism) εάν είναι ταυτόχρονα και μονομορφισμός και επιμορφισμός. (ένα προς ένα και επί).



σχήμα 2.7

**Λήμμα 2.2** Θεωρείστε δύο διανυσματικούς χώρους  $A$  και  $B$  και έστω δύο μονομορφισμοί  $f$  και  $g$  τέτοιοι ώστε :

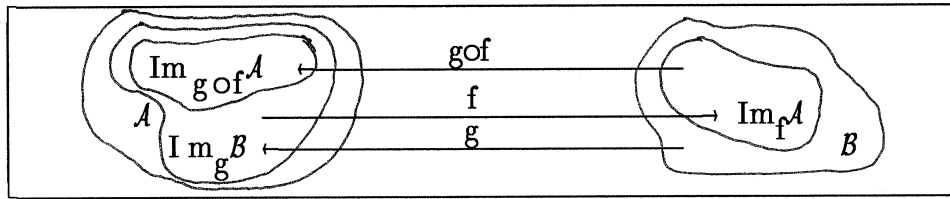
$$y = fx \quad \forall x \in A \quad x \mapsto y \in B \quad (2.6\alpha)$$

και

$$x = gy \quad \forall y \in B \quad y \mapsto x \in A \quad (2.6\beta)$$

Τότε αυτοί οι δύο μονομορφισμοί είναι επίσης και ισομορφισμοί.

**Απόδειξη** Θεωρείστε τους δύο διανυσματικούς χώρους  $A$  και  $B$



σχήμα 2.8

Είναι γνωστό ότι εάν έχουμε δύο μονομορφισμούς  $f$  και  $g$  τότε και η σύνθεση τους  $g \circ f: A \rightarrow A$  είναι επίσης μονομορφισμός που σημαίνει ότι

$$\text{Ker}(g \circ f) = \{0\} \Rightarrow \dim[\text{Ker}(g \circ f)] = 0 \quad (2.7)$$

Από το γνωστό θεώρημα της διάστασης θα έχουμε συνεπώς ότι :

$$\begin{aligned} \dim[\text{Ker}(g \circ f)] + \dim[\text{Im}(g \circ f)] &= \dim[A] \Rightarrow \\ \dim[\text{Im}(g \circ f)] &= \dim[A] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Εχουμε επίσης (δες σχήμα 2.8) ότι :

$$\text{Im}_{g \circ f} A \subseteq \text{Im}_g B \subseteq A \quad (2.9)$$

και συνεπώς η βάση του διανυσματικού χώρου  $\text{Im}_{g \circ f} A$  είναι και βάση των διανυσματικών χώρων  $\text{Im}_g B$  και  $A$  λόγω ταύτισης των διαστάσεων των διανυσματικών χώρων. Αμεσο συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι :

$$\text{Im}_g B \equiv A \quad (2.10)$$

που σημαίνει ότι ο μονομορφισμός  $g$  είναι και επιμορφισμός και άρα η απεικόνιση  $g$  είναι ένας ισομορφισμός. Κατά τον ίδιο τρόπο εάν εναλλάξουμε τις απεικονίσεις  $f$  και  $g$  θα πάρουμε ότι η απεικόνιση  $f$  είναι επίσης ένας ισομορφισμός.  $\square$

### 2.2.4 Σχέσεις Ισοδυναμίας.

Θεωρείστε δύο τυχαία σύνολα  $X$  και  $Y$ . Ένα υποσύνολο  $R$  του Καρτεσιανού γινομένου  $X \times Y$ , ονομάζεται *σχέση από το  $X$  στο  $Y$*  (relation from  $X$  to  $Y$ ). Εάν  $Y=X$  τότε το  $R$  ονομάζεται *σχέση πάνω στο  $X$*  (relation on  $X$ ). Εάν  $x \in X$ ,  $y \in Y$  και  $(x,y) \in R$  τότε λέμε ότι το  $x$  σχετίζεται με το  $y$  διαμέσου της  $R$  ή ότι η  $R$  είναι μια σχέση μεταξύ των  $x$  και  $y$ . Το πεδίο ορισμού της  $R$  (domain of  $R$ ) είναι το σύνολο  $\{x \in X \mid (x,y) \in R\}$ . Το πεδίο τιμών της  $R$  (codomain of  $R$ ) είναι το σύνολο  $\{y \in Y \mid (x,y) \in R\} =: Rx$ .

Μια σχέση  $R$  πάνω στο σύνολο  $X$  ονομάζεται *σχέση ισοδυναμίας* (equivalence relation) εάν και μόνο εάν ικανοποιεί τα τρία ακόλουθα αξιώματα :

**Αξίωμα 1.** (Ανακλαστική ιδιότητα (reflexivity))

$(x,x) \in R$  για κάθε  $x \in X$  ή αλλιώς κάθε στοιχείο  $x \in X$  είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του.

**Αξίωμα 2.** (Συμμετρική ιδιότητα (symmetry))

$(x,y) \in R$  συνεπάγεται ότι  $(y,x) \in R$  ή αλλιώς ότι το στοιχείο  $x \in X$  είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $y \in Y$  εάν και μόνο εάν το στοιχείο  $y \in Y$  είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $x \in X$ .

**Αξίωμα 3.** (Μεταβατική ιδιότητα (transitivity))

$(x,y) \in R$  και  $(y,z) \in R$  τότε και  $(x,z) \in R$  ή αλλιώς αν το στοιχείο  $x \in X$  είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $y \in Y$  και το στοιχείο  $y \in Y$  είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $z \in Z$  τότε και το στοιχείο  $x \in X$  θα είναι ισοδύναμο με το στοιχείο  $z \in Z$ .

Συχνά γράφουμε  $x \sim_R y$  αντί του  $(x,y) \in R$ . Εάν  $R$  είναι μια σχέση ισοδυναμίας πάνω σε ένα σύνολο  $X$  τότε η σχέσις  $R$  διαμερίζει το σύνολο  $X$  σε διαφορετικά σύνολα τα οποία τα ονομάζω  *$R$ -κλάσεις ισοδυναμίας* ( $R$ -equivalence classes). Για κάθε  $x$  η  $R$ -κλάση ισοδυναμίας του  $x$  είναι το σύνολο

$$[x]_R := \{y \in X \mid (x,y) \in R\} = \{x \in X \mid x \sim_R y\} \subset X \quad (2.11)$$

Για κάθε σχέση ισοδυναμίας  $R$  πάνω στο  $X$  έχουμε ότι  $[x]_R \cap [y]_R = [y]_R$  εάν και μόνο εάν  $x \sim_R y$  και  $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$  εάν και μόνο εάν  $x \not\sim_R y$ .

Το σύνολο πηλίκο του  $X$  με την  $R$  (quotient of  $X$  by  $R$ ) (συμβολίζεται με)  $X/R$  είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας  $[x]_R$ , όταν το  $x$  διατρέχει τα στοιχεία του  $X$ .



### 2.2.5 Ένα αναλλοίωτο στοιχείο στο $R$ .

Εαν  $T$  είναι ένα άλλο σύνολο τότε μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow T$  ονομάζεται **αναλλοίωτο στοιχείο του  $R$**  (*invariant element of  $R$* ) όταν

$$x \sim_R y \implies f(x) = f(y) \quad (2.12)$$

Με άλλα λόγια η  $f: X \rightarrow Y$  είναι ένα αναλλοίωτο στοιχείο του  $R$  εαν όλα τα στοιχεία  $y \in Y$  τέτοια ώστε  $(x, y) \in R$  έχουν την ίδια εικόνα διαμέσου της  $f$ .

#### 2.2.5.1 Ένα πλήρες αναλλοίωτο στοιχείο στο $R$ .

Εαν  $T$  είναι ένα άλλο σύνολο τότε μια συνάρτηση  $f: X \rightarrow T$  ονομάζεται **πλήρες αναλλοίωτο στοιχείο του  $R$**  (*complete invariant element of  $R$* ) όταν

$$x \sim_R y \iff f(x) = f(y) \quad (2.13)$$

#### 2.2.5.2 Καιονικές απεικονίσεις και καιονικές μορφές.

Μια απεικόνιση  $g: X \rightarrow X$  ονομάζεται **καιονική απεικόνιση** (*canononical map*) για μια σχέση ισοδυναμίας  $R$  πάνω στο  $X$  όταν

$$(i) \quad x \sim_R g(x) \quad \forall x \in X$$

και

$$(ii) \quad x \sim_R y \iff g(x) = g(y)$$

Η εικόνα της  $g$ , συμβολίζεται με  $\text{Im } g$ , λέγεται ότι είναι ένα σύνολο **καιονικών μορφών** (*canonical forms*) για την  $R$  πάνω στο  $X$ . Συνηθίζεται επίσης να λέγεται ένα σύνολο  $R$ -καιονικών μορφών πάνω στο  $X$ . Το επόμενο Λήμμα μας δίνει ότι το σύνολο των σταθερών σημείων της  $g$  ταυτίζεται με το σύνολο των καιονικών μορφών που δίνονται από την  $g$ .

**Λήμμα 2.3** Εστω  $R$  μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο  $X$  και έστω  $g: X \rightarrow X$  είναι μια καιονική απεικόνιση από το  $R$  πάνω στο  $X$ . Τότε

$$x \in \text{Im } g \iff g(x) = x \quad (2.14) \quad \square$$

Οι κανονικές μορφές είναι "σταθερά σημεία" (*fixed points*) της κανονικής απεικόνισης  $g: X \rightarrow X$ .

### 2.3 Πολυωνυμικοί πίνακες.

Εστω  $\mathbb{R}$  το σώμα των πραγματικών αριθμών,  $\mathbb{R}[s]$  ο δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές στο  $\mathbb{R}$ . Εστω επίσης  $\mathbb{R}[s]^{p \times m}$  το σύνολο των  $p \times m$  πινάκων με στοιχεία στο  $\mathbb{R}[s]$ . Ένας πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ονομάζεται **πολυωνυμικός πίνακας** και συνήθως αναλύεται ως εξής

$$A(s) = A_0 + A_1s + A_2s^2 + \dots + A_qs^q \quad \text{όπου } A_i \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (2.15)$$

Ο αριθμός  $q$  ονομάζεται **τάξη** (*order*) του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$ . Μερικά χαρακτηριστικά στοιχεία ενός πολυωνυμικού πίνακα είναι ο βαθμός του και η συμπλεκτικότητα του (*complexity*). Πιο συγκεκριμένα :

**Ορισμός 2.4** (Gantmacher 1959) Ο **βαθμός** (*degree*) ενός πολυωνυμικού πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ , συμβολίζεται  $\deg A(s)$  και ορίζεται ως ο μέγιστος βαθμός ανάμεσα σε όλους τους βαθμούς των μέγιστων τάξεων ελλάσσων οριζουσών (μη μηδενικών).  $\square$

**Ορισμός 2.5** (Wolovich 1974) Ορίζουμε ως **συμπλεκτικότητα γραμμών** (*row complexity*) (στηλών (*column complexity*))  $c_r(A)$  ( $c_c(A)$ ) του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  το άθροισμα των βαθμών του κάθε πολυωνυμικού διανύσματος γραμμής (στήλης) του  $A(s)$ .  $\square$

Παρακάτω θα αναφέρουμε ορισμένα είδη πολυωνυμικών πινάκων στηριζόμενοι σε ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.

**Ορισμός 2.6** (Rosenbrock 1970) Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ . Ο  $A(s)$  θα ονομάζεται **αντιστρέψιμος** (*unimodular*) εάν και μόνο εάν υπάρχει  $\hat{A}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  τέτοιος ώστε  $A(s)\hat{A}(s) = I_p$ , ή ισοδύναμα εάν και μόνο εάν  $\det A(s) = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $\square$

**Ορισμός 2.7** (Wolovich 1974) Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Ο  $A(s)$  θα ονομάζεται **καινικός κατά γραμμές** (*row proper*) [**καινικός κατά στήλες** (*column proper*)] εαν και μόνο εαν η συμπλεκτικότητα των γραμμών [στηλών] του είναι ίση με τον βαθμό του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$  ( $\deg A(s)$ ).  $\square$

**Ορισμός 2.8** (Vardulakis 1991) Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ , όπου

$$A(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \dots + A_q s^q \quad \text{όπου } A_i \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (2.16)$$

Ο  $A(s)$  θα ονομάζεται **ομαλός** (*regular*) εαν και μόνο εαν  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_q = p$  διαφορετικά θα ονομάζεται **ιδιάζων** (*singular*).  $\square$

Ενα μεγάλο ενδιαφέρον όσον αφορά την μελέτη γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου παρουσιάζουν οι ιδιάζοντες πολυωνυμικοί πίνακες λόγω της ποικίλης αλγεβρικής δομής τους.

**Παράδειγμα 2.9** Εστω ο πολυωνυμικός πίνακας

$$A(s) = A_0 + A_1 s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{3 \times 3}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο **βαθμός** του πίνακα είναι ίσος με τον βαθμό της ορίζουσας του μια που πρόκειται για τετραγωνικό πίνακα και είναι ίσος με  $\deg 1 = 0$ . Επιπλέον  $\det A(s) = 1$  και συνεπώς ο  $A(s)$  είναι **αντιστρέψιμος**. Η **συμπλεκτικότητα** κατά γραμμές και κατά στήλες είναι 2 και επειδή είναι διαφορετική του μηδενός ( $= \deg A(s)$ ) γ'αυτό ο πολυωνυμικός πίνακας  $A(s)$  δεν είναι **καινικός κατά στήλες** ή **κατά γραμμές**. Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_1 = 2 < 3$  και συνεπώς ο πίνακας μου είναι **ιδιάζων**.  $\square$

### 2.3.1 Στοιχειώδεις πράξεις πολυωνυμικών πινάκων στο $\mathbb{C}$ .

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφέρουμε ορισμένες στοιχειώδεις πράξεις (*elementary operations*) που μπορούμε να εφαρμόσουμε σε πολυωνυμικούς πίνακες. Πιο συγκεκριμένα οι στοιχειώδεις αυτές πράξεις είναι τριών ειδών και είναι οι παρακάτω :

- 1) εναλλαγή δύο γραμμών (ή δύο στηλών) ( $\rho_i \longleftrightarrow \rho_j$ )
- 2) πολλαπλασιασμός μιας γραμμής (στήλης) με μια σταθερά  $k \in \mathbb{R}$  ( $\rho_i \longleftarrow k\rho_i$ )
- 3) πρόσθεση στην γραμμή (στήλη)  $i$  της γραμμής (στήλης)  $j$  επί ένα μη μηδενικό στοιχείο  $t(s) \in \mathbb{R}[s]$  ( $\rho_i \longleftarrow \rho_i + t(s)\rho_j$ ).

Αυτές οι πράξεις είναι ισοδύναμες με τον πολλαπλασιασμό του πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  από αριστερά (από δεξιά) με στοιχειώδεις αντιστρέψιμους πίνακες (*elementary unimodular matrices*) οι οποίοι προέρχονται από την εφαρμογή αυτών των στοιχειωδών πράξεων στον μοναδιαίο πίνακα  $I_{p(m)}$ . Μπορεί επίσης να δειχθεί (Gantmacher 1959) ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας μπορεί να γραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Ένα σημαντικό στοιχείο αυτού του είδους των στοιχειωδών πράξεων είναι ότι αφήνουν αναλλοίωτη την τάξη (*normal rank*) καθώς και την αλγεβρική δομή των πολυωνυμικών πινάκων στο  $\mathbb{C}$ . Τι εννοώ όμως όταν λέω αλγεβρική δομή ενός πολυωνυμικού πίνακα στο  $\mathbb{C}$  ή στο  $s=\infty$ ; Τι είναι αυτό που χαρακτηρίζει την αλγεβρική δομή ενός πολυωνυμικού πίνακα στο  $\mathbb{C}$  ή στο  $s=\infty$ ; Υπάρχουν τρόποι μετάβασης μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων έτσι ώστε να παραμένει αναλλοίωτη η αλγεβρική δομή τους; Την απάντηση των ερωτημάτων αυτών που αφορούν την αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων στο  $\mathbb{C}$  ερχόμαστε να δούμε στην επόμενη ενότητα.

### 2.3.2. Αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων στο $\mathbb{C}$ .

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε ένα είδος ισοδυναμίας το οποίο όπως θα δούμε έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα να κρατάει αναλλοίωτη την αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων στο  $\mathbb{C}$ .

**Ορισμός 2.10** (Gantmacher 1959) Δύο πολυωνυμικοί πίνακες  $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ονομάζονται **αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι** (*unimodular equivalent*), **αριστερά αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι** (*left unimodular equivalent*), **δεξιά αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι** (*right unimodular equivalent*) εάν και μόνο εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  και  $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε να έχω αντίστοιχα

$$T_1(s) = U_L(s)T_2(s)U_R(s), \quad T_1(s) = U_L(s)T_2(s), \quad T_1(s) = T_2(s)U_R(s) \quad (2.17) \quad \square$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν σχέσεις ισοδυναμίας στο  $\mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Ας συμβολίσουμε με  $E^c$  την πρώτη σχέση ισοδυναμίας και έστω  $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  δύο αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι πίνακες. Συμβολίζουμε την ισοδυναμία αυτών των δύο πινάκων ως  $[T_1(s), T_2(s)] \in E^c$ . Η  $E^c$ -σχέση ισοδυναμίας για έναν καθορισμένο πολυωνυμικό πίνακα  $T(s)$  συμβολίζεται με  $[T(s)]_{E^c}$ . Η Smith μορφή  $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ενός πολυωνυμικού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ , που θα δείξουμε στο παρακάτω θεώρημα, είναι μια καινούργια μορφή για την  $E^c$  πάνω στο  $\mathbb{R}[s]^{p \times m}$ .

**Θεώρημα 2.11** (Gantmacher 1959) [**Smith form στο  $\mathbb{C}$  πολυωνυμικών πινάκων**]

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ ,  $r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε ο πίνακας  $T(s)$  είναι ισοδύναμος με τον διαγώνιο πίνακα  $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ο οποίος έχει την μορφή :

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} [\lambda_1(s), \lambda_2(s), \dots, \lambda_r(s), \mathbf{0}_{p-r, m-r}] \quad (2.18)$$

και ονομάζεται **Smith μορφή** (*Smith form*) στο  $\mathbb{C}$  του  $T(s)$ . Τα πολυώνυμα  $\lambda_i(s)$ , καλούνται **αναλλοίωτα πολυώνυμα** (*invariant polynomial*) του  $T(s)$  και έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα, είναι μοναδικά ορισμένα από το  $T(s)$  και ικανοποιούν την παρακάτω ιδιότητα

$$\lambda_i(s) \mid \lambda_{i+1}(s) \quad \forall i \in \mathbf{r}-1 \quad (2.19)$$

Θεωρείστε τα πολυώνυμα  $\Delta_i(s) \in \mathbb{R}[s]$ ,  $i=0, 1, \dots, r$  τα οποία δίνονται από την σχέση :

$$\Delta_0 \equiv 1, \quad \Delta_i(s) := \text{ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των } i \times i \text{ ελλάσσων οριζουσών του } T(s) \quad (2.20)$$

Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται **διαιρέτες οριζουσών** (*determinantal divisors*) του  $T(s)$  και συνδέονται με τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του  $T(s)$  ως εξής

$$\lambda_i(s) = \Delta_i(s)/\Delta_{i-1}(s) \quad i \in \Gamma \quad (2.21) \quad \square$$

**Ορισμός 2.12** (Gantmacher 1959) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Ορίζουμε ως **μηδενικά** (*zeros*) του πολυωνυμικού πίνακα  $T(s)$  τα μηδενικά των αναλλοίωτων πολυωνύμων  $\lambda_i(s)$ .  $\square$

**Παράδειγμα 2.13** Εστω ότι θέλουμε να βρούμε την Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  του :

$$T(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & s(s+1) \\ 0 & s+2 & s(s+2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2 \times 3} \quad (E.1)$$

Θεωρούμε ως  $\Delta_0(s)=1$  και

$$\Delta_1(s) = \mu.κ.δ. \{s+1, s+2, s(s+1), s(s+2)\} = 1 \quad (E.2)$$

$$\Delta_2(s) = \mu.κ.δ. \{(s+1)(s+2), s(s+1)(s+2), s(s+1)(s+2)\} = (s+1)(s+2)$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) &= \Delta_1(s)/\Delta_0(s) = 1/1 = 1 \\ \lambda_2(s) &= \Delta_2(s)/\Delta_1(s) = (s+1)(s+2)/1 = (s+1)(s+2) \end{aligned} \quad (E.3)$$

οπότε η **Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$**  του  $T(s)$  θα είναι

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) & 0 \end{bmatrix} \quad (E.4) \quad \square$$

Μπορεί να δειχθεί (Gantmacher 1959) ότι τα αναλλοίωτα πολυώνυμα και οι διαιρέτες οριζουσών ενός πολυωνυμικού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι μοναδικά ορισμένα, οπότε και η Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  ενός πολυωνυμικού πίνακα είναι μοναδική. Μπορούμε άφοβα λοιπόν να ορίσουμε ως **αλγεβρική δομή ενός πολυωνυμικού πίνακα στο  $\mathbb{C}$**  την δομή της Smith μορφής στο  $\mathbb{C}$  αυτού του πίνακα της οποίας χαρακτηριστικά στοιχεία είναι τα μηδενικά αυτού του

πολυωνυμικού πίνακα. Μπορεί επίσης να δειχθεί (Gantmacher 1959) ότι η αντιστρέψιμη ισοδυναμία στο  $\mathbb{C}$  μεταξύ δύο πολυωνυμικών πινάκων  $T_1(s)$  και  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  έχει την ιδιότητα να διατηρεί :

- 1) Την Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ .
- 2) Τα αναλλοίωτα πολυώνυμα των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ .
- 3) Τους διαιρέτες οριζουσών των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ .

Μερικά εύλογα ερωτήματα που γεννιούνται με το τέλος αυτής της ενότητας είναι α) ποια είναι η αντίστοιχη αλγεβρική δομή των πολυωνυμικών πινάκων στο  $s=\infty$  ; β) υπάρχουν αντίστοιχες ισοδυναμίες που να κρατούν αναλλοίωτη την αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων στο  $s=\infty$  ; γ) έχουν οι ρητοί πίνακες μια αντίστοιχη αλγεβρική δομή στο  $\mathbb{C}$  και πιο γενικά στο  $s=\infty$  ; Σε αυτά τα ερωτήματα θα απαντήσουμε στις παρακάτω ενότητες.

### 2.3.3 Διαιρέτες και μέγιστοι κοινοί διαιρέτες πολυωνυμικών πινάκων.

**Ορισμός 2.14** (Rosenbrock 1970, Vardulakis 1991) Έστω τρεις πολυωνυμικοί πίνακες  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$  και  $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$  τέτοιοι ώστε :

$$A(s) = B(s)C(s) \quad (2.22)$$

Τότε ο  $C(s)$  θα ονομάζεται *δεξιός διαιρέτης* (δ.δ.) (*right divisor*) του  $A(s)$ , ο  $B(s)$  θα ονομάζεται *αριστερός διαιρέτης* (α.δ.) (*left divisor*) του  $A(s)$  και ο  $A(s)$  θα ονομάζεται *αριστερό πολλαπλάσιο* του  $C(s)$  (α.π.) (*left multiple*) ή *δεξιό πολλαπλάσιο* του  $B(s)$  (δ.π.) (*right multiple*). □

**Ορισμός 2.15** (Rosenbrock 1970, Vardulakis 1991) Έστω δύο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών (στηλών) πρδ. έστω  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times \ell}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{\ell \times m}$ ),  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{t \times m}$ ) και έστω  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) είναι ένας αριστερός (δεξιός) διαιρέτης των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  πρδ. έστω

$$T_1(s) = T_L(s)\bar{T}_1(s) (= \bar{T}_1(s)T_R(s)) \quad \text{και} \quad T_2(s) = T_L(s)\bar{T}_2(s) (= \bar{T}_2(s)T_R(s)) \quad (2.23)$$

όπου  $\bar{T}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times \ell}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{\ell \times m}$ ),  $\bar{T}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{t \times m}$ ). Τότε ο  $T_L(s)$  ( $T_R(s)$ ) θα λέγεται *αριστερός (δεξιός) κοινός διαιρέτης* (*left (right) common divisor*) (α.κ.δ. (δ.κ.δ.)) των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ . Εάν τώρα ο  $T_L(s)$  ( $T_R(s)$ ) είναι το δ.π. (α.π.) κάθε α.κ.δ. (δ.κ.δ.) των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  τότε ο  $T_L(s)$  ( $T_R(s)$ ) θα λέγεται *μέγιστος κοινός αριστερός (δεξιός) διαιρέτης* (*greatest left (right) common divisor*) (μ.κ.α.δ. (μ.κ.δ.δ.)) των  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$ .  $\square$

**Ορισμός 2.16** (Rosenbrock 1970, Vardulakis 1991) Εστω δύο πολυωνυμικοί πίνακες με τον ίδιο αριθμό γραμμών (στηλών) πρδ. έστω  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times \ell}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{\ell \times m}$ ),  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$  ( $\in \mathbb{R}[s]^{t \times m}$ ) με  $\ell+t \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}[T_1(s) \ T_2(s)]$  ( $\ell+t \geq m = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}[T_1(s)^T \ T_2(s)^T]^T$ ). Οι  $T_1(s)$  και  $T_2(s)$  θα ονομάζονται *αριστερά (δεξιά) πρώτοι* (*left (right) coprime*) (α.π. (δ.π.)), εάν και μόνο εάν ο μ.κ.α.δ. (μ.κ.δ.δ) τους  $T_{GL}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $T_{GR}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) είναι αντιστρέψιμος.  $\square$

Μια σημαντική πρόταση που αφορά αριστερά (δεξιά) πρώτους πολυωνυμικούς πίνακες είναι η παρακάτω :

**Πρόταση 2.17** (Rosenbrock 1970, Vardulakis 1991) Εστω  $T_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times \ell}$ ,  $T_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times t}$ ,  $\ell+t =: m \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}[T_1(s), T_2(s)]$ . Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- 1) Οι  $T_1(s), T_2(s)$  είναι αριστερά πρώτοι.
- 2) Ο πολυωνυμικός πίνακας  $T(s) = [T_1(s), T_2(s)] \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ .
- 3) Υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $\bar{T}_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιος ώστε

$$[T_1(s), T_2(s)] \bar{T}_R(s) = [I_p \ 0_{p, m-p}] \equiv S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)$$

όπου  $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι η Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $T(s)$ .

- 4)  $\text{rank}_{\mathbb{C}}[T_1(s_0), T_2(s_0)] = p \quad \forall s_0 \in \mathbb{C}$ .
- 5) Υπάρχουν  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\ell \times p}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{t \times p}$  τέτοιοι ώστε

$$T_1(s)X(s) + T_2(s)Y(s) = I_p$$



6) Υπάρχουν  $T_3(s) \in \mathbb{R}[s]^{(m-p) \times \ell}$  και  $T_4(s) \in \mathbb{R}[s]^{(m-p) \times t}$  τέτοιοι ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix}$$

να είναι αντιστρέψιμος. □

Παρόμοια πρόταση μπορούμε να διατυπώσουμε για την περίπτωση δεξιά πρώτων πολυωνυμικών πινάκων.

#### 2.4 Ρητοί πίνακες.

Εστω  $\mathbb{R}[s]$  ο δακτύλιος των πολυωνύμων με συντελεστές στο  $\mathbb{R}$  και  $\mathbb{R}(s)$  το σώμα των ρητών συναρτήσεων πάνω στο  $\mathbb{R}[s]$  :

$$\mathbb{R}(s) := \left\{ t(s) \mid t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0 \right\} \quad (2.24)$$

Το  $\mathbb{R}(s)$  ονομάζεται το σώμα των ρητών συναρτήσεων. Εστω  $\mathbb{R}(s)^{p \times m}$  το σύνολο των  $p \times m$  πινάκων με στοιχεία από το  $\mathbb{R}(s)$ . Ένας πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ονομάζεται (πραγματικός) ρητός πίνακας.

##### 2.4.1. Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}$ .

Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και στηλών που μπορούμε να εφαρμόσουμε σε έναν ρητό πίνακα είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές που αναφέραμε στο κεφάλαιο 2.3.1. . Οσον αφορά την ισοδυναμία δύο ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$  έχουμε ότι :

**Ορισμός 2.18** (McMillan 1952) Δύο ρητοί πίνακες  $T_1(s), T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ονομάζονται **ισοδύναμοι στο  $\mathbb{C}$**  (equivalent in  $\mathbb{C}$ ), **αριστερά ισοδύναμοι στο  $\mathbb{C}$**  (left equivalent in  $\mathbb{C}$ ), **δεξιά ισοδύναμοι στο  $\mathbb{C}$**  (right equivalent in  $\mathbb{C}$ ) εαν και μόνο εαν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ,  $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε να έχω αντίστοιχα :

$$T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s), \quad T_L(s)T_1(s) = T_2(s), \quad T_1(s)T_R(s) = T_2(s) \quad (2.25) \quad \square$$

Οι παραπάνω σχέσεις, μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι είναι σχέσεις ισοδυναμίας. Ένα σημαντικό θεώρημα ανάλογο αυτού της Smith μορφής στο  $\mathbb{C}$  σε πολυωνυμικούς πίνακες έχουμε και εδώ στους ρητούς πίνακες και είναι το εξής :

**Θεώρημα 2.19** (McMillan 1952) [Smith–McMillan μορφή ενός ρητού πίνακα στο  $\mathbb{C}$ ]

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ ,  $r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε ο  $T(s)$  είναι ισοδύναμος στο  $\mathbb{C}$  με έναν διαγώνιο πίνακα  $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  ο οποίος έχει την μορφή :

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (2.26)$$

όπου τα  $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$  έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα, είναι πρώτα μεταξύ τους και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

$$\varepsilon_i(s) \nmid \varepsilon_{i+1}(s) \quad \forall i \in \mathbb{R}-1 \quad (2.27)$$

$$\psi_{i+1}(s) \nmid \psi_i(s) \quad \forall i \in \mathbb{R}-1 \quad (2.28)$$

Ο διαγώνιος ρητός πίνακας  $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  ονομάζεται **Smith–McMillan μορφή του  $T(s)$  στο  $\mathbb{C}$** .  $\square$

**Ορισμός 2.20** (McMillan 1952) Οι ρητές συναρτήσεις  $\varepsilon_i(s)/\psi_i(s) =: f_i(s)$   $i \in \mathbb{R}$  αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναλλοίωτων στην κλάση ισοδυναμίας  $E^{\mathbb{C}}$  των ισοδύναμων ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$  και τις ονομάζουμε **αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις** (*invariant rational functions*) του  $T(s)$ .  $\square$

**Ορισμός 2.21** (McMillan 1952) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Ορίζουμε ως **μηδενικά** (zeros) του  $T(s)$  στο  $\mathbb{C}$  τα μηδενικά των πολυωνύμων  $\varepsilon_i(s)$ ,  $i \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε ως **πόλους** (poles) του  $T(s)$  στο  $\mathbb{C}$  τα μηδενικά των πολυωνύμων  $\psi_i(s)$ ,  $i \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Ένας εύκολος τρόπος υπολογισμού της Smith–McMillan μορφής στο  $\mathbb{C}$  ενός ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι να γράψουμε τον ρητό πίνακα  $T(s)$  στην εξής μορφή :

$$T(s) = \frac{N(s)}{d(s)} \quad (2.29)$$

όπου  $d(s)$  το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο όλων των παρονομαστών των στοιχείων  $t_{ij}(s)=n_{ij}(s)/d_{ij}(s)$  του  $T(s)$  και  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Στην συνέχεια βρίσκουμε την Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $N(s)$ , έστω  $S_{N(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} [n_1(s), n_2(s), \dots, n_r(s), \mathbf{0}_{p-r, m-r}]$  και διαιρούμε κάθε  $n_i(s)$   $i \in \Gamma$  με το  $d(s)$  έτσι ώστε να απλοποιηθούν όλοι οι κοινί παράγοντες. Υστερα από όλες τις απλοποιήσεις παίρνουμε

$$\frac{n_i(s)}{d(s)} = \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \quad i \in \Gamma \quad (2.30)$$

οπότε και την τελική Smith–McMillan μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $T(s)$ .

**Παράδειγμα 2.22** Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την Smith–McMillan μορφή στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα :

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2 \times 2} \quad (E.1)$$

ο οποίος γράφεται ως

$$T(s) = \frac{\begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 0 \\ (s+1)(s+3) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{N(s)}{d(s)} \quad (E.2)$$

Δεδομένου ότι η Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $N(s)$  είναι

$$S_{N(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)^2(s+3) \end{bmatrix} \quad (E.3)$$

παίρνουμε ότι η Smith–McMillan μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $T(s)$  είναι :

$$\begin{aligned} S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) &= \text{diag} \left[ \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \frac{(s+1)(s+2)^2(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right] \\ &= \text{diag} \left[ \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}, (s+2) \right] \quad (E.4) \quad \square \end{aligned}$$

Όπως στους πολυωνυμικούς πίνακες έτσι και εδώ στους ρητούς πίνακες μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις και συνεπώς και η Smith–McMillan μορφή ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$  είναι πλήρως αναλλοίωτα στοιχεία και αναλλοίωτες μορφές αντίστοιχα της κλάσης ισοδυναμίας που παράγει ένας ρητός πίνακας μέσω της ισοδυναμίας στο  $\mathbb{C}$  ρητών πινάκων. Για τον λόγο αυτό μπορώ να ορίσω ως **αλγεβρική δομή ενός ρητού πίνακα**  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  στο  $\mathbb{C}$  την δομή της Smith–McMillan μορφής στο  $\mathbb{C}$  αυτού του πίνακα της οποίας χαρακτηριστικά στοιχεία αποτελούν τα μηδενικά και οι πόλοι του πίνακα  $T(s)$ .

#### 2.4.2 Περιγραφή ρητών πινάκων ως κλάσμα πολυωνυμικών πινάκων.

Όπως στο σώμα των ρητών συναρτήσεων κάθε ρητή συνάρτηση γράφεται ως κλάσμα πρώτων μεταξύ τους πολυωνύμων, το ίδιο συμβαίνει και στους ρητούς πίνακες. Πιο συγκεκριμένα :

**Πρόταση 2.23** (Rosenbrock 1970, Wolovich 1974) Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ ,  $r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε υπάρχουν μη μοναδικοί πολυωνυμικοί πίνακες  $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ,  $B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και αριστερά πρώτοι (ή  $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  και δεξιά πρώτοι) τέτοιοι ώστε :

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) (= B_2(s) A_2(s)^{-1}) \quad (2.31)$$

Κάθε άλλη τέτοια παραγοντοποίηση με  $\tilde{A}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ,  $\tilde{B}_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και αριστερά πρώτοι (ή  $\tilde{A}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\tilde{B}_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  και δεξιά πρώτοι ) είναι τέτοια ώστε :

$$\tilde{A}_1(s) = U_L(s) A_1(s) \quad \text{και} \quad \tilde{B}_1(s) = U_L(s) B_1(s) \quad (2.32)$$

$$( \tilde{A}_2(s) = A_2(s) U_R(s) \quad \text{και} \quad \tilde{B}_2(s) = B_2(s) U_R(s) ) \quad (2.33)$$

όπου ο  $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. □

**Ορισμός 2.24** (Rosenbrock 1970, Wolovich 1974) Κάθε τέτοια έκφραση ενός ρητού πίνακα  $T(s)$  ονομάζεται **αριστερά (δεξιά) πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση** (Π.Κ.Ε) του  $T(s)$  (*left (right) coprime matrix fraction description (MFD)*).  $\square$

Ο Wolovich (1974) όρισε κάθε  $p \times m$  πολυωνυμικό πίνακα σαν τον  $B_1(s)$  ( $B_2(s)$ ) ως **αριθμητή** (*numerator*) του  $T(s)$  και κάθε  $p \times p$  πολυωνυμικό πίνακα σαν τον  $A_1(s)$  (ή  $m \times m$  πολυωνυμικό πίνακα σαν τον  $A_2(s)$ ) ως **παρονομαστή** (*denominator*) του  $T(s)$ .

Μια σημαντική σχέση μεταξύ των μηδενικών του αριθμητή  $B_1(s)$  ( $B_2(s)$ ) ή του παρονομαστή  $A_1(s)$  ( $A_2(s)$ ) μιας αριστεράς (δεξιάς) πρώτης πολυωνυμικής κλασματικής έκφρασης του  $T(s)$  και των πόλων/μηδενικών του  $T(s)$  είναι η εξής (Rosenbrock 1970, Pugh et.al. 1979) :

$$\Delta\text{ομή των μηδενικών του } T(s) \equiv \Delta\text{ομή των μηδενικών του } B_1(s) \text{ (} B_2(s) \text{) στο } \mathbb{C} \quad (2.34)$$

$$\Delta\text{ομή των πόλων του } T(s) \equiv \Delta\text{ομή των μηδενικών του } A_1(s) \text{ (} A_2(s) \text{) στο } \mathbb{C} \quad (2.35)$$

### 2.4.3. Άλγεβρική δομή ρητών πινάκων στο $s=\infty$ .

Ορίζουμε στο σώμα των ρητών συναρτήσεων  $t(s)=n(s)/d(s)$ ,  $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$  την εξής απεικόνιση  $\delta_\infty : \mathbb{R}(s) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  (Vardulakis et.al. 1982)

$$\delta_\infty(t(s)) = \begin{cases} \deg d(s) - \deg n(s) & t(s) \neq 0 \\ +\infty & t(s) = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Η απεικόνιση  $\delta_\infty(\cdot)$  είναι μια **διακριτή εκτίμηση** (*discrete valuation*) στο  $\mathbb{R}(s)$  (Atiyah M.F. and MacDonald I.G. 1969) και κάθε  $t(s) \in \mathbb{R}(s)$  μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$t(s) = \left[ \frac{1}{s} \right]_{\infty}^{q_\infty} \frac{n_1(s)}{d_1(s)} \quad (2.37)$$

όπου  $q_\infty = \delta_\infty(t(s))$  και  $\deg n_1(s) = \deg d_1(s)$ . Εάν  $q_\infty > 0$  λέμε ότι η  $t(s)$  έχει ένα **μηδενικό** στο  $s=\infty$  (*zero at  $s=\infty$* ) τάξης  $q_\infty$  και εάν  $q_\infty < 0$  λέμε ότι η  $t(s)$  έχει έναν **πόλο** τάξης  $|q_\infty|$  στο

$s=\infty$  (pole at  $s=\infty$ ). Εάν  $t(s) \in \mathbb{R}(s)$  και  $\delta_{\infty}(t(s)) \geq 0$  τότε η  $t(s)$  ονομάζεται **κανονική ρητή συνάρτηση** (proper) και αν η ανισότητα είναι αυστηρή τότε η  $t(s)$  ονομάζεται **αυστηρά ρητή συνάρτηση** στο  $s=\infty$  (strictly proper). Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το σύνολο των κανονικών ρητών συναρτήσεων, το οποίο συμβολίζουμε με  $\mathbb{R}_{pr}(s)$ , είναι ένας ευκλείδιος δακτύλιος. Τα μοναδιαία στοιχεία  $u(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$  είναι κανονικές ρητές συναρτήσεις που δεν περιέχουν μηδενικά και πόλους στο  $s=\infty$  και συνεπώς είναι της μορφής  $u(s) = n(s)/d(s)$  όπου  $\deg n(s) = \deg d(s)$ . Τα μοναδιαία αυτά στοιχεία του  $\mathbb{R}_{pr}(s)$  ονομάζονται **δικαιονικά στοιχεία** (biproper).

Εστω τώρα  $\mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$  το σύνολο των  $p \times m$  ρητών πινάκων με στοιχεία στο  $\mathbb{R}_{pr}(s)$ . Οι πίνακες αυτοί ονομάζονται **κανονικοί ρητοί πίνακες** (proper).

**Ορισμός 2.25** (Vardulakis et.al. 1982) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$ . Ο  $T(s)$  ονομάζεται  **$\mathbb{R}_{pr}(s)$ -αντιστρέψιμος** ( $\mathbb{R}_{pr}(s)$ -unimodular) ή **δικαιονικός** (biproper) εάν και μόνο εάν υπάρχει  $\tilde{T}(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$  τέτοιος ώστε

$$T(s)\tilde{T}(s) = I_p \quad (2.38)$$

ή ισοδύναμα εάν και μόνο εάν οι δύο επόμενες συνθήκες ικανοποιούνται

- 1)  $\lim_{s \rightarrow \infty} T(s) = T_{\infty} \in \mathbb{R}^{p \times p}$
- 2)  $\det T_{\infty} \neq 0$  □

Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και στηλών στον  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ορίζονται κατά τον παρακάτω τρόπο (MacDuffee 1933) :

- 1) εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) ( $\rho_i \longleftrightarrow \rho_j$ )
- 2) πολλαπλασιασμός μιας γραμμής (στήλης) με ένα δικαιονικό στοιχείο  $u(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$  ( $\rho_i \longleftarrow u(s) \rho_i$ )
- 3) πρόσθεση στην γραμμή (στήλη)  $i$  της γραμμής (στήλης)  $j$  επί ένα στοιχείο  $u(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$  ( $\rho_i \longleftarrow \rho_i + \rho_j u(s)$ ).

Αυτές οι στοιχειώδεις πράξεις είναι ισοδύναμες με πολλαπλασιασμό του πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$  από αριστερά (από δεξιά) με στοιχειώδεις δικαιονικούς πίνακες (*elementary biproper matrices*) οι οποίοι προέρχονται από την εφαρμογή αυτών των στοιχειωδών πράξεων στον μοναδιαίο πίνακα  $I_{p(m)}$ .

**Ορισμός 2.26** (Vardulakis et.al. 1982) Δύο ρητοί πίνακες  $T_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και  $T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ονομάζονται **ισοδύναμοι στο  $s=\infty$**  (*equivalent at infinity*), **αριστερά ισοδύναμοι στο  $s=\infty$**  (*left equivalent at infinity*) ή τέλος **δεξιά ισοδύναμοι στο  $s=\infty$**  (*right equivalent at infinity*) εάν υπάρχουν δικαιονικοί πίνακες  $T_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$  και  $T_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε να έχω αντίστοιχα

$$T_L(s)T_1(s)T_R(s) = T_2(s) ; T_L(s)T_1(s) = T_2(s) ; T_1(s)T_R(s) = T_2(s) \quad (2.39) \quad \square$$

Παρατηρούμε μια αντιστοιχία της έννοιας της ισοδυναμίας και των στοιχειωδών πράξεων στο  $\mathbb{C}$  και αυτών στο  $s=\infty$ . Μια ανάλογη αντιστοιχία έχουμε όσον αφορά και την αλγεβρική δομή των ρητών πινάκων στο  $s=\infty$  όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 2.27** (Vardulakis et.al.1982) [**Smith–McMillan μορφή ενός ρητού πίνακα στο  $s=\infty$** ]

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ . Τότε ο πίνακας  $T(s)$  είναι ισοδύναμος στο  $s=\infty$  με τον διαγώνιο πίνακα  $S_{T(s)}^\infty(s)$  ο οποίος έχει την παρακάτω μορφή :

$$S_{T(s)}^\infty(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_\infty^1}, s^{q_\infty^2}, \dots, s^{q_\infty^k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_\infty^{k+1}}}, \frac{1}{s^{\hat{q}_\infty^{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_\infty^r}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (2.40)$$

όπου

$$q_\infty^1 \geq q_\infty^2 \geq \dots \geq q_\infty^k \geq 0 \quad (2.41)$$

$$\hat{q}_\infty^r \geq \hat{q}_\infty^{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_\infty^{k+1} \geq 0 \quad (2.42) \quad \square$$

Εάν ο  $T(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$  τότε  $q_\infty^i = 0, i \in \mathbf{k}$  και ο  $S_{T(s)}^\infty(s)$  είναι ένας κανονικά ρητός πίνακας ο οποίος ονομάζεται **Smith μορφή του  $T(s)$  στο  $s=\infty$** . Διαφορετικά ο  $T(s)$  είναι μη ρητός, οπότε και ο  $S_{T(s)}^\infty(s)$  είναι μη ρητός και ονομάζεται **McMillan μορφή του  $T(s)$  στο  $s=\infty$** .

Εαν  $p_{\infty}$  είναι ο αριθμός των  $q_{\infty}^i > 0$ ,  $i \in k$  τότε λέμε ότι ο  $T(s)$  έχει  $p_{\infty}$  πόλους στο  $s=\infty$  (*poles at infinity*) του κάθε ένα τάξης  $q_{\infty}^i > 0$ . Εαν επίσης είναι  $z_{\infty}$  το πλήθος των  $\hat{q}_{\infty}^i$  με  $\hat{q}_{\infty}^i > 0$   $i=k+1, \dots, r$  τότε λέμε ότι ο  $T(s)$  έχει  $z_{\infty}$  μηδενικά στο  $s=\infty$  (*zeros at infinity*) το κάθε ένα τάξης  $\hat{q}_{\infty}^i > 0$ .

Ενας εύκολος τρόπος υπολογισμού της Smith–McMillan μορφής ενός ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  στο  $s=\infty$  είναι ο εξής (Vardulakis et.al. 1982) :

Εστω  $\xi_i(t)$  η ελάχιστη  $\delta_{\infty}(\cdot)$  ανάμεσα στις  $\delta_{\infty}(\cdot)$  όλων των ελάσσωνων οριζουσών τάξης  $i$ ,  $i \in r$ , τότε

$$\begin{aligned} q_1 &= \xi_0(t) - \xi_1(t) \\ q_2 &= \xi_1(t) - \xi_2(t) \\ &= \dots\dots\dots \\ q_r &= \xi_{r-1}(t) - \xi_r(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

όπου  $\xi_0(t)=0$ . Η Smith–McMillan μορφή του ρητού πίνακα  $T(s)$  θα είναι :

$$\begin{aligned} S_{T(s)}^{\infty}(s) &= \text{block diag} [f_1(s), f_2(s), \dots, f_r(s), \mathbf{0}_{p-r, m-r}] \\ &= \text{block diag} [s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_r}, \mathbf{0}_{p-r, m-r}] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Οι ρητές συναρτήσεις  $f_i(s)$ ,  $i \in r$ , ονομάζονται *αναλλοιώτες ρητές συναρτήσεις του  $T(s)$  στο  $s=\infty$*  (*invariant rational functions at  $s=\infty$* ).

**Παράδειγμα 2.28** Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την Smith–McMillan μορφή στο  $s=\infty$  του ρητού πίνακα

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{(s+2)}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{2 \times 3} \quad (E.1)$$



Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &= \min \{1, +\infty, 1, 1, 1, 0\} = 0 \\ \xi_2(t) &= \min \{2, 2, 1\} = 1\end{aligned}\tag{E.2}$$

και συνεπώς σύμφωνα με την σχέση (2.43) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}q_1 &= \xi_0(t) - \xi_1(t) = 0 - 0 = 0 \\ q_2 &= \xi_1(t) - \xi_2(t) = 0 - 1 = -1\end{aligned}\tag{E.3}$$

Άρα η Smith–McMillan μορφή στο  $s=\infty$  του ρητού πίνακα  $T(s)$  θα είναι η εξής :

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}\tag{E.4} \quad \square$$

Όπως και στην μελέτη των ρητών συναρτήσεων στο  $\mathbb{C}$  έτσι και εδώ οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις στο  $s=\infty$  ενός ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι μοναδικά ορισμένες και συνεπώς και η Smith–McMillan μορφή στο  $s=\infty$  αυτού του πίνακα είναι μοναδική. Μπορώ λοιπόν να ορίσω κατά αντιστοιχία με τις προηγούμενες ενότητες σαν **αλγεβρική δομή ενός ρητού πίνακα στο  $s=\infty$**  την δομή της Smith–McMillan μορφής στο  $s=\infty$  αυτού του πίνακα της οποίας χαρακτηριστικά στοιχεία είναι τα μηδενικά και οι πόλοι στο  $s=\infty$  αυτού του πίνακα ή καλύτερα οι αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις αυτού του πίνακα. Ένα ακόμη στοιχείο που θα πρέπει να τονίσουμε όσον αφορά την ισοδυναμία στο  $s=\infty$  μεταξύ ρητών πινάκων είναι η ιδιότητα της να διατηρεί αναλλοίωτη την αλγεβρική δομή στο  $s=\infty$  των ισοδύναμων ρητών πινάκων.

#### 2.4.4. Ιδιότητες των μηδενικών και των πόλων στο $\mathbb{C}\{w\}$ ρητών πινάκων.

Εστω  $g_{ij}(s) = n_{ij}(s)/d_{ij}(s) \in \mathbb{R}(s)$  ένα στοιχείο ενός ρητού πίνακα  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ο οποίος είναι μη κανονικός (nonproper) ( $\exists n_{ij}(s) : \deg n_{ij}(s) > \deg d_{ij}(s)$ ). Είναι εύκολο χρησιμοποιώντας την ευκλείδεια διαίρεση του αριθμητή  $n_{ij}(s)$  με τον παρονομαστή  $d_{ij}(s)$  να πάρουμε ένα πολυώνυμο  $g_{pol}(s)$  και μια αυστηρά ρητή συνάρτηση  $g_{spr}(s)$  τέτοια ώστε :

$$g(s) = g_{pol}(s) + g_{spr}(s) \quad (2.45)$$

Αυτή η ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στους μη κανονικά ρητούς πίνακες όπου οποιοσδήποτε ρητός πίνακας  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  μπορεί να αναλυθεί ως :

$$G(s) = G_{pol}(s) + G_{spr}(s) \quad (2.46)$$

όπου  $G_{pol}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $G_{spr}(s) \in \mathbb{R}_{spr}(s)^{p \times m}$ . Η αλγεβρική δομή στο  $\mathbb{C}\{w\}$  του πολυωνυμικού  $G_{pol}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  καθώς και του αυστηρά ρητού μέρους  $G_{spr}(s) \in \mathbb{R}_{spr}(s)^{p \times m}$  του ρητού πίνακα  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  συνδέεται στενά με την αλγεβρική δομή του ίδιου του ρητού πίνακα  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  όπως θα δούμε παρακάτω.

**Λήμμα 2.29** (Van Dooren et.al. 1979) Εστω  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ένας ρητός πίνακας και ας υποθέσουμε ότι

$$G(s) = \sum_{i=-q}^{\infty} G_i(s-a)^i \quad (2.47)$$

είναι η Laurent ανάπτυξη του  $G(s)$  στο  $a$ . Θα συμβολίσουμε με  $T_i(G,a)$  τον Toeplitz πίνακα ( $i \geq -q$ ) :

$$T_i(G,a) = \begin{bmatrix} G_{-q} & \cdots & G_{i-1} & G_i \\ 0 & \cdots & G_{i-2} & G_{i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & G_{-q} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Εστω επίσης οι δείκτες τάξης (rank indices)  $\rho_i(G,a)$  οι οποίοι δίνονται από τον τύπο

$$\rho_i(G,a) = \text{rank } T_i - \text{rank } T_{i-1} \quad (2.49)$$

Τότε εαν  $\rho_i(G,a) - \rho_{i-1}(G,a) \neq 0$

- 1) ο ρητός πίνακας  $G(s)$  έχει  $\rho_i(G,a) - \rho_{i-1}(G,a)$  πόλους στο  $s=a$  βαθμού  $|i|$  εαν  $i < 0$ ;
- 2) ο ρητός πίνακας  $G(s)$  έχει  $\rho_i(G,a) - \rho_{i-1}(G,a)$  μηδενικά στο  $s=a$  βαθμού  $i$  εαν  $i > 0$ .  $\square$

**Λήμμα 2.30** (Pugh et.al. 1989) Εστω  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ένας ρητός πίνακας και ας υποθέσουμε ότι

$$G(s) = \sum_{i=-\infty}^q G_i s^i \quad (2.50)$$

είναι η Laurent ανάπτυξη του  $G(s)$  στο  $s=\infty$ . Θα συμβολίσουμε με  $T_i(G,\infty)$  τον Toeplitz πίνακα ( $i \geq -q$ ) :

$$T_i(G,\infty) = \begin{bmatrix} G_q & \cdots & G_{-i+1} & G_{-i} \\ 0 & \cdots & G_{-i+2} & G_{-i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & G_q \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Εστω επίσης οι δείκτες τάξης (rank indices)  $\rho_i(G,\infty)$  οι οποίοι δίνονται από τον τύπο

$$\rho_i(G,\infty) = \text{rank } T_i(G,\infty) - \text{rank } T_{i-1}(G,\infty) \quad (2.52)$$

Τότε εαν  $\rho_i(G,\infty) - \rho_{i-1}(G,\infty) \neq 0$

- 1) ο ρητός πίνακας  $G(s)$  έχει  $\rho_i(G,\infty) - \rho_{i-1}(G,\infty)$  πόλους στο  $s=\infty$  βαθμού  $|i|$  εαν  $i < 0$ ;
- 2) ο ρητός πίνακας  $G(s)$  έχει  $\rho_i(G,\infty) - \rho_{i-1}(G,\infty)$  μηδενικά στο  $s=\infty$  βαθμού  $i$  εαν  $i > 0$ .  $\square$

Τα δύο παραπάνω λήμματα μας δείχνουν έναν εύκολο αλγοριθμικό τρόπο υπολογισμού των πόλων και των μηδενικών στο  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ενός ρητού πίνακα, είναι όμως εξίσου χρήσιμα και στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος

**Θεώρημα 2.31** Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$  και έστω

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (2.53)$$

και

$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_{\omega}^1}, s^{q_{\omega}^2}, \dots, s^{q_{\omega}^k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+1}}}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^r}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (2.54)$$

Ο  $T(s)$  γράφεται ως

$$T(s) = H_{\text{spr}}(s) + H_{\text{pol}}(s) \quad (2.55)$$

όπου  $H_{\text{pol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $H_{\text{spr}}(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$ . Τότε

$$S_{H_{\text{spr}}(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} \left[ \frac{\tilde{\varepsilon}_1(s)}{\tilde{\psi}_1(s)}, \frac{\tilde{\varepsilon}_2(s)}{\tilde{\psi}_2(s)}, \dots, \frac{\tilde{\varepsilon}_r(s)}{\tilde{\psi}_r(s)}, \tilde{\varepsilon}_{r+1}(s), \dots, \tilde{\varepsilon}_{\varphi}(s), \mathbf{0}_{m-\varphi, p-\varphi} \right] \quad (2.56)$$

και

$$S_{H_{\text{pol}}(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_{\omega}^1}, s^{q_{\omega}^2}, \dots, s^{q_{\omega}^k}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{k+1}}}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{\sigma}}}, \mathbf{0}_{p-\sigma, m-\sigma} \right] \quad (2.57)$$

ή με άλλα λόγια

$$\text{δομή των πόλων στο } \mathbb{C} \text{ του } T(s) \equiv \text{δομή των πόλων στο } \mathbb{C} \text{ του } H_{\text{spr}}(s) \quad (2.58)$$

$$\text{δομή πόλων στο } s=\omega \text{ του } T(s) \equiv \text{δομή των πόλων στο } s=\omega \text{ του } H_{\text{pol}}(s) \quad (2.59)$$

### Απόδειξη

Η δομή των πόλων στο  $s=a \in \mathbb{C}$  ενός ρητού πίνακα εξαρτάται άμεσα από την διαφορά των δεικτών τάξεως  $\rho_i(G, a) - \rho_{i-1}(G, a)$  ( $i < 0$ ) όπως είδαμε στο λήμμα 2.29. Ομως οι δείκτες τάξης  $\rho_i(G, a)$  με  $i < 0$  είναι συνάρτηση της τάξεως Toeplitz πινάκων που και αυτοί με τη σειρά τους αποτελούνται από πίνακες της Laurent ανάπτυξης στο  $s=a$  του αυστηρά ρητού μέρους της  $T(s)$ . Παρατηρούμε δηλαδή ότι η δομή των πόλων της  $T(s)$  στο  $s=a$  εξαρτάται μόνο από το αυστηρά ρητό μέρος της  $T(s)$  και γ'αυτό η  $T(s)$  και η  $H_{\text{spr}}(s)$  έχουν την ίδια δομή πόλων στο  $s=a$ .

Η απόδειξη όσον αφορά την δομή των πόλων στο  $s=\omega$  της  $T(s)$  είναι η ίδια με την μόνη διαφορά ότι οι δείκτες τάξεως  $\rho_i(G, \omega)$  με  $i < 0$  στο λήμμα 2.30, τώρα εξαρτώνται μόνο

από το πολυωνυμικό μέρος της  $T(s)$ . Μια άλλη απόδειξη μπορεί κάποιος να βρεί στο βιβλίο του A.I. Vardulakis (1991).  $\square$

**Σημείωση** Μια άλλη απόδειξη στο πρώτο σκέλος του θεωρήματος μπορεί να δοθεί εάν θεωρήσω μια δεξιά πρώτη (right coprime MFD) πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$

$$T(s) = N(s)D^{-1}(s) \quad (2.60)$$

οπότε ο πολυωνυμικός πίνακας  $[N^T(s), D^T(s)]^T$  δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ . Είναι τότε εύκολο να δει κανείς ότι η δεξιά πολυωνυμική κλασματική έκφραση

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} D^{-1}(s) \quad (2.61)$$

είναι μια δεξιά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $[T^T(s) \ I_m]^T$  και συνεπώς η δομή των πόλων του  $[T^T(s) \ I_m]^T$  στο  $\mathbb{C}$  είναι η ίδια με την δομή των μηδενικών στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $D(s)$ , η οποία από την σχέση (2.35) είναι ίδια με την δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  του  $T(s)$ . Ομοια η δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  του πίνακα  $[H_{\text{spr}}(s)^T \ I_m]^T$  ταυτίζεται με την δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  του  $H_{\text{spr}}(s)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{bmatrix} I_p & -H_{\text{pol}}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\text{spr}}(s) \\ I_m \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

και συνεπώς

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ I_m \end{bmatrix} \underset{\text{στο } \mathbb{C}}{\overset{\text{ισοδύναμοι}}{\sim}} \begin{bmatrix} H_{\text{spr}}(s) \\ I_m \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

που σημαίνει ότι οι πίνακες  $[T^T(s) \ I_m]^T$  και  $[H_{\text{spr}}^T(s) \ I_m]^T$  έχουν την ίδια δομή πόλων στο  $\mathbb{C}$  ή ισοδύναμα ότι οι πίνακες  $T(s)$  και  $H_{\text{spr}}(s)$  έχουν την ίδια δομή πόλων στο  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Παρατήρηση 2.32** Μια πιο αναλυτική μορφή της Smith–McMillan μορφής ενός ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι η εξής :

$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_{\omega}^1}, s^{q_{\omega}^2}, \dots, s^{q_{\omega}^{\sigma}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-\sigma}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+1}}}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^r}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (2.64)$$

Επίσης ο ρητός πίνακας  $T(s)$  μπορεί να αναλυθεί ως

$$T(s) = H_{\text{spr}}(s) + H_0 + H_{\text{spol}}(s) \quad (2.65)$$

όπου  $H_{\text{spol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι ανστηρά πολυωνυμικός πίνακας,  $H_0 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $H_{\text{spr}}(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$  και  $H_{\text{pol}}(s) = H_0 + H_{\text{spol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Μπορεί να δειχθεί βάσει του ίδιου σκεπτικού της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος ότι

$$S_{H_{\text{spol}}(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_{\omega}^1}, s^{q_{\omega}^2}, \dots, s^{q_{\omega}^{\sigma}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\beta-\sigma}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{\beta+1}}}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{\beta+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{\zeta}}}, \mathbf{0}_{p-\zeta, m-\zeta} \right] \quad (2.66)$$

με  $\beta$  όχι αναγκαστικά ίσο με  $k$ , ότι δηλαδή οι μονάδες δεν διατηρούνται όσον αφορά την δομή στο  $T(s)$  και  $H_{\text{spol}}(s)$ . Έχουμε όμως :

$$S_{H_{\text{pol}}(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_{\omega}^1}, s^{q_{\omega}^2}, \dots, s^{q_{\omega}^{\sigma}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-\sigma}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{k+1}}}, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\tilde{q}_{\omega}^{\vartheta}}}, \mathbf{0}_{p-\vartheta, m-\vartheta} \right] \quad (2.67)$$

ότι δηλαδή οι μονάδες διατηρούνται όσον αφορά την δομή στον  $T(s)$  και στον  $H_{\text{pol}}(s)$ .  $\square$

**Ορισμός 2.33** Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$  ( $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$ ). Ορίζουμε ως **δεξιά (αριστερά) αντίστροφο πίνακα** (*right (left) inverse*) του  $T(s)$  τον ρητό εκείνο πίνακα  $\tilde{T}(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times p}$  με  $m \geq p$  ( $\tilde{T}(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times p}$  με  $m \leq p$ ) ο οποίος είναι τέτοιος ώστε

$$T(s)\tilde{T}(s) = I_p \quad (\tilde{T}(s)T(s) = I_m) \quad (2.68) \quad \square$$

Ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην περιγραφή των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου παίζουν οι τετράγωνοι ρητοί πίνακες με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, και για τον λόγο αυτό παρουσιάζουμε εδώ μερικές ιδιότητες αυτού του είδους των πινάκων.

**Θεώρημα 2.34** (Pugh et.al. 1979, Vardulakis 1991) Έστω  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times p}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} G(s) = p$ . Η δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  (στο  $s = \infty$ ) του ρητού πίνακα  $G(s)$  ταυτίζεται με την δομή των μηδενικών στο  $\mathbb{C}$  (στο  $s = \infty$ ) του  $G^{-1}(s)$  καθώς και η δομή των μηδενικών στο  $\mathbb{C}$  (στο  $s = \infty$ ) του ρητού πίνακα  $G(s)$  ταυτίζεται με την δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  (στο  $s = \infty$ ) του  $G^{-1}(s)$ .  $\square$

**Θεώρημα 2.35** (Vardulakis 1991) Έστω  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times p}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} G(s) = p$ . Τότε

$$\begin{aligned} & \{\text{το συνολικό πλήθος των μηδενικών του } G(s) \text{ στο } \mathbb{C}U\{\infty\}\} \equiv \\ & \{\text{το συνολικό πλήθος των πόλων του } G(s) \text{ στο } \mathbb{C}U\{\infty\}\} \equiv \delta_M(G(s)) \end{aligned} \quad (2.69)$$

όπου στο συνολικό πλήθος συμπεριλαμβάνεται και η τάξη των πόλων/μηδενικών του  $G(s)$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  και  $\delta_M(G(s))$  είναι ο McMillan βαθμός του  $G(s)$  (δες κεφάλαιο 2.6).  $\square$

### 2.5. Ο ελάχιστος βαθμός ρητών πινάκων.

Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και

$$T(s) = A_1^{-1}(s)B_1(s) (= B_2(s)A_2^{-1}(s)) \quad (2.70)$$

είναι αντίστοιχα μια αριστερά (δεξιά) πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$ .

**Ορισμός 2.36** (Rosenbrock 1970) Ο ελάχιστος βαθμός (*least order*) του  $T(s)$  συμβολίζεται  $\nu(T(s))$  και ορίζεται ως

$$\nu(T(s)) := \deg |A_1(s)| (= \deg |A_2(s)|) \quad (2.71) \quad \square$$

**Πρόταση 2.37** (Rosenbrock 1970) Ο ελάχιστος βαθμός  $\nu(T(s))$  του  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  δίνεται από τον βαθμό του γινομένου των πολυωνύμων  $\psi_i(s) \in \mathbb{R}$ ,  $r = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s)$  που βρίσκονται στους παρονομαστές των αναλλοιώτων πολυωνύμων της Smith–McMillan μορφής  $S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  του  $T(s)$ , (δες (2.26)) είναι δηλαδή

$$\nu(T(s)) = \deg \left[ \prod_{i=1}^r \psi_i(s) \right] \quad (2.72) \quad \square$$

**Σημείωση** Είναι εύκολο να δει κανείς βάσει του θεωρήματος 2.31 ότι αν έχω έναν ρητό πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ο οποίος αναλύεται ως

$$T(s) = T_{\text{spr}}(s) + T_{\text{pol}}(s) \quad (2.73)$$

όπου  $T_{\text{spr}}(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$  και  $T_{\text{pol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ , τότε

$$\nu(T(s)) = \nu(T_{\text{spr}}(s)) \quad (2.74) \quad \square$$

Ένας πρακτικός τρόπος υπολογισμού του ελαχίστου βαθμού ενός ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι πρώτα να υπολογίσουμε όλες τις ορίζουσες όλων των τάξεων  $1, 2, \dots, \min(p, m)$  του  $T(s)$  και στη συνέχεια να υπολογίσουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο  $\phi(s)$  των παρονομαστών όλων αυτών των οριζουσών. Τότε  $\nu(T(s)) = \deg \phi(s)$ .

## 2.6. Ο McMillan βαθμός ενός ρητού πίνακα.

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ο οποίος αναλύεται ως

$$T(s) = T_{\text{spr}}(s) + T_{\text{pol}}(s) \quad (2.75)$$

όπου  $T_{\text{spr}}(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$  είναι το αυστηρά ρητό μέρος του  $T(s)$  και  $T_{\text{pol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι το πολυωνυμικό μέρος του  $T(s)$ .

**Ορισμός 2.38** (Kalman 1965, Rosenbrock 1970) Ο McMillan βαθμός (*McMillan degree*) του  $T(s)$  συμβολίζεται  $\delta_M(T(s))$  και ορίζεται ως

$$\delta_M(T(s)) = \nu(T_{\text{spr}}(s)) + \nu(T_{\text{pol}}(\frac{1}{w})) \quad (2.76) \quad \square$$

**Πρόταση 2.39** (Vardulakis 1991) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$  και έστω

$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_{\omega}^1}, s^{q_{\omega}^2}, \dots, s^{q_{\omega}^k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+1}}}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^r}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (2.77)$$

είναι η Smith–McMillan μορφή στο  $s=\omega$  του  $T(s)$ . Τότε ο McMillan βαθμός  $\delta_M(T(s))$  του  $T(s)$  είναι ίσος με τον μεγαλύτερο βαθμό από όλους τους βαθμούς όλων των οριζουσών του  $T(s)$  όλων των τάξεων. Ο McMillan βαθμός  $\delta_M(T(s))$  του  $T(s)$  είναι επίσης ίσος με



$$\delta_M(T(s)) = \sum_{i=1}^k q_{\omega}^i(T(s)) \quad (2.78)$$

δηλαδή ο McMillan βαθμός  $\delta_M(T)$  του  $T(s)$  είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των πόλων του  $T(s)$  στο  $s=\omega$ .  $\square$

Από τον ορισμό 2.38, την πρόταση 2.37 και τους τύπους (2.74) και (2.78) έχουμε για κάθε ρητό πίνακα ότι

$$\begin{aligned} \delta_M(T(s)) &= \nu(T_{\text{spr}}(s)) + \nu(T_{\text{pol}}(\frac{1}{W})) = \nu(T(s)) + \delta_M(T_{\text{pol}}(s)) \\ &= \deg \left[ \prod_{i=1}^r \psi_i(s) \right] + \sum_{i=1}^k q_{\omega}^i(T(s)) \end{aligned} \quad (2.79)$$

είναι δηλαδή ίσος με τον συνολικό αριθμό των πόλων στο  $\mathbb{C} \cup \{\omega\}$  του  $T(s)$ .

**Πρόταση 2.40** (Barnett 1971, Pugh 1976) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r \leq \min(p, m)$  και έστω

$$T(s) = T_0 + T_1 s + \dots + T_q s^q \quad (2.80)$$

τότε

$$\delta_M(T(s)) = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_q & 0 & \dots & 0 \\ T_{q-1} & T_q & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_1 & T_2 & \dots & T_q \end{bmatrix} \quad (2.81) \quad \square$$

### 2.7. Αλγεβρική δομή ιδιόμορφων πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων (singular pencils).

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την αλγεβρική δομή πολυωνυμικών πινάκων πρώτου βαθμού (singular pencils), εκείνων δηλαδή που έχουν την εξής μορφή

$$A(s) = A_0 + A_1 s \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (2.82)$$

Οι πολυωνυμικοί πίνακες γενικά χωρίζονται σε κανονικούς και ιδιόμορφους όπως θα δούμε στον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 2.41** Ένας πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) = A_0 + A_1s + \dots + A_q s^q \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ονομάζεται **κανονικός** (regular) εαν

- 1) Οι πίνακες  $A_i \in \mathbb{R}$  είναι τετραγωνικοί πίνακες της ίδιας τάξης  $p$  ( $p=m$ ).
- 2) Η ορίζουσα του δεν ταυτίζεται με το μηδέν ( $\det |A(s)| \neq 0$ ).

σε άλλη περίπτωση εαν δηλαδή α)  $p \neq m$  ή β)  $p=m$  και  $\det |A(s)| \equiv 0$ , τότε ο πολυωνυμικός αυτός πίνακας πρώτου βαθμού ονομάζεται **ιδιόμορφος** (singular).  $\square$

Κατά αντιστοιχία μπορούμε να ορίσουμε ως **κανονικούς** (regular) ρητούς πίνακες τους τετράγωνους ρητούς πίνακες με ορίζουσα διάφορη του μηδενός ενώ ως **ιδιόμορφους** (singular) ρητούς πίνακες τους μη τετράγωνους ρητούς πίνακες ή τους τετράγωνους πίνακες με ορίζουσα εκ ταυτότητας ίση με το μηδέν.

Ο μετασχηματισμός που έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την αλγεβρική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  πολυωνυμικών πινάκων δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 2.42** Δύο πολυωνυμικοί πίνακες  $A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ονομάζονται **αυστηρά ισοδύναμοι** (strictly equivalent) εαν υπάρχουν πίνακες  $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$  και  $N \in \mathbb{R}^{m \times m}$  με  $\det M \neq 0$  και  $\det N \neq 0$  τέτοιοι ώστε :

$$A_1(s) = M A_2(s) N \quad (2.83) \quad \square$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε εδώ ότι το είδος αυτής της ισοδυναμίας είναι ταυτόχρονα υποπερίπτωση της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας και της ισοδυναμίας στο  $s=\infty$ .

**Θεώρημα 2.43** (Kronecker 1890, Gantmacher 1959)

Κάθε ιδιόμορφος πολυωνυμικός πίνακας πρώτου βαθμού είναι αυστηρά ισοδύναμος με μια κανονική μορφή ενός άλλου πολυωνυμικού πίνακα πρώτου βαθμού η οποία είναι η εξής :

$$M (A_0 + A_1s) N = \text{block diag} [0_{h,g}, L_\epsilon(s), L_\eta(s), sI_n + J, I_\mu + sJ_\omega] = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1s = \hat{P}(s) \quad (2.84)$$

όπου

$$1) \quad J = \text{block diag}[J_{11}, J_{12}, \dots, J_{df}] \quad (2.85)$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots \lambda_j \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \sigma_{ij} \\ \downarrow \end{matrix} \quad i \in f \quad (2.86)$$

$$2) \quad J_{\omega} = \text{block diag}[J_{\omega_1}, J_{\omega_2}, \dots, J_{\omega_{r-k}}] \quad (2.87)$$

$$J_{\omega_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \hat{q}_{\omega_i} + 1 \\ \downarrow \end{matrix} \quad i \in r-k \quad (2.88)$$

$$3) \quad L_{\epsilon}(s) = \text{block diag}[L_{\epsilon_{g+1}}(s), L_{\epsilon_{g+2}}(s), \dots, L_{\epsilon_{m-r}}(s)] \quad (2.89)$$

$$L_{\epsilon_i}(s) = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & s & 1 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots s & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\epsilon_i \times (\epsilon_i + 1)}[s] \quad (2.90)$$

$$4) \quad L_{\eta}(s) = \text{block diag}[L_{\eta_{h+1}}(s), L_{\eta_{h+2}}(s), \dots, L_{\eta_{p-r}}(s)] \quad (2.91)$$

$$L_{\eta_i}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \cdots 0 \\ 1 & s & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\eta_i + 1) \times \eta_i}[s] \quad (2.92)$$

όπου  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_g = 0 < \epsilon_{g+1} \leq \epsilon_{g+2} \leq \dots \leq \epsilon_{m-r}$  είναι οι ελάχιστοι δείκτες στηλών και  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_h = 0 < \eta_{h+1} \leq \eta_{h+2} \leq \dots \leq \eta_{p-r}$  είναι οι ελάχιστοι δείκτες γραμμών του  $A_0 + A_1 s$ ,

$$S_{A_0 + A_1 s}^{\mathbb{C}} = \text{block diag}[\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r-d}, (s-\lambda_1)^{\sigma_{11}} \cdots (s-\lambda_f)^{\sigma_{1f}}, \dots, (s-\lambda_1)^{\sigma_{d1}} \cdots (s-\lambda_f)^{\sigma_{df}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r}] \quad (2.93)$$

με  $0 < \sigma_{11} \leq \sigma_{21} \leq \dots \leq \sigma_{d1}, \dots, 0 < \sigma_{1f} \leq \sigma_{2f} \leq \dots \leq \sigma_{df}$  είναι η Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  του  $A_0 + A_1s$  και

$$S_{A_0 + A_1s}^{\omega} = \text{block diag} \left[ sI_k, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+1}}}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\omega}^r}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (2.94)$$

με  $\hat{q}_{\omega}^r \geq \hat{q}_{\omega}^{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{\omega}^{k+1} \geq 0$ , η Smith–McMillan μορφή στο  $s=\omega$  του  $A_0 + A_1s$ . Αυτή η μορφή (2.84) ονομάζεται **Kronecker κανονική μορφή** (*Kronecker canonical form*) ενός πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα.  $\square$

Ας σημειωθεί ότι στην περίπτωση κανονικών πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων δεν έχουμε στην Kronecker κανονική μορφή, εμφάνιση των πινάκων  $\{0_{h,g}, L_{\varepsilon}(s), L_{\eta}(s)\}$  και η κανονική αυτή μορφή ονομάζεται **Weierstrass κανονική μορφή** (*Weierstrass canonical form*). Οι πίνακες  $\{0_{h,g}, L_{\varepsilon}(s), L_{\eta}(s)\}$  είναι αυτοί που δίνουν την ποικίλη αλγεβρική δομή στους ιδιόμορφους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες. Επίσης ο όρος  $I_{\mu} - sJ_{\omega}$  δεν εμφανίζεται στους ομαλούς (ορισμός 2.8) πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες. Ένα ανοικτό ερώτημα είναι εάν υπάρχει μια αντίστοιχη Kronecker κανονική μορφή για πολυωνυμικούς και ακόμη πιο γενικά για ρητούς πίνακες. Το ερώτημα αυτό ερχόμαστε να απαντήσουμε μερικώς, στο κύριο μέρος της διδακτορικής διατριβής (δες Θεώρημα 5.40).

Παρακάτω αναφέρουμε τον ορισμό των ελαχίστων δεικτών στηλών (*column minimal indices*) και γραμμών (*row minimal indices*) που αναφέραμε προηγουμένως χωρίς να εξηγήσουμε.

**Ορισμός 2.44** Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ένας ιδιόμορφος ρητός πίνακας. Εάν  $p < m$  ή  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r \leq \min(p, m)$  τότε η εξίσωση :

$$A(s) \tilde{x}(s) = 0 \quad (2.95)$$

έχει ως λύση πολυωνυμικά διανύσματα  $\tilde{x}(s)$ . Ας ονομάσουμε βαθμό μιας λύσης του παραπάνου συστήματος τον μεγαλύτερο βαθμό όλων των στοιχείων ενός τέτοιου πολυωνυμικού διανύσματος  $\tilde{x}(s)$ . Μεταξύ των λύσεων της (2.95) υπάρχει τουλάχιστο μια

λύση  $\tilde{x}_1(s)$  με τον ελάχιστο βαθμό  $\lambda_1$ . Μια δεύτερη λύση  $\tilde{x}_2(s)$  θα είναι γραμμικώς εξαρτημένη της  $\tilde{x}_1(s)$  εαν υπάρχουν πολυώνυμα  $\alpha(s)$  και  $\beta(s)$  τέτοια ώστε :

$$\alpha(s)\tilde{x}_1(s) + \beta(s)\tilde{x}_2(s) = 0 \quad (2.96)$$

Εαν δεν υπάρχουν τέτοια πολυώνυμα  $\alpha(s)$  και  $\beta(s)$  τότε τα  $\tilde{x}_1(s)$  και  $\tilde{x}_2(s)$  ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητα. Μεταξύ όλων των λύσεων που είναι γραμμικά ανεξάρτητες της  $\tilde{x}_1(s)$  υπάρχει τουλάχιστον μια  $\tilde{x}_2(s)$  με τον μικρότερο βαθμό έστω  $\lambda_2$ . Με την ίδια διαδικασία μπορώ να βρώ μια σειρά από γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις  $\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s), \dots, \tilde{x}_{m-r}(s)$  της (2.95) εως ότου να μην υπάρχει πλέον άλλη γραμμικά ανεξάρτητη λύση των προηγούμενων. Το σύνολο των βαθμών  $\{\lambda_i, i \in m-r\}$  ονομάζεται σύνολο των ελαχίστων δεικτών στηλών (*column minimal indices*).  $\square$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορώ να ορίσω το σύνολο των ελαχίστων δεικτών γραμμών (*row minimal indices*) αν λάβω υπόψη μου τις πολυωνυμικές λύσεις της παρακάτω εξίσωσης :

$$\tilde{v}(s) A(s) = 0 \quad (2.97)$$

Παρατηρώ δηλαδή ότι οι ελάχιστοι δείκτες γραμμών και στηλών χαρακτηρίζουν αντίστοιχα την αριστερή και δεξιά μηδενική δομή (*left and right null space structure*) του ιδιόμορφου ρητού πίνακα  $A(s)$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι ενώ η δομή των καινουρικών ρητών πινάκων χαρακτηρίζεται μόνο από την αλγεβρική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ , η δομή των ιδιόμορφων ρητών πινάκων χαρακτηρίζεται από την αλγεβρική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς την αριστερή και δεξιά μηδενική δομή τους.

Το επόμενο θεώρημα (Gantmacher 1959) μας δείνει την σχέση μεταξύ δύο πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών πινάκων της ίδιας διάστασης.

**Θεώρημα 2.45** Δύο πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες  $A_0 + A_1s \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1s \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι αυστηρά ισοδύναμοι εαν και μόνο εαν έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες (αριστερούς και δεξιούς) και την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ .  $\square$

## 2.8 Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό που αποτελεί και μια απαραίτητη εισαγωγή για το υπόλοιπο μέρος της διατριβής κάναμε μια σύντομη εισαγωγή στην θεωρία των απεικονίσεων, των σχέσεων ισοδυναμίας καθώς και στην αλγεβρική δομή κανονικών και ιδιόμορφων ρητών και πολυωνυμικών πινάκων.

Παρατηρήσαμε ότι η δομή κανονικών ρητών πινάκων χαρακτηρίζεται από την αλγεβρική δομή τους στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$  σε αντίθεση με τους ιδιόμορφους ρητούς πίνακες που η δομή τους εξαρτάται και από την αλγεβρική δομή στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$  αλλά και από την αριστερή και δεξιά μηδενική δομή τους. Είδαμε ότι υπάρχουν είδη ισοδυναμίας που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν την αλγεβρική δομή ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$  ή στο  $\omega$ . Μειονεκτήματα των ισοδυναμιών αυτών είναι α) ότι διατηρούν αναλλοίωτη την αλγεβρική δομή μόνο στο  $\mathbb{C}$  ή μόνο στο  $\omega$  και β) ότι συνδέουν ρητούς πίνακες μόνο των ίδιων διαστάσεων. Ένα εύλογο λοιπόν ερώτημα που γεννιέται είναι εάν υπάρχουν άλλα είδη ισοδυναμίας που δεν έχουν τα παραπάνω δύο μειονεκτήματα. Στο επόμενο κεφάλαιο θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή πάνω στην προσπάθεια που έγινε ως τώρα για να λυθεί το πρόβλημα της διατήρησης της μηδενικής δομής στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$  πολυωνυμικών πινάκων όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων. Στην συνέχεια θα προτείνουμε γενικεύσεις των θεωριών αυτών για την περίπτωση των ρητών πινάκων.

Τέλος στην ενότητα 2.7 παρατηρήσαμε ότι οι ιδιόμορφοι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες έχουν μια κανονική μορφή, την Kronecker κανονική μορφή. Ένα ερώτημα που γεννιέται, το οποίο και θα απαντήσουμε στο κεφάλαιο 5, είναι εάν υπάρχει μια αντίστοιχη κανονική μορφή για ιδιόμορφους πολυωνυμικούς ή ακόμη πιο γενικά για ιδιόμορφους ρητούς πίνακες. Θα θέλαμε να τονίσουμε ότι το κεφάλαιο αυτό προσπαθεί να δώσει μια εισαγωγική μελέτη στην δομή ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$ . Για μια πιο εκτενέστερη μελέτη θα μπορούσε ο αναγνώστης αυτής της διατριβής να απευθυνθεί κατά κύριο λόγο στο βιβλίο του A.I.Vardoulakis (1991) καθώς και στην σχετική ξένη βιβλιογραφία που παραθέτουμε στην συνέχεια.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [Λ1] Λάκκη Κ., *Γραμμική Αλγεβρα*, 1984, Θεσσαλονίκη.
- [Λ2] Λάκκη Κ., *Αλγεβρα*, 1984, Θεσσαλονίκη.
- [Μ1] Μποζαμπαλίδη Σ.Μ., *Γραμμική Αλγεβρα*, 1984, Θεσσαλονίκη.
- [Ψ1] Ψωμόπουλος Ε., *Αλγεβρα*, 1984, Θεσσαλονίκη.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [A1] Atiyah M.F. and MacDonald I.G., 1969, *Introduction to Commutative Algebra*. Reading, MA: Addison–Wesley.
- [B1] Barnett S., 1971, *Matrices in Control Theory*, London : Van Nostrand Reinhold.
- [B2] Bhoot S.S., 1986, *An Investigation of the Effect of Complete Equivalence on Singular Matrix Pencils*, M.Sc., Loughborough University of Technology.
- [C1] Callier F.M. and Desoer C.A., 1982, *Multivariable Feedback Systems*. Springer–Verlag, New York.
- [G1] Gantmacher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*. New York : Chelsea.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall.
- [K2] Kalman R.E., 1965, Irreducible realizations and the degree of a rational matrix., *SIAM J. Appl. Math.*, **13**, 520–544.
- [K3] Kronecker L., 1890, *Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen*, S.–B. Akad., Berlin 763–76.
- [M1] MacDuffe C.C., 1946, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Co., NY.
- [M2] McMillan B., 1952, Introduction to formal realization theory., *Bell Syst. Tech. J.*, **31**, 217–279, 541–600.
- [P1] Pugh A.C. , 1976, The McMillan degree of a polynomial system matrix., *Int. J. Control.*, **24**, 129–135.

- [P2] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, On the zeros and poles of a rational matrix., *Int. J. Control*, **30**, 213–226.
- [P3] Pugh A.C., Jones E.R.L., Demianczuk O. and Hayton G.E., 1989, Infinite-frequency structure and a certain matrix Laurent expansion., *Int.J.Control*, **50**, 1793–1805.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State Space and Multivariable Theory*, Nelson, London.
- [V1] Van Dooren P.M., Dewilde P. and Vandewalle J., 1979, On the determination of the Smith–McMillan form of a rational matrix from its Laurent expansion., *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS–26**, 180–189.
- [V2] Vardulakis A.I.G. , Limebeer D.J.N. and Karcanias N., 1982, Structure and Smith–McMillan form of a rational matrix at infinity., *Int.J.Control*, **35**, 701–725.
- [V3] Vardulakis A.I.G. and Karcanias N., 1983, Relations between strict equivalence invariants and structure at infinity of matrix pencils., *IEEE Transactions on Autom.Control*, **AC–28**, 514–516.
- [V4] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods*, Wiley, Chichester.
- [V5] Verghese G.C., 1978, *Infinite-Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems.*, Ph.D.Thesis, Stanford University.
- [W1] Walker B.W., 1988, *Equivalence Transformations for Linear Systems.*, Ph.D. Thesis, Hull University.
- [W2] Wolovitch W.A., 1974, *Linear Multivariable Systems.*, Springer-Verlag, NY.



Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

## ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

- 3.1 Εισαγωγή.
- 3.2 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$ .
- 3.3 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο  $s=\infty$ .
- 3.4 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ .
- 3.5 Περίληψη.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 3.1 Εισαγωγή

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα που απασχόλησε την επιστημονική κοινότητα τα τελευταία χρόνια (Gantmacher 1959, Pugh and Shelton 1978, Kailath 1980, Smith 1981, Vardulakis *et al.* 1982, Verghese 1979, Walker 1988) ήταν η εύρεση μετασχηματισμών ρητών πινάκων, όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων, που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$ . Το πρόβλημα αυτό όπως θα δούμε και στα κεφάλαια 4 και 9 έχει μεγάλες εφαρμογές στην μελέτη της μηδενικής δομής συναρτήσεων μεταφοράς έπειτα από ανάδραση εξόδου καθώς και στους μετασχηματισμούς συστημάτων. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει την εξέλιξη των μέχρι τώρα γνωστών μετασχηματισμών μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή είτε στο  $\mathbb{C}$ , είτε στο  $s=\omega$ , είτε στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$ . Μια γενίκευση όλων αυτών των γνωστών μετασχηματισμών, για την γενική κατηγορία των ρητών πινάκων, επιτυγχάνεται στην ενότητα 3.4 με τους προτεινόμενους μετασχηματισμούς της ισχυρής, της πολυωνυμικής και τέλος της ρητής ισοδυναμίας ρητών πινάκων.

### 3.2 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}$ .

Θεωρείστε ως  $\mathcal{P}_0(p,m)$  το σύνολο των  $(r+p) \times (r+m)$  ρητών πινάκων, όπου το  $r$  είναι ένας ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του  $\max(-p, -m)$ . Εστω  $P_i(s) \in \mathcal{P}_0(p,m)$ ,  $i=1,2$  και υποθέστε ότι υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  κατάλληλων διαστάσεων τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (3.1)$$

ή ισοδύναμα

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Η ποικιλία των ισοδύναμων μετασχηματισμών της μορφής (3.2) που κρατάει αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  των ρητών πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ποικίλλει από την φύση των πινάκων  $M(s)$  και  $N(s)$  καθώς και από τις συνθήκες που ικανοποιούν οι σύνθετοι πίνακες :

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

**Ορισμός 3.1** (Gantmacher 1959) Όταν οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  είναι σταθεροί και αντιστρέψιμοι τότε οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  που συνδέονται διαμέσου της (3.2) ονομάζονται **αυστηρά ισοδύναμοι** (*strictly equivalent (s.e.)*).  $\square$

Η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς και οι ελάχιστοι δείκτες γραμμών και στηλών των ρητών πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$ , παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από τον μετασχηματισμό της αυστηρής ισοδυναμίας.

**Ορισμός 3.2** (Rosenbrock 1970) Όταν οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  είναι αντιστρέψιμοι (*unimodular*), τότε οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  που συνδέονται διαμέσου της (3.2) ονομάζονται **αντιστρέψιμα ισοδύναμοι** (*unimodular equivalent (u.e.)*).  $\square$

Ο μετασχηματισμός της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας διατηρεί αναλλοίωτη όπως είδαμε και στο κεφ. 2.3.2 την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  των ρητών πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$ . Ο μετασχηματισμός όμως αυτός έχει ένα μειονέκτημα. Το μειονέκτημα αυτό είναι ότι συνδέει ρητούς πίνακες ιδίων διαστάσεων. Μια λύση, στην ειδική περίπτωση που οι πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι πολυωνυμικοί, έδωσαν οι Pugh and Shelton (1978) καθώς και ο Smith (1981) με τον παρακάτω μετασχηματισμό :

**Ορισμός 3.3** Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0[p,m] \times \mathcal{P}_0[p,m]$ . Οι  $P_1(s), P_2(s)$  που συνδέονται διαμέσου του μετασχηματισμού (3.2) θα ονομάζονται γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (*extended unimodular equivalent (e.u.e.)*) εάν οι σύνθετοι πολυωνυμικοί πίνακες

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

- α) έχουν πλήρη τάξη (*full normal rank*),
- β) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ .

□

Οι πιο σημαντικές ιδιότητες της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας δίνονται από το παρακάτω :

**Λήμμα 3.4** (Pugh & Shelton 1978, Smith 1981)

- α) Η γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathcal{P}_0[p,m]$ .
- β) Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης (*normal rank defect*).

□

Τον μετασχηματισμό της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας που εφαρμόζεται στους πολυωνυμικούς πίνακες ερχόμαστε να εφαρμόσουμε και στους ρητούς πίνακες. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε :

**Ορισμός 3.5** (Karampetakis) Εστω δύο πίνακες  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$ . Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ονομάζονται *γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι* (*extended polynomial equivalent*) εάν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  καταλλήλων διαστάσεων τέτοιοι ώστε :

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

όπου οι σύνθετοι πίνακες :

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

α) έχουν πλήρη τάξη,

β) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ . □

**Λήμμα 3.6** Εστω  $P(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $p \leq m$  ( $m \leq p$ ) ο οποίος έχει πλήρη τάξη. Τότε ο  $P(s)$  έχει ως δεξιά αντίστροφο (αριστερά αντίστροφο) έναν πολυωνυμικό πίνακα εάν και μόνο εάν δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ .

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Εστω ότι ο  $P(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ . Τότε από θεώρημα 2.19, υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P(s) N(s) = \left[ \text{diag} \left[ \frac{1}{\psi_1(s)}, \frac{1}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{1}{\psi_p(s)} \right], \mathbf{0}_{p, m-p} \right] \quad (3.7)$$

Παρατηρούμε ότι :

$$M(s) P(s) N(s) \begin{bmatrix} I_p \\ \mathbf{0}_{m-p, p} \end{bmatrix} \text{diag}(\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_p(s)) = I_p \Rightarrow$$

$$P(s) N(s) \begin{bmatrix} I_p \\ \mathbf{0}_{m-p, p} \end{bmatrix} \text{diag}(\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_p(s)) = M^{-1}(s) \Rightarrow$$

$$P(s) \left\{ N(s) \begin{bmatrix} I_p \\ \mathbf{0}_{m-p, p} \end{bmatrix} \text{diag}(\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_p(s)) M(s) \right\} = I_p \quad (3.8)$$

και συνεπώς ο πίνακας :

$$\hat{P}(s) = N(s) \begin{bmatrix} I_p & \\ & 0_{m-p,p} \end{bmatrix} \text{diag}(\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_p(s)) M(s) \quad (3.9)$$

ο οποίος είναι πολυωνυμικός λόγω του ότι είναι γινόμενο πολυωνυμικών πινάκων, είναι ο δεξιά αντίστροφος πίνακας του  $P(s)$ .

( $\Leftrightarrow$ ) Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο ρητός πίνακας  $P(s)$  έχει ως δεξιά αντίστροφο έναν πολυωνυμικό πίνακα  $\hat{P}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times p}$  και συνεπώς :

$$P(s)\hat{P}(s) = I_p \quad (3.10)$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι ο ρητός πίνακας  $P(s)$  έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και συνεπώς υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P(s) N(s) = \left[ \text{diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_p(s)}{\psi_p(s)} \right], \mathbf{0}_{p,m-p} \right] \quad (3.11)$$

Τότε από την (3.10) και (3.11) έχουμε ότι :

$$M^{-1}(s) \left( \left[ \text{diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_p(s)}{\psi_p(s)} \right], \mathbf{0}_{p,m-p} \right] \right) N^{-1}(s) \hat{P}(s) = I_p \Rightarrow$$

$$\left[ \text{diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_p(s)}{\psi_p(s)} \right], \mathbf{0}_{p,m-p} \right] N^{-1}(s) \hat{P}(s) = M(s) \quad (3.12)$$

Εαν χωρίσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα  $N^{-1}(s)\hat{P}(s)$  έτσι ώστε :

$$N^{-1}(s)\hat{P}(s) = \begin{bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

τότε από (3.12) και (3.13) θα πάρουμε ότι :

$$\text{diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_p(s)}{\psi_p(s)} \right] N_1(s) = M(s) \Rightarrow$$

$$N_1(s) = \text{diag} \left[ \frac{\psi_1(s)}{\varepsilon_1(s)}, \frac{\psi_2(s)}{\varepsilon_2(s)}, \dots, \frac{\psi_p(s)}{\varepsilon_p(s)} \right] M(s) \quad (3.14)$$

Η σχέση (3.14) μας δείχνει ότι ο πίνακας  $N_1(s)$  είναι ρητός, μια που εμπεριέχει πόλους στο  $\mathbb{C}$ , που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο πίνακας  $N_1(s)$  είναι πολυωνυμικός. Συνεπώς η αρχική μας υπόθεση ότι ο πίνακας  $P(s)$  δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  ήταν λάθος. (Κατά τον ίδιο τρόπο δείχνουμε την ύπαρξη αριστερά αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα όταν  $p \geq m$ .)  $\square$

**Συμπέρασμα 3.7** Οι συνθήκες του ορισμού 3.5 ότι δηλαδή οι ρητοί πίνακες της σχέσης (3.6) έχουν πλήρη τάξη (*full normal rank*) και δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  είναι ισοδύναμες από το λήμμα 3.6 με την ύπαρξη δεξιά πολυωνυμικού αντιστρόφου του ρητού πίνακα  $(M(s) \ P_2(s))$  και αριστερά πολυωνυμικού αντιστρόφου του ρητού πίνακα  $(P_1(s)^T \ -N(s)^T)^T$ .  $\square$

**Συμπέρασμα 3.8** Η σχέση (3.8) μας δείχνει έναν τρόπο κατασκευής του δεξιά αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα του ρητού πίνακα  $P(s)$ . Παρατηρούμε επίσης ότι από κατασκευής η δομή των μηδενικών του δεξιά αντίστροφου πολυωνυμικού πίνακα  $\hat{P}(s)$ , ταυτίζεται με την δομή των πόλων του ρητού πίνακα  $P(s)$ . Ο δεξιά αντίστροφος πολυωνυμικός πίνακας  $\hat{P}(s)$ , δεν είναι ο μοναδικός. Εστω  $\hat{P}_1(s)$  και  $\hat{P}_2(s)$  δύο δεξιά αντίστροφοι πολυωνυμικοί πίνακες του ρητού πίνακα  $P(s)$  δηλ.

$$P(s) \hat{P}_i(s) = I_p \quad i=1,2 \quad (3.15)$$

Τότε θα έχουμε ότι :

$$P(s) [\hat{P}_1(s) - \hat{P}_2(s)] = 0_p \quad (3.16)$$

και συνεπώς η διαφορά των πολυωνυμικών πινάκων  $\hat{P}_1(s)$  και  $\hat{P}_2(s)$  ανήκει στον δεξιά μηδενικό χώρο του ρητού πίνακα  $P(s)$ . Η διαφορά λοιπόν των δύο αυτών πολυωνυμικών πινάκων θα γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός μιας δεξιά ελάχιστης μηδενικής βάσης του ρητού πίνακα  $P(s)$ . Εστω λοιπόν  $Z(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times (m-p)}$  μια δεξιά ελάχιστη πολυωνυμική μηδενική βάση του ρητού πίνακα  $P(s)$  δηλ.

$$P(s) Z(s) = 0_{p, m-p} \quad (3.17)$$

Από τις σχέσεις (3.16) και (3.17) θα πάρουμε ότι :

$$\hat{P}_1(s) - \hat{P}_2(s) = Z(s) C(s) \quad (3.18)$$

για κάποιο αυθαίρετο πολυωνυμικό πίνακα  $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{(m-p) \times p}$  και άρα ο γενικός δεξιά αντίστροφος πολυωνυμικός πίνακας του ρητού πίνακα  $P(s)$  θα έχει την μορφή

$$\hat{P}(s) = \hat{P}_1(s) + Z(s) C(s) \quad (3.19)$$

όπου  $\hat{P}_1(s)$  είναι ένας δεξιά πολυωνυμικός αντίστροφος (πρδ. (3.9)),  $Z(s)$  η δεξιά ελάχιστη πολυωνυμική μηδενική βάση του ρητού πίνακα  $P(s)$  και  $C(s)$  ένας αυθαίρετος πολυωνυμικός πίνακας κατάλληλων διαστάσεων.  $\square$

Το επόμενο λήμμα συνδέει τον μετασχηματισμό της αντιστρέψιμης και της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας με τον μετασχηματισμό της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας.

### Λήμμα 3.9

- α) Εάν δύο ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  των ίδιων διαστάσεων είναι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι τότε είναι και γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι.
- β) Δύο πολυωνυμικοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι εάν και μόνο εάν είναι γενικευμένα αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι.

### Απόδειξη

- α) Ο μετασχηματισμός της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας μπορεί να γραφεί ως

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

όπου οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  είναι αντιστρέψιμοι (unimodular). Είναι προφανές λοιπόν, λόγω του ότι οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  έχουν πλήρη τάξη και δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ , ότι και οι ρητοί πίνακες

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

θα έχουν πλήρη τάξη και δεν θα έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και συνεπώς οι ρητοί πίνακες



$P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι.

β) Είναι προφανές από τον ορισμό της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας.  $\square$

Ενώ η γενικευμένη πολυωνυμική ισοδυναμία είναι ειδική περίπτωση της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας (Λήμμα 3.9 (α)), το αντίστροφο δεν συμβαίνει πάντα όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα.

**Παράδειγμα 3.10** Εστω  $P_1(s) = \frac{s+1}{s+2}$  και  $P_2(s) = s+1$  τότε ο παρακάτω μετασχηματισμός

$$(s+2 \quad s+1) \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.1})$$

είναι ένας μετασχηματισμός γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας λόγω του ότι ο πίνακας  $(s+2 \quad s+1)$  έχει πλήρη τάξη και έναν δεξιά πολυωνυμικό αντίστροφο  $(1 \quad -1)^T$  και ο πίνακας  $(\frac{s+1}{s+2} \quad -1)^T$  έχει επίσης πλήρη τάξη και έναν αριστερά πολυωνυμικό αντίστροφο  $(-(s+2) \quad -(s+2))$  (μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την μη ύπαρξη μηδενικών στο  $\mathbb{C}$  (Λήμμα 3.6)). Οι πίνακες  $P_1(s) = \frac{s+1}{s+2}$  και  $P_2(s) = s+1$  δεν έχουν την ίδια δομή πόλων στο  $\mathbb{C}$  (ο  $P_1(s)$  έχει έναν πόλο στο  $s=-2$  και ο  $P_2(s)$  δεν έχει πόλους στο  $\mathbb{C}$ ) και συνεπώς δεν είναι αντιστρέψιμα ισοδύναμοι.  $\square$

Οι Pugh και Shelton (1978) έδειξαν ότι δύο πολυωνυμικοί πίνακες, ιδίων διαστάσεων,  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι εάν και μόνο εάν είναι αντιστρέψιμα ισοδύναμοι. Αυτό δεν συμβαίνει στο είδος της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας λόγω του ότι οι ρητοί πίνακες εμπλέκουν και πόλους στο  $\mathbb{C}$  σε αντίθεση με τους πολυωνυμικούς πίνακες (όπως είδαμε στο πρδ. 3.10). Θα δείξουμε αργότερα ότι οι μετασχηματισμοί της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας και της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας ταυτίζονται όταν οι ισοδύναμοι πίνακες είναι πολυωνυμικοί πίνακες, ιδίων διαστάσεων.

**Θεώρημα 3.11** Εστω δύο πίνακες  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$ . Εάν οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι, τότε έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

### Απόδειξη

Οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι και συνεπώς υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

Εστω οι επόμενες πρώτες πολυωνυμικές κλασματικές εκφράσεις :

$$(M(s) \ P_2(s)) = D^{-1}([M \ P_2]) (\bar{N}(M) \ \bar{N}(P_2)) \quad (3.23a)$$

και

$$\begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}(P_1) \\ -\bar{N}(N) \end{bmatrix} D^{-1} \left[ \begin{bmatrix} P_1 \\ -N \end{bmatrix} \right] \quad (3.23\beta)$$

Ο πίνακας  $M(s)$  είναι πολυωνυμικός και συνεπώς οι πόλοι στο  $\mathbb{C}$  του σύνθετου ρητού πίνακα  $(M(s) \ P_2(s))$  ταυτίζονται με τους πόλους στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα  $P_2(s)$ . Έτσι η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $D([M \ P_2])$ , ταυτίζεται με την δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  του ρητού σύνθετου πίνακα  $(M(s) \ P_2(s))$  ή ισοδύναμα με του ρητού πίνακα :

$$P_2(s) = D^{-1}([M \ P_2]) \bar{N}(P_2) \quad (3.24)$$

Εστω τώρα μια άλλη πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του ρητού πίνακα  $P_2(s)$  :

$$P_2(s) = D_2^{-1}(s) N_2(s) \quad (3.25)$$

Τότε η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  των  $D([M \ P_2])$  και  $D_2(s)$  ταυτίζεται. Συνέπεια αυτού λοιπόν είναι ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες  $L(s)$  και  $R(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$L^{-1}(s) D_2(s) = D([M \ P_2]) R(s) \quad (3.26)$$

Από τις σχέσεις (3.24–3.26) έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} N_2(s) &= D_2(s) P_2(s) = D_2(s) D^{-1}([M \ P_2]) \bar{N}(P_2) = \\ &= [D_2(s) R(s) D_2^{-1}(s) L(s)] \bar{N}(P_2) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Θεωρείστε τον πίνακα :

$$D_2(s) R(s) D_2^{-1}(s) L(s) \quad (3.28)$$

Η ορίζουσα του είναι ίση με  $\|R(s)\| \|L(s)\|$ . Οι πίνακες όμως  $R(s)$  και  $L(s)$  είναι αντιστρέψιμοι και συνεπώς από την (3.27) έχουμε ότι οι  $N_2(s)$  και  $\bar{N}(P_2)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ . Έτσι η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα  $P_2(s)$  είναι η ίδια με την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $\bar{N}(P_2)$ . Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα  $P_1(s)$  είναι η ίδια με την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $\bar{N}(P_1)$ . Από την σχέση (3.22) και (3.23) έχουμε την ακόλουθη γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία :

$$(\bar{N}(M) \quad \bar{N}(P_2)) \begin{bmatrix} \bar{N}(P_1) \\ -\bar{N}(N) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.29)$$

και συνεπώς από το λήμμα 3.4 οι πολυωνυμικοί πίνακες  $\bar{N}(P_1)$  και  $\bar{N}(P_2)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης ή ισοδύναμα οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.  $\square$

Το αντίστροφο του θεωρήματος 3.11 δίνεται από το παρακάτω :

**Θεώρημα 3.12** Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$ . Εάν οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  καθώς και το ίδιο έλλειμμα τάξης τότε είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Εστω  $S_{P_1(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  και  $S_{P_2(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  ως συμβολίσουμε τις κανονικές Smith–McMillan μορφές στο  $\mathbb{C}$  των ρητών πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  αντίστοιχα. Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $U_1(s), U_2(s), U_3(s)$  και  $U_4(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$U_1(s) P_1(s) U_2(s) = S_{P_1(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, \mathbf{0} \right] \quad (3.30\alpha)$$

και

$$U_3(s) P_2(s) U_4(s) = S_{P_2(s)}^{\mathbb{C}}(s) =$$

$$= \text{block diag}\left[-\frac{1}{\hat{\psi}_1(s)}, -\frac{1}{\hat{\psi}_2(s)}, \dots, -\frac{\varepsilon_1(s)}{\hat{\psi}_k(s)}, -\frac{\varepsilon_2(s)}{\hat{\psi}_{k+1}(s)}, \dots, -\frac{\varepsilon_r(s)}{\hat{\psi}_{r+k-1}(s)}, 0\right] \quad (3.30\beta)$$

όπου  $S_{P_1(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  και  $S_{P_2(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή και το ίδιο έλλειμμα τάξης. Ο παρακάτω μετασχηματισμός :

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|c} & \hat{\psi}_k(s) & & & 0 \\ & & \hat{\psi}_{k+1}(s) & & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ O_{r,k-1} & & & & \hat{\psi}_{r+k-1}(s) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc|c} -\frac{1}{\hat{\psi}_1(s)} & & & & 0 \\ & -\frac{1}{\hat{\psi}_2(s)} & & & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & -\frac{\varepsilon_r(s)}{\hat{\psi}_{r+k-1}(s)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{c|ccc|c} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & & 0 \\ & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} & & & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc|c} \psi_1(s) & & & & 0 \\ & \psi_2(s) & & & 0 \\ & & \ddots & & 0 \\ O_{r,k-1} & & & & \psi_r(s) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Psi_i' & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] S_{P_2(s)}^{\mathbb{C}}(s) = S_{P_1(s)}^{\mathbb{C}}(s) \left[ \begin{array}{c|c} \Psi_i & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (3.31)$$

είναι ένας γενικευμένος πολυωνυμικά ισοδύναμος μετασχηματισμός λόγω του ότι οι σύνθετοι ρητοί πίνακες της σχέσης (3.31) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και έχουν πλήρη τάξη (τα  $\varepsilon_i(s)$  και  $\hat{\psi}_{k-1+i}(s)$  καθώς και  $\varepsilon_i(s)$  και  $\psi_i(s)$  είναι πρώτα μεταξύ τους). Από την σχέση (3.30) και (3.31) έχουμε ότι :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Psi_i' & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] U_3(s) P_2(s) U_4(s) = U_1(s) P_1(s) U_2(s) \left[ \begin{array}{c|c} \Psi_i & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$[U_1(s)^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} \Psi_i' & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] U_3(s)] P_2(s) = P_1(s) [U_2(s) \left[ \begin{array}{c|c} \Psi_i & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] U_4(s)^{-1}] \quad (3.32)$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι ένας γενικευμένος πολυωνυμικά ισοδύναμος μετασχηματισμός διότι ο πολλαπλασιασμός με αντιστρέψιμους πίνακες διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το έλλειμμα τάξης. Άρα οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι.  $\square$

**Συμπέρασμα 3.13** Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0[p,m] \times \mathcal{P}_0[p,m]$ . Οι πολυωνυμικοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι εαν και μόνο εαν είναι γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (ή αντιστρέψιμα ισοδύναμοι εαν είναι των ίδιων διαστάσεων).

#### Απόδειξη

Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι στους πολυωνυμικούς πίνακες δεν έχω πόλους στο  $\mathbb{C}$  και συνεπώς η αλγεβρική δομή στο  $\mathbb{C}$  ταυτίζεται με την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ . Εαν λοιπόν χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα 3.11 και 3.12 καθώς και το γεγονός ότι δύο πολυωνυμικοί πίνακες είναι γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι (Pugh and Shelton 1978) (ή ισοδύναμα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι, αν είναι των ίδιων διαστάσεων) εαν και μόνο εαν έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης, τότε έχουμε την απόδειξη.  $\square$

**Θεώρημα 3.14** Η γενικευμένη πολυωνυμική ισοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο  $\mathcal{P}_0(p,m)$ .

#### Απόδειξη

(α) **Ανακλαστική ιδιότητα (reflexivity).**

Ο παρακάτω μετασχηματισμός είναι προφανώς ένας γενικευμένος πολυωνυμικά ισοδύναμος μετασχηματισμός.

$$I P(s) = P(s) I \quad (3.33)$$

(β) **Μεταβατική ιδιότητα (transitivity).**

Εστω ότι οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  καθώς και  $P_2(s)$  και  $P_3(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι. Αρα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$ ,  $N(s)$ ,  $A(s)$  και  $B(s)$  τέτοιοι ώστε οι μετασχηματισμοί :

$$M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (3.34\alpha)$$

και

$$A(s) P_2(s) = P_3(s) B(s) \quad (3.34\beta)$$

να είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι. Τότε :

$$[A(s)M(s)] P_1(s) = P_3(s) [B(s)N(s)] \quad (3.35)$$

Θεωρείστε την σχέση :

$$A(s) [M(s) \ P_2(s)] = [A(s)M(s) \ P_3(s)] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B(s) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

και τον πίνακα :

$$K(s) = \begin{bmatrix} I & -M(s) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Ο πίνακας  $M(s)$  είναι πολυωνυμικός και συνεπώς ο πίνακας  $K(s)$  είναι αντιστρέψιμος. Επίσης έχουμε ότι :

$$[A(s) \quad A(s)M(s) \quad P_3(s)] K(s) = [A(s) \quad 0 \quad P_3(s)] \quad (3.38)$$

και

$$K^{-1}(s) \begin{bmatrix} M(s) & P_2(s) \\ -I & 0 \\ 0 & -B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P_2(s) \\ -I & 0 \\ 0 & -B(s) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Οι πίνακες στην δεξιά μεριά της (3.38) και (3.39), έχουν πλήρη τάξη και δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ . Συνεπώς οι σύνθετοι πίνακες :

$$[A(s) \quad A(s)M(s) \quad P_3(s)] \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} M(s) & P_2(s) \\ -I & 0 \\ 0 & -B(s) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και έχουν πλήρη τάξη. Οπότε η σχέση (3.36) είναι μια σχέση γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας μεταξύ των ρητών πινάκων :

$$[M(s) \quad P_2(s)] \quad \text{και} \quad [A(s)M(s) \quad P_3(s)] \quad (3.41)$$

Ο ρητός πίνακας  $[M(s) \quad P_2(s)]$  δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και έχει πλήρη τάξη λόγω του ότι η σχέση (3.34α) είναι μια σχέση γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας άρα και ο ρητός πίνακας  $[A(s)M(s) \quad P_3(s)]$  δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και έχει πλήρη τάξη. Ομοια μπορούμε να βρούμε ότι ο ρητός πίνακας  $[P_1(s)^T \quad -(B(s)N(s))^T]^T$  δεν

έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και έχει πλήρη τάξη. Αρα η σχέση (3.35) είναι μια σχέση γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας και συνεπώς οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_3(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι γεγονός που αποδεικνύει την μεταβατική ιδιότητα της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας.

(γ) **Συμμετρική ιδιότητα (symmetry).**

Εστω ότι οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  συνδέονται διαμέσου της παρακάτω γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας στο  $\mathbb{C}$

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.42)$$

Συνέπεια της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας είναι ότι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  καθώς και το ίδιο έλλειμμα τάξης. Τότε σύμφωνα με την σχέση (3.32) υπάρχει μια γενικευμένη πολυωνυμική ισοδυναμία μεταξύ των ρητών πινάκων  $P_2(s)$  και  $P_1(s)$ .  $\square$

### 3.3 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο $s=\infty$ .

Εστω  $P_i(s) \in \mathcal{P}_0(p,m)$ ,  $i=1,2$  και υποθέστε ότι υπάρχουν καιονικοί ρητοί πίνακες (proper)  $M(s)$  και  $N(s)$  κατάλληλων διαστάσεων τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (3.43)$$

ή ισοδύναμα

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.44)$$

**Ορισμός 3.15** (Vardulakis et.al. 1982) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$  οι οποίοι συνδέονται διαμέσου της σχέσης (3.44). Οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ονομάζονται **δικαιονικά ισοδύναμοι (biproper equivalent)** εάν οι καιονικοί ρητοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  είναι δικαιονικοί (biproper)  $((\alpha) \lim_{s \rightarrow \infty} M(s) = M, \text{ σταθερός, και } (\beta) \det |M| \neq 0)$ .  $\square$

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της δικαιονικής ισοδυναμίας μεταξύ ρητών πινάκων είναι ότι διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $s=\infty$  (καθώς και την δομή των πόλων στο  $s=\infty$ ). Μειονέκτημα της ισοδυναμίας αυτής είναι ότι συνδέει ρητούς πίνακες των ίδιων διαστάσεων. Την λύση στο μειονέκτημα αυτό έδωσε ο Walker (1988) με το παρακάτω είδος ισοδυναμίας :

**Ορισμός 3.16** Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$  οι οποίοι συνδέονται διαμέσου της σχέσης (3.44). Οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ονομάζονται *γενικευμένα ρητά ισοδύναμοι* (*extended causal equivalent*) εαν και μόνο εαν οι σύνθετοι ρητοί πίνακες

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

- α) έχουν πλήρη τάξη,
- β) δεν έχουν μηδενικά στο  $s=\infty$ . □

Μερικές σημαντικές ιδιότητες της γενικευμένης ρητής ισοδυναμίας δίνονται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 3.17** (Walker 1988)

- α) Εαν δύο ρητοί πίνακες ίδιων διαστάσεων είναι δικαιονικά ισοδύναμοι τότε είναι και γενικευμένα ρητά ισοδύναμοι. Το αντίστροφο συμβαίνει μόνο στο σύνολο των καιονικών ρητών πινάκων (δεν έχουν πόλους στο  $s=\infty$ ).
- β) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$ . Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα ρητά ισοδύναμοι εαν και μόνο εαν έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $s=\infty$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.
- γ) Η γενικευμένη ρητή ισοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathcal{P}_0(p,m)$ . □

Οι σχέσεις ισοδυναμίας που είδαμε στις ενότητες 3.2 και 3.3 έχουν το πλεονέκτημα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή ρητών πινάκων είτε στο  $\mathbb{C}$  είτε στο  $s=\infty$  αλλά



όχι στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Αυτός ήταν ο λόγος για να δημιουργηθούν καινούργια είδη μετασχηματισμών που να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή πολυωνυμικών ή ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Τα είδη αυτών των μετασχηματισμών θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

### 3.4 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων στο $\mathbb{C}\{s\}$ .

Μια πρώτη προσπάθεια στην εύρεση μετασχηματισμών που διατηρούν την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  έγινε από τους Pugh et.al. (1987) και αφορούσε πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες.

**Ορισμός 3.18** (Pugh et.al. 1987) Έστω  $(sE_1 - A_1, sE_2 - A_2) \in \mathcal{P}_0[p,m] \times \mathcal{P}_0[p,m]$ . Οι  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  ονομάζονται **τέλεια ισοδύναμοι** (*completely equivalent (c.e.)*) εαν υπάρχουν σταθεροί πίνακες  $M$  και  $N$  τέτοιοι ώστε :

$$M (sE_1 - A_1) = (sE_2 - A_2) N \quad (3.46)$$

όπου οι σύνθετοι πίνακες

$$(M \ sE_2 - A_2) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} sE_1 - A_1 \\ -N \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

α) έχουν πλήρη τάξη

β) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . □

Ενα χαρακτηριστικό του παραπάνω μετασχηματισμού όπως αναφέραμε παραπάνω δίνεται από το παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 3.19** Εαν δύο πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  είναι τέλεια ισοδύναμοι τότε έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

**Απόδειξη** Παρατηρούμε ότι η τέλεια ισοδυναμία είναι υποπερίπτωση της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας και της γενικευμένης ρητής ισοδυναμίας και συνεπώς οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  από θεώρημα 3.11 και 3.17 έχουν την ίδια δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . □

Το αντίστροφο του λήμματος 3.19 δεν συμβαίνει πάντα όπως φαίνεται από το παρακάτω αντιπαράδειγμα

**Παράδειγμα 3.20** Θεωρείστε τους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες :

$$sE_1 - A_1 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & s & & & & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ & & s & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & s \end{array} \right] \quad \text{και} \quad sE_2 - A_2 = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & s & & 0 \\ 0 & -1 & & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.1})$$

οι οποίοι έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης  $\{1\}$ . Η γενική μορφή των σταθερών πινάκων  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  και  $N \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$  που ικανοποιούν την σχέση (3.46) είναι η εξής :

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad N = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Παρατηρούμε όμως ότι ο σύνθετος πίνακας

$$[M \quad sE_1 - A_1] = \left[ \begin{array}{ccccc|ccc} x_1 & x_2 & 0 & x_3 & x_4 & 1 & s & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.3})$$

δεν έχει πλήρη τάξη και συνεπώς οι πίνακες  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  δεν είναι τέλεια ισοδύναμοι. Μια παρατήρηση που θα μπορούσαμε να κάνουμε εδώ είναι ότι οι δύο αυτοί πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες έχουν διαφορετικούς ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών και ίσως αυτός είναι ένας από τους λόγους της μη τέλει ισοδυναμίας.  $\square$

Στην περίπτωση τώρα που ενδιαφερόμαστε να διατηρήσουμε αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  πολυωνυμικών πινάκων, σίγουρα ορισμένες πρόσθετες συνθήκες θα πρέπει να συμπεριληφθούν στον ορισμό της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας. Μια πολύ ευκολούνητη πρόσθετη συνθήκη που υπάρχει και στον ορισμό της τέλει ισοδυναμίας είναι η απουσία μηδενικών στο  $s=\infty$  των σύνθετων πινάκων (3.4). Όπως θα δούμε όμως στο παρακάτω παράδειγμα αυτή η συνθήκη από μόνη της δεν είναι αρκετή :

**Παράδειγμα 3.21** Θεωρείστε την παρακάτω σχέση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2s^2-s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_1(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_2(s)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & s^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{N(s)} \quad (\text{E.1})$$

Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι οι σύνθετοι πίνακες που προκύπτουν από την παραπάνω σχέση δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και έχουν πλήρη τάξη. Παρ'όλα αυτά ο πίνακας  $P_2(s)$  έχει ένα μηδενικό στο  $s=\infty$  τάξης 2, ενώ ο  $P_1(s)$  έχει ένα μηδενικό στο  $s=\infty$  τάξης 1. Έτσι οι συνθήκες της απουσίας μηδενικών των σύνθετων πινάκων (3.3), από μόνες τους δεν εγγυούνται την διατήρηση των μηδενικών στο  $s=\infty$  των ισοδύναμων πολυωνυμικών πινάκων.  $\square$

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει ότι επιπλέον συνθήκες απαιτούνται έτσι ώστε ο μετασχηματισμός της μορφής (3.1) να διατηρεί την μηδενική δομή ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Οι Hayton et.al. (1988) πρότειναν γι'αυτόν τον λόγο, για την ειδική περίπτωση των ρητών πινάκων : τους πολυωνυμικούς πίνακες, τον παρακάτω

**Ορισμός 3.22** (Hayton et.al. 1988) Έστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0[p,m] \times \mathcal{P}_0[p,m]$ . Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ονομάζονται *πλήρως ισοδύναμοι* (fully equivalent) εάν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (3.48)$$

δεδομένου ότι οι σύνθετοι πίνακες :

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\alpha) \quad \text{έχουν πλήρη τάξη,} \quad (3.50\alpha)$$

$$\beta) \quad \text{δεν έχουν μηδενικά στο } \mathbb{C}\{s\}, \quad (3.50\beta)$$

γ) οι παρακάτω McMillan συνθήκες ικανοποιούνται :

$$\delta_M(M(s) \ P_2(s)) = \delta_M(P_2(s)) \quad \text{και} \quad \delta_M \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \delta_M(P_1(s)) \quad (3.50\gamma)$$

$\square$

Είναι εύκολο να δει κανείς από τις σχέσεις (α) και (β), ότι ο μετασχηματισμός της πλήρους ισοδυναμίας είναι μια ειδική περίπτωση της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας. Η επιπρόσθετη συνθήκη, η οποία και δεν αναμενόταν ήταν οι McMillan συνθήκες (γ). Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας δίνεται από το παρακάτω :

**Λήμμα 3.23** (Hayton et.al. 1988, Pugh et.al. 1992) Εάν  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0[p,m] \times \mathcal{P}_0[p,m]$  είναι πλήρως ισοδύναμοι τότε έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης. □

Όπως είδαμε και στο παράδειγμα 3.20 το αντίστροφο του λήμματος 3.23 δεν ισχύει. Μια πρόταση που θα μπορούσαμε να θέσουμε όσον αφορά το αντίστροφο του λήμματος 3.23 είναι η παρακάτω :

**Πρόταση 3.24** Εστω  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}_0[p,m]$ . Εάν οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Δες Παράρτημα. □

Ενα εύλογο συμπέρασμα της παραπάνω πρότασης είναι ότι ίσως η πλήρης ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτη και την δεξιά και αριστερή μηδενική δομή πολυωνυμικών πινάκων. Αυτό το ερώτημα παραμένει και ένα ανοικτό ερώτημα στην εως τώρα έρευνα των ισοδύναμων μετασχηματισμών πολυωνυμικών πινάκων.

Μια ερμηνεία τώρα των τριών συνθηκών της πλήρους ισοδυναμίας (3.50α, 3.50β, 3.50γ), που προέρχεται από την απόδειξη του λήμματος 3.23 (Pugh et.al. 1992) είναι η εξής

**α)** Οι πίνακες  $P_1(s)$  και  $N(s)$  για παράδειγμα (όμοια για τους πίνακες  $P_2(s)$  και  $M(s)$ ) μπορεί να περιέχουν κοινά μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  τα οποία μπορούν να απορροφηθούν

διαμέσου του μέγιστου κοινού διαιρέτη  $Q(s)$  των  $[P_1(s)^T \ -N(s)^T]^T$  χωρίς να αλλάξει η ισότητα στην σχέση (3.2) αλλά αντιθέτως να αλλάξει η μηδενική δομή στο  $\infty$  μεταξύ των ισοδύναμων πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$ . Είναι η συνθήκη της απουσίας των μηδενικών του σύνθετου πίνακα  $[P_1(s)^T \ -N(s)^T]^T$  που αποτρέπει αυτό να γίνει.

- β) Κατά τον ίδιο τρόπο η απουσία των μηδενικών στο  $s=\infty$  είναι αυτή που αποτρέπει να γίνει το ίδιο όσον αφορά την δομή στο  $s=\infty$  του ίδιου σύνθετου πίνακα.
- γ) Η σχέση (3.1) είναι μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων που διαθέτουν πόλους στο  $s=\infty$ . Συνεπώς εάν ο πίνακας  $N(s)$  έχει δομή πόλων στο  $s=\infty$  που εμπεριέχει αυτήν του  $P_1(s)$  τότε αυτή θα μπορούσε να απορροφηθεί, αφήνοντας τον πίνακα  $P_1(s)R(s)$  (όπου  $R(s)$  αντιστρέψιμος) στην θέση του πίνακα  $P_1(s)$ , ο οποίος τώρα περιέχει επιπλέον μηδενικά στο  $s=\infty$  εξαιτίας του αντιστρέψιμου πίνακα  $R(s)$ . Είναι η McMillan συνθήκες της σχέσης (3.50) που αποτρέπουν αυτό να γίνει.

Ορισμένες άλλες ερμηνείες των McMillan συνθηκών (3.50), θα δούμε στα παρακάτω κεφάλαια.

**Παράδειγμα 3.25** Στο παράδειγμα 3.21 παρατηρούμε ότι

$$\delta_M([M(s) \ P_2(s)]) = 2 = \delta_M(P_2(s)) \quad (\text{E.1})$$

αλλά

$$\delta_M \left[ \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \right] = 2 \neq 1 = \delta_M(P_1(s)) \quad (\text{E.2})$$

Οι McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας δεν ικανοποιούνται και συνεπώς δεν είναι καθόλου παράξενο που η μηδενική δομή στο  $s=\infty$  των  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  δεν ταυτίζονται. Μπορούμε να παρατηρήσουμε όμως ότι οι McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας διατηρούνται όσον αφορά τους πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  πρδ.

$$\delta_M([M(s) \ P_2(s)]) = 2 = \delta_M(M(s)) \quad (\text{E.3})$$

$$\delta_M \left[ \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \right] = 2 = \delta_M(N(s)) \quad (\text{E.4})$$

Οι πίνακες  $[M(s) \ P_2(s)]$  και  $[P_1(s)^T \ -N(s)^T]^T$  έχουν επίσης πλήρη τάξη και δεν περιέχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και συνεπώς δεν είναι καθόλου παράξενο που οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  που επαληθεύει το λήμμα 3.23.  $\square$

Ο μετασχηματισμός της πλήρους ισοδυναμίας είναι μια γενίκευση του μετασχηματισμού της τέλει ισοδυναμίας όπως φαίνεται στο παρακάτω :

**Λήμμα 3.26** (Pugh and Hayton 1990) Εστω  $sE_1 - A_1, sE_2 - A_2 \in \mathcal{P}_0[p, m]$ . Οι  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  είναι τέλεια ισοδύναμοι εαν και μόνο εαν είναι πλήρως ισοδύναμοι.  $\square$

Όπως βλέπουμε από τα παραπάνω μια ολοκληρωμένη μελέτη έχει γίνει όσον αφορά τους μετασχηματισμούς μεταξύ πολυωνυμικών πινάκων όχι κατ'ανάγκη των ίδιων διαστάσεων που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Ανοικτή για έρευνα παρ'όλα αυτά παρέμενε ως τώρα η αντίστοιχη θεωρία όσον αφορά την πιο γενική κατηγορία πινάκων : τους ρητούς πίνακες. Στην συνέχεια λοιπόν θα δώσουμε τριών ειδών ισοδυναμίες στο σύνολο των ρητών πινάκων που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ .

**Ορισμός 3.27** (Karampetakis) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p, m) \times \mathcal{P}_0(p, m)$ . Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ονομάζονται **ισχυρά ισοδύναμοι** (*strongly equivalent* (s.e.)) εαν είναι ταυτόχρονα γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι και γενικευμένα ρητά ισοδύναμοι.  $\square$

**Θεώρημα 3.28** Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p, m) \times \mathcal{P}_0(p, m)$ . Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι ισχυρά ισοδύναμοι εαν και μόνο εαν έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

**Απόδειξη**

- ( $\Rightarrow$ ) Εάν οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι ισχυρά ισοδύναμοι τότε είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι και συνεπώς από το θεώρημα 3.11 έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης όπως επίσης είναι και γενικευμένα ρητά ισοδύναμοι και συνεπώς από το θεώρημα 3.17 έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $s=\infty$ .
- ( $\Leftarrow$ ) Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης και συνεπώς από το θεώρημα 3.12 είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι. Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν επίσης την ίδια μηδενική δομή στο  $s=\infty$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης και συνεπώς από θεώρημα 3.17 είναι γενικευμένα ρητά ισοδύναμοι. Άρα οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι ισχυρά ισοδύναμοι.  $\square$

**Θεώρημα 3.29** Η ισχυρή ισοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathcal{P}_0(p,m)$ .

**Απόδειξη** Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι και η γενικευμένη πολυωνυμική ισοδυναμία και η γενικευμένη ρητή ισοδυναμία είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο  $\mathcal{P}_0(p,m)$ .  $\square$

**Συμπέρασμα 3.30** Η τέλεια ισοδυναμία είναι υποπερίπτωση της ισχυρής ισοδυναμίας.  $\square$

Ένα μειονέκτημα της ισχυρής ισοδυναμίας είναι ότι δεν υπάρχει απ'ευθείας σύνδεση διαμέσου ενός μόνο μετασχηματισμού των ισοδύναμων ρητών πινάκων όπως έχουμε στην πλήρη ισοδυναμία. Το μειονέκτημα αυτό μας οδηγεί στην δημιουργία ενός καινούργιου μετασχηματισμού που είναι ο εξής :

**Ορισμός 3.31** (Karampetakis) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$ . Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ονομάζονται **πολυωνυμικά ισοδύναμοι** (*polynomial equivalent*) εάν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (3.51)$$

δεδομένου ότι οι σύνθετοι πίνακες :

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

α) έχουν πλήρη τάξη, (3.53α)

β) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ , (3.53β)

γ) οι παρακάτω McMillan συνθήκες ικανοποιούνται :

$$\delta_M(M(s) \ P_2(s)) = \delta_M(P_2(s)) \quad \text{και} \quad \delta_M \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \delta_M(P_1(s)) \quad (3.53\gamma)$$

□

Παρατηρούμε δηλαδή ότι έχουμε τις ίδιες συνθήκες που είχαμε και στην πλήρη ισοδυναμία. Η ερμηνεία των συνθηκών αυτών είναι ανάλογη με την ερμηνεία που δόθηκε και στις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας.

Είναι απαραίτητο σ'αυτό το σημείο, για την απόδειξη του αναλλοίωτου της μηδενικής δομής στο  $\mathbb{C}\{s\}$  ρητών πινάκων κάτω από τον μετασχηματισμό της πολυωνυμικής ισοδυναμίας, να αναφέρουμε ότι κατά τον ίδιο τρόπο που παίρνουμε πρώτες πολυωνυμικές κλασματικές εκφράσεις ενός ρητού πίνακα, μπορούμε να πάρουμε και πρώτες ρητές κλασματικές εκφράσεις όπως φαίνεται στην παρακάτω πρόταση, με ιδιότητες εντελώς ανάλογες.

**Πρόταση 3.32** (Vardulakis 1982, 1991) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r \leq \min(p, m)$ . Τότε υπάρχουν  $A_1(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$  και  $B_1(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$  και αριστερά πρώτοι στο  $s = \infty$  (*left coprime at  $s = \infty$* ) πρδ. ο πίνακας  $[A_1(s) \ B_1(s)]$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $s = \infty$ ,  $B_2(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times m}$ ,  $A_2(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m}$  και δεξιά πρώτοι στο  $s = \infty$  (*right coprime at  $s = \infty$* ) πρδ. ο πίνακας  $[B_2(s)^T \ A_2(s)^T]^T$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $s = \infty$ , τέτοιοι ώστε :

$$T(s) = A_1(s)^{-1} B_1(s) = B_2(s) A_2(s)^{-1} \quad (3.54)$$

Η έκφραση του  $T(s)$  της μορφής (3.54) ονομάζεται αριστερά (δεξιά) πρώτη στο  $s = \infty$  κανονικά ρητή κλασματική έκφραση του  $T(s)$  (*left (right) coprime at  $s = \infty$  proper rational matrix fractional representation (PRMFR)*). Εστω μια οποιαδήποτε άλλη πρώτη στο  $s = \infty$  αριστερά (δεξιά) κανονικά ρητή κλασματική έκφραση του  $T(s)$  :



$$T(s) = \tilde{A}_1(s)^{-1} \tilde{B}_1(s) = \tilde{B}_2(s) \tilde{A}_2(s)^{-1} \quad (3.55)$$

Τότε θα υπάρχουν δικανονικοί πίνακες  $U_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$  και  $U_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$A_1(s) = U_L(s) \tilde{A}_1(s) \quad \text{και} \quad B_1(s) = U_L(s) \tilde{B}_1(s) \quad (3.56)$$

$$A_2(s) = \tilde{A}_2(s) U_R(s) \quad \text{και} \quad B_2(s) = \tilde{B}_2(s) U_R(s) \quad (3.57)$$

Η σχέση που συνδέει την μηδενική δομή στο  $s=\infty$  των πινάκων  $A_i(s)$ ,  $B_i(s)$   $i=1,2$  και την δομή των πόλων/μηδενικών στο  $s=\infty$  του  $T(s)$  είναι η εξής :

$$\text{μηδενική δομή στο } s=\infty \text{ του } T(s) \equiv \text{μηδενική δομή στο } s=\infty \text{ του } B_1(s) \text{ ή } B_2(s) \quad (3.58)$$

$$\text{δομή των πόλων στο } s=\infty \text{ του } T(s) \equiv \text{μηδενική δομή στο } s=\infty \text{ του } A_1(s) \text{ ή } A_2(s) \quad (3.59)$$

□

Βασιζόμενοι στην πρόταση 3.32 μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το αναλλοίωτο της μηδενικής δομής στο  $\mathbb{C}\{\infty\}$  ρητών πινάκων κάτω από τον μετασχηματισμό της πολυωνυμικής ισοδυναμίας.

**Θεώρημα 3.33** Εάν  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$  είναι πολυωνυμικά ισοδύναμοι τότε έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{\infty\}$  καθώς και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

**Απόδειξη** Οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα πολυωνυμικά ισοδύναμοι, επειδή η πολυωνυμική ισοδυναμία είναι υποπερίπτωση της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας, και συνεπώς έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

Εστω τώρα

$$[M(s), P_2(s)] = D^{-1}([M \ P_2]) [\tilde{N}(M) \ \tilde{N}(P_2)] \quad (3.60)$$

και

$$\begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}(P_1) \\ -\tilde{N}(N) \end{bmatrix} \tilde{D}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ -N \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

είναι αριστερά πρώτες στο  $s=\infty$  κανονικά ρητές κλασματικές εκφράσεις. Είναι φανερό ότι η δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  των σύνθετων πινάκων  $(M(s) \ P_2(s))$  και  $(P_1(s)^T \ -N(s)^T)^T$  ταυτίζεται με την δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  των ρητών πινάκων  $P_2(s)$  και  $P_1(s)$  αντίστοιχα, επειδή οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  είναι πολυωνυμικοί και δεν έχουν πόλους στο  $\mathbb{C}$ . Συνεπώς έχουμε ότι :

$$\nu(M(s) \ P_2(s)) = \nu(P_2(s)) \quad \text{και} \quad \nu \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \nu(P_1(s)) \quad (3.62)$$

Από την σχέση (3.53γ) έχουμε ότι :

$$\delta_M(M(s) \ P_2(s)) = \delta_M(P_2(s)) \Leftrightarrow$$

$$\nu_{(0)}(M(\frac{1}{w}) \ P_2(\frac{1}{w})) + \nu(M(s) \ P_2(s)) = \nu_{(0)}(P_2(\frac{1}{w})) + \nu(P_2(s)) \quad (3.62) \Leftrightarrow$$

$$\nu_{(0)}(M(\frac{1}{w}) \ P_2(\frac{1}{w})) = \nu_{(0)}(P_2(\frac{1}{w})) \quad (3.63)$$

και κατά τον ίδιο τρόπο

$$\nu_{(0)} \begin{bmatrix} P_1(\frac{1}{w}) \\ -N(\frac{1}{w}) \end{bmatrix} = \nu_{(0)}(P_1(\frac{1}{w})) \quad (3.64)$$

όπου  $\nu_{(0)}(P(\frac{1}{w}))$  δηλώνει τον συνολικό αριθμό των πόλων του  $P(\frac{1}{w})$  στο  $w=0$  ή ισοδύναμα τον συνολικό αριθμό των πόλων του πίνακα  $P(s)$  στο  $s=\infty$  (συμπεριλαμβανομένης και της τάξης των πόλων). Από τις σχέσεις (3.59), (3.63) και (3.64) έχουμε :

$$\begin{aligned} \#\{\text{μηδενικών στο } s=\infty \text{ του } D(s)\} &\stackrel{(3.59)}{=} \#\{\text{πόλων στο } s=\infty \text{ του } [M(s), P_2(s)]\} \\ &\stackrel{(3.63)}{=} \nu_{(0)}(M(\frac{1}{w}) \ P_2(\frac{1}{w})) \stackrel{(3.64)}{=} \nu_{(0)}(P_2(\frac{1}{w})) \end{aligned} \quad (3.65)$$

όπου  $\#\{\cdot\}$  δηλώνει τον συνολικό αριθμό, συμπεριλαμβανομένης και της τάξης (των πόλων/μηδενικών), και άρα η αριστερή κανονικά ρητή κλασματική έκφραση

$$P_2(s) = D^{-1}([M \ P_2]) \bar{N}(P_2) \quad (3.66)$$

είναι πρώτη στο  $s=\infty$  και η μηδενική δομή στο  $s=\infty$  του καινουργιά ρητού πίνακα  $D([M \ P_2])$  ταυτίζεται με την δομή των πόλων στο  $s=\infty$  του ρητού πίνακα  $P_2(s)$ , κατά τρόπο ανάλογο με αυτόν της απόδειξης του θεωρ. 3.11. Εστω τώρα μια αριστερή πρώτη στο  $s=\infty$  καινουργιά ρητή κλασματική έκφραση του ρητού πίνακα  $P_2(s)$  :

$$P_2(s) = D_2^{-1}(s) N_2(s) \quad (3.67)$$

Τότε η μηδενική δομή στο  $s=\infty$  των  $D([M \ P_2])$  και  $D_2(s)$  είναι ταυτόσημες σύμφωνα με την πρόταση 3.32. Συνέπεια αυτού λοιπόν είναι ότι υπάρχουν δικαιονουργιά πίνακες  $L(s)$  και  $R(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$L^{-1}(s) D_2(s) = D([M \ P_2]) R(s) \quad (3.68)$$

Από τις σχέσεις (3.66, 3.67, 3.68) έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} N_2(s) &\stackrel{(3.67)}{=} D_2(s) P_2(s) \stackrel{(3.66)}{=} D_2(s) D^{-1}([M \ P_2]) \bar{N}(P_2) = \\ &\stackrel{(3.68)}{=} [D_2(s) R(s) D_2^{-1}(s) L(s)] \bar{N}(P_2) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Θεωρείστε τον πίνακα :

$$D_2(s) R(s) D_2^{-1}(s) L(s) \quad (3.70)$$

Οι πίνακες  $R(s)$  και  $L(s)$  είναι δικαιονουργιά και συνεπώς η ορίζουσα του πίνακα (3.70) είναι ίση με το δικαιονουργιά στοιχείο  $\|R(s)\| \|L(s)\|$ . Αρα από την σχέση (3.69) έχουμε ότι οι  $N_2(s)$  και  $\bar{N}(P_2)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $s=\infty$ . Έτσι η μηδενική δομή στο  $s=\infty$  του ρητού πίνακα  $P_2(s)$  είναι η ίδια με την μηδενική δομή στο  $s=\infty$  του καινουργιά ρητού πίνακα  $\bar{N}(P_2)$ . Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι η μηδενική δομή του ρητού πίνακα  $P_1(s)$  είναι η ίδια με την μηδενική δομή του καινουργιά ρητού πίνακα  $\bar{N}(P_1)$ . Από τις σχέσεις (3.60) και (3.61)

παίρουμε την ακόλουθη γενικευμένη ρητή ισοδυναμία (*extended causal equivalence*):

$$(\bar{N}(M) \quad \bar{N}(P_2)) \begin{bmatrix} \bar{N}(P_1) \\ -\bar{N}(N) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.77)$$

και συνεπώς από το θεώρημα 3.17 οι κανονικά ρητοί πίνακες  $\bar{N}(P_1)$  και  $\bar{N}(P_2)$  θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $s=\infty$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης ή ισοδύναμα οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $s=\infty$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης που αποδεικνύει και το θεώρημα.  $\square$

**Συμπέρασμα 3.34** Οι McMillan συνθήκες της πολυωνυμικής ισοδυναμίας (δες (3.53γ)) είναι ισοδύναμες με τις παρακάτω συνθήκες :

$$\nu_{(0)}(M(\frac{1}{w}) \quad P_2(\frac{1}{w})) = \nu_{(0)}(P_2(\frac{1}{w})) \quad (3.78)$$

και

$$\nu_{(0)} \begin{bmatrix} P_1(\frac{1}{w}) \\ -N(\frac{1}{w}) \end{bmatrix} = \nu_{(0)}(P_1(\frac{1}{w})) \quad (3.79)$$

Είναι φανερό ότι η συνθήκη (3.78) [(3.79)] αποτρέπει την απλοποίηση πόλων στο  $s=\infty$  του πίνακα  $N(s)$  [ $M(s)$ ] που εμπεριέχουν πόλους στο  $s=\infty$  του  $P_1(s)$  [ $P_2(s)$ ], με ταυτόχρονη προσθήκη μηδενικών στο  $s=\infty$  στον πίνακα  $P_1(s)$  [ $P_2(s)$ ].  $\square$

**Συμπέρασμα 3.35** Στην περίπτωση που  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0[p,m] \times \mathcal{P}_0[p,m]$  τότε ο μετασχηματισμός της πολυωνυμικής ισοδυναμίας στο  $\mathbb{C}\{\infty\}$  ταυτίζεται με τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας.  $\square$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να έχουμε τον παρακάτω ορισμό :

**Ορισμός 3.36** (Karampetakis) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$ . Οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ονομάζονται **ρητά ισοδύναμοι** (*rational equivalent*) εαν υπάρχουν καινουργικά ρητοί πίνακες (strictly proper)  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (3.80)$$

δεδομένου ότι οι σύνθετοι πίνακες :

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

α) έχουν πλήρη τάξη, (3.82α)

β) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ , (3.82β)

γ) οι παρακάτω McMillan συνθήκες ικανοποιούνται :

$$\delta_M(M(s) \ P_2(s)) = \delta_M(P_2(s)) \quad \text{και} \quad \delta_M \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \delta_M(P_1(s)) \quad (3.82\gamma)$$

□

**Θεώρημα 3.37** Εαν  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$  είναι ρητά ισοδύναμοι τότε έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

**Απόδειξη** Οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι ρητά ισοδύναμοι και συνεπώς υπάρχουν καινουργικοί ρητοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.83)$$

δεδομένου ότι οι συνθήκες (3.82α,β,γ) ικανοποιούνται. Εστω οι επόμενες πρώτες πολυωνυμικές εκφράσεις :

$$[M(s) \ P_2(s)] = D^{-1}([M \ P_2])[\bar{N}(M) \ \bar{N}(P_2)] \quad (3.84\alpha)$$

και

$$\begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}(P_1) \\ -\bar{N}(N) \end{bmatrix} D^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ -N \end{bmatrix} \quad (3.84\beta)$$

Εχουμε ότι :

$$\deg D([M \ P_2]) = \nu [M(s) \ P_2(s)] = \nu [M(s) \ P_{2sp}(s) + P_{2pol}(s)] =$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2.74)}{=} \nu [M(s) P_{2sp}(s)] = \delta_M [M(s) P_2(s)] - \delta_M [P_{2po1}(s)] = \\
& \stackrel{(3.82\gamma)}{=} \delta_M [P_2(s)] - \delta_M [P_{2po1}(s)] = \nu [P_{2sp}(s)] = \\
& \stackrel{(2.74)}{=} \nu [P_{2sp}(s) + P_{2po1}(s)] = \nu [P_2(s)] \tag{3.85}
\end{aligned}$$

Έτσι η αριστερή πολυωνυμική κλασματική έκφραση

$$P_2(s) = D^{-1}([M P_2]) \bar{N}(P_2) \tag{3.86}$$

είναι πρώτη και η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $D([M P_2])$  ταυτίζεται με την δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα  $P_2(s)$ . Εστω τώρα μια άλλη πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του ρητού πίνακα  $P_2(s)$ :

$$P_2(s) = D_2^{-1}(s) N_2(s) \tag{3.87}$$

Τότε η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  των  $D([M P_2])$  και  $D_2(s)$  είναι ταυτόσημες. Συνέπεια αυτού λοιπόν είναι ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες  $L(s)$  και  $R(s)$  τέτοιοι ώστε:

$$L^{-1}(s) D_2(s) = D([M P_2]) R(s) \tag{3.88}$$

Από τις σχέσεις (3.86–3.88) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
N_2(s) & \stackrel{(3.87)}{=} D_2(s) P_2(s) \stackrel{(3.86)}{=} D_2(s) D^{-1}([M P_2]) \bar{N}(P_2) = \\
& \stackrel{(3.88)}{=} [D_2(s) R(s) D_2^{-1}(s) L(s)] \bar{N}(P_2) \tag{3.89}
\end{aligned}$$

Θεωρείστε τον πίνακα:

$$D_2(s) R(s) D_2^{-1}(s) L(s) \tag{3.90}$$

Οι πίνακες όμως  $R(s)$  και  $L(s)$  είναι αντιστρέψιμοι και συνεπώς η ορίζουσα του  $\|R(s)\| \|L(s)\|$  είναι ίση με ένα σταθερό στοιχείο διάφορο του μηδενός. Αρα από την (3.89) έχουμε ότι οι  $N_2(s)$  και  $\bar{N}(P_2)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή  $\mathbb{C}$ . Έτσι η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα  $P_2(s)$  είναι η ίδια με την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $\bar{N}(P_2)$ . Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα  $P_1(s)$  είναι η ίδια με την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $\bar{N}(P_1)$ . Από την σχέση (3.84)

παίρουμε την ακόλουθη γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία :

$$(\bar{N}(M) \quad \bar{N}(P_2)) \begin{bmatrix} \bar{N}(P_1) \\ -\bar{N}(N) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.91)$$

και συνεπώς από το λήμμα 3.4 οι πολυωνυμικοί πίνακες  $\bar{N}(P_1)$  και  $\bar{N}(P_2)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης ή ισοδύναμα οι ρητοί πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

Η συνθήκη (3.82β) και το ότι οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  είναι καινοτικοί ρητοί πίνακες μας εξασφαλίζει ότι οι πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα ρητά ισοδύναμοι και συνεπώς από το θεώρημα 3.17 έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $s=\infty$ .  $\square$

**Συμπέρασμα 3.38** Μπορούμε να δείξουμε κατά τον ίδιο τρόπο με το συμπέρασμα 3.34, διαμέσου του θεωρήματος 3.37 ότι οι McMillan συνθήκες (3.82γ) μπορούν κάλλιστα να αντικατασταθούν από τις ελάχιστης τάξης (*least order*) συνθήκες :

$$\nu(M(s) \quad P_2(s)) = \nu(P_2(s)) \quad \text{και} \quad \nu \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \nu(P_1(s)) \quad (3.92)$$

Είναι φανερό ότι η συνθήκη (3.92) αποτρέπει την απλοποίηση πεπερασμένων πόλων του πίνακα  $N(s)$  (αντιστ.  $M(s)$ ), που εμπεριέχουν πόλους του  $P_1(s)$  (αντιστ.  $P_2(s)$ ), με ταυτόχρονη προσθήκη πεπερασμένων μηδενικών στον πίνακα  $P_1(s)$  (αντιστ.  $P_2(s)$ ).  $\square$

Η σχέση που συνδέει τον μετασχηματισμό της γενικευμένης πολυωνυμικής (ρητής) ισοδυναμίας και τον μετασχηματισμό της ισχυρής ισοδυναμίας φαίνεται στο παρακάτω :

**Θεώρημα 3.39** Εάν  $(P_1(s), P_2(s)) \in \mathcal{P}_0(p,m) \times \mathcal{P}_0(p,m)$  είναι πολυωνυμικά ισοδύναμοι (ή ρητά ισοδύναμοι) τότε είναι και ισχυρά ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Εάν οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι πολυωνυμικά ισοδύναμοι (ή ρητά ισοδύναμοι) τότε έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης και συνεπώς από το

θεώρημα 3.28 θα είναι και ισχυρά ισοδύναμοι.  $\square$

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει όπως φαίνεται στο παρακάτω

**Παράδειγμα 3.40** Θεωρείστε το παράδειγμα 3.20. Οι πίνακες  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης και συνεπώς είναι ισχυρά ισοδύναμοι σύμφωνα με το θεώρημα 3.28. Παρ'όλα αυτά οι  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  δεν είναι τέλεια ισοδύναμοι, ή ισοδύναμα, πλήρως ισοδύναμοι σύμφωνα με το λήμμα 3.26. Αρα η ισχυρή ισοδυναμία δεν συνεπάγεται την πλήρη ισοδυναμία που στην περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων ταυτίζεται με την πολυωνυμική ισοδυναμία.  $\square$

Μια εύλογη παρατήρηση που προκύπτει από την πολυωνυμική (ρητή) ισοδυναμία είναι ότι οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  στον μετασχηματισμό (3.1) πρέπει να είναι πολυωνυμικοί (καινοικία ρητοί). Όπως θα δούμε όμως στο παρακάτω κεφάλαιο την θέση των πολυωνυμικών (καινοικία ρητών) πινάκων  $M(s)$  και  $N(s)$  μπορεί να πάρει οποιοσδήποτε ρητός πίνακας κάτω από τις ίδιες συνθήκες (3.53) [(3.82)] και να μας δώσει τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα πρδ. θεώρημα 3.33 (θεώρημα 3.37). Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της πολυωνυμικής ισοδυναμίας στο  $\mathbb{C}\{s\}$  φαίνεται στο παρακάτω :

**Λήμμα 3.41** Θεωρείστε μια δεξιά πολυωνυμική κλασματική έκφραση ενός πίνακα  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$

$$G(s) = N(s) D(s)^{-1} \quad (3.93)$$

όπου ο σύνθετος πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Τότε η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς και το έλλειμμα τάξης του ρητού πίνακα  $G(s)$  είναι ίδια με την αντίστοιχη δομή του πολυωνυμικού πίνακα :

$$\begin{bmatrix} D(s) & -I_m \\ N(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$



**Απόδειξη** Θεωρείστε τον παρακάτω μετασχηματισμό :

$$(0_{pm} \ I_p) \begin{bmatrix} D(s) & -I_m \\ N(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} = N(s)D(s)^{-1} (D(s) \ 0) \quad (3.96)$$

Παρατηρούμε ότι ο σύνθετος ρητός πίνακας :

$$(0_{pm} \ I_p \ N(s)D(s)^{-1}) = (0_{p'm} \ I_p \ N(s)) \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & D(s) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.97)$$

έχει την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του ρητού πίνακα  $(0 \ I \ N(s))$ , μα που η σχέση (3.97) είναι μια δεξιά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση πρδ.ο πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} 0 & I_p & N(s) \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & D(s) \end{bmatrix} \underset{\text{ισοδύναμοι}}{\overset{\text{αντιστρέψιμα}}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N(s) \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & D(s) \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

και συνεπώς δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ . Επίσης ο ίδιος ρητός πίνακας δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$  λόγω του ότι εμπεριέχει τον μοναδιαίο πίνακα και συνεπώς μπορώ να επεκτείνω την μικρότερη ορίζουσα που έχει ελάχιστη  $\delta_{\infty}(\cdot)$  με μονάδες από τον μοναδιαίο πίνακα.

Αποτέλεσμα από την (2.43) είναι να μην έχω μηδενικά στο  $s=\infty$ . Είναι φανερό επίσης ότι

$$\delta_M[0_{pm} \ I_p \ N(s)D(s)^{-1}] = \delta_M[N(s)D(s)^{-1}] \quad (3.99)$$

εφόσον από τις σχέσεις (2.76) και (2.81) είναι φανερό ότι δεν παίζουν ρόλο οι σταθεροί πίνακες στον McMillan βαθμό ενός ρητού πίνακα.

Ο δεύτερος σύνθετος πολυωνυμικός πίνακας :

$$\begin{bmatrix} D(s) & -I_m \\ N(s) & 0_{pm} \\ D(s) & 0_m \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

είναι αυστηρά ισοδύναμος με τον πολυωνυμικό πίνακα (3.94) όπως φαίνεται από τον παρακάτω αυστηρά ισοδύναμο μετασχηματισμό :

$$\begin{bmatrix} -I_m & 0 & I_m \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) & -I_m \\ N(s) & 0_{pm} \\ D(s) & 0_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_m & I_m \\ N(s) & 0_{pm} \\ D(s) & 0_m \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

και συνεπώς λόγω υπόθεσης δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Ικανοποιεί επίσης την συνθήκη :

$$\delta_M \begin{bmatrix} D(s) & -I_m \\ N(s) & 0_{pm} \\ D(s) & 0_m \end{bmatrix} \stackrel{(3.101)}{=} \delta_M \begin{bmatrix} 0_m & I_m \\ N(s) & 0_{pm} \\ D(s) & 0_m \end{bmatrix} \stackrel{(2.81)}{=} \delta_M \begin{bmatrix} D(s) & 0_m \\ N(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \stackrel{(2.81)}{=} \delta_M \begin{bmatrix} D(s) & -I_m \\ N(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Αρα η σχέση (3.96) είναι μια σχέση πολυωνυμικής ισοδυναμίας και συνεπώς ο ρητός πίνακας της σχέσεως (3.93) και ο πολυωνυμικός πίνακας της σχέσης (3.95) έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.  $\square$

### 3.5 Περίληψη

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου είδαμε την εξέλιξη των μετασχηματισμών που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και το έλλειμμα τάξης, πολυωνυμικών πινάκων ξεκινώντας με την αυστηρή ισοδυναμία και την αντιστρέψιμη ισοδυναμία για πίνακες ιδίων διαστάσεων και ακολούθως με την γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία για πίνακες όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων. Η πρώτη ενότητα του κεφαλαίου κλείνει με την παρουσίαση της γενικευμένης πολυωνυμικής ισοδυναμίας η οποία όπως αποδεικνύεται αποτελεί μια γενίκευση όλων των παραπάνω μετασχηματισμών για την γενική κατηγορία των ρητών πινάκων, όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων.

Στην δεύτερη ενότητα του κεφαλαίου αναφέρουμε τα είδη των ισοδυναμιών που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $s=\infty$  και το έλλειμμα τάξης ρητών πινάκων, όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων πρδ. δικανονική ισοδυναμία, γενικευμένη ρητή ισοδυναμία.

Την ειοποίηση όλων των παραπάνω θεωριών για την ταυτόχρονη μελέτη της μηδενικής δομής στο  $\mathbb{C}\{w\}$  ερχόμαστε να δώσουμε στην τρίτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού, ξεκινώντας με τους γνωστούς μετασχηματισμούς της τέλειας ισοδυναμίας για πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες και της πλήρους ισοδυναμίας για πολυωνυμικούς πίνακες. Στην συνέχεια ερχόμαστε να γενικεύσουμε τις ισοδυναμίες αυτές, για την περίπτωση των ρητών πινάκων, με τρία καινούργια είδη ισοδυναμιών : την ισχυρή ισοδυναμία, την πολυωνυμική ισοδυναμία και τέλος την ρητή ισοδυναμία. Παρ'όλο που αποδεικνύουμε την ταύτιση των μηδενικών δομών στο  $\mathbb{C}\{w\}$ , ρητών πινάκων που συνδέονται με τα καινούργια αυτά είδη ισοδυναμιών, ανοικτό ερώτημα παραμένει το αναλλοίωτο της δεξιάς και αριστερής μηδενικής δομής πινάκων κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς. Παραδείγματα όπως αυτό του λήμματος 3.41 μας δείχνουν (Verghese 1979) ότι κάτι τέτοιο πρέπει να συμβαίνει, παρ'όλα αυτά περισσότερη έρευνα στο πεδίο αυτό πιστεύουμε ότι είναι αναγκαία. Ένα επίσης ερώτημα που γεννιέται μέσω του κεφαλαίου αυτού είναι αν μπορεί να υπάρξει ένα είδος ισοδυναμίας που να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή ρητών πινάκων σε μια γενική περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{w\}$  και συνεπώς να γενικεύει όλα τα γνωστά αυτά αποτελέσματα ; Την απάντηση στο ερώτημα αυτό ερχόμαστε να απαντήσουμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [C1] Callier F.M. and Desoer C.A., 1982, *Multivariable Feedback Systems*, Springer—Verlang, New York
- [G1] Gantmacher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company.
- [H1] Hayton G.E. and Pugh A.C., 1985, Equivalence of generalized state—space systems : New Results. *Proc. MTNS'85*, Las Vegas, USA, pp.323—337.
- [H2] Hayton G.E., Walker A. and Pugh A.C., 1987, On a transformation for general polynomial matrices with applications., *Proc.MTNS'87*, Phoenix, USA.

- [H3] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications., *Int.J.Control*, **47**, 53–64.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems.*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J. .
- [P1] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **27**, 657–672.
- [P2] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, The infinite zeros of a rational matrix., *Report C.T.5.*
- [P3] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, On the zeros and poles of a rational matrix., *Int.J.Control*, **30**, 213–226.
- [P4] Pugh A.C. ,Hayton G.E and Fretwell P., 1987, On transformations of matrix pencils and implications in Linear System Theory. ,*Int.J.Control* ,**45** ,529–548.
- [P5] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1989, Transformations issues in Linear Systems Theory, Proceedings of the International Symposium MTNS–89, 107–116.
- [P6] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1992, On two transformations in the Generalized Theory of Linear Systems, *Mathematics Report Number A109*, Loughborough University, Loughborough.
- [P7] Pugh A.C., D.S.Johnson and Hayton G.E., 1990, On conditions guaranteeing two polynomial matrices possess identical zero structures., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC–37**, 1383–1386.
- [P8] Pugh A.C., Karampetakis N.P., G.E.Hayton and A.I.Vardulakis, 1992, Interpretation of a certain McMillan degree condition appearing in Control, I.M.A. C–MCI'92, U.M.I.S.T., 2–4 September 1992.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State–Space and Multivariable Theory*, Nelson ,London.
- [S1] Smith M.C., 1981, Matrix fractions and strict system equivalence, *Int.J.Control*, **34**, 869–883.
- [V1] Vardulakis A.I.G., Limebeer D.J.N. and Karcanias N., 1982, Structure and Smith–McMillan form of a rational matrix at infinity., *Int.J.Control*, **35**, 701–725.
- [V2] Vardulakis A.I., 1991 ,*Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods*. Nelson–Wiley, London..

- [V3] Verghese G.C., 1979, *Infinite frequency behaviour in generalized dynamical systems.*, Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, CA.
- [W1] Walker A.B., 1988, *Equivalence Transformations for Linear Systems.* ,Ph.D. Thesis, Hull University, Hull, England.
- [W2] Walker A., Hayton G.E. and Pugh A.C., Linear system requirements of matrix transformations. Proc. 1st IMA Conference on Control Theory, UK.
- [W3] Wolovich S.A., 1974, *Linear Multivariable Systems.*, Springer–Verlag, New York.
- [Z1] Zhang Shou–Yuan, 1989, Generalized proper inverse of polynomial matrices and the existence of infinite decoupling zeros., *IEEE Trans.on Auto.Control*, **34**, 743–745.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4

### ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΡΗΤΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΠΕΡΙΟΧΗ $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{w\}$ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

- 4.1 Εισαγωγή.
- 4.2 Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων σε μια περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ .
- 4.3 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων σε μια περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{w\}$ .
- 4.4 Μηδενική δομή στο  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{w\}$  κάτω από ανάδραση εξόδου.
- 4.5 Συνθήκες απουσίας μηδενικών στο  $s=w$  ρητών πινάκων.
- 4.6 Περίληψη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

#### 4.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο προσπαθούμε να επιτύχουμε μια γενίκευση της όλης θεωρίας περί ισοδύναμων μετασχηματισμών ρητών πινάκων στο  $\mathbb{C}$  ή στο  $s=\infty$  ή στο  $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ . Πιο συγκεκριμένα μελετάμε ισοδύναμους μετασχηματισμούς μεταξύ ρητών πινάκων, όχι κατά ανάγκη ίδιων διαστάσεων, που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή των πινάκων αυτών σε μια συγκεκριμένη περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ . Μια από τις εφαρμογές της καινούργιας αυτής ισοδυναμίας στην Γραμμική Θεωρία Συστημάτων είναι όπως θα δούμε η μελέτη της μηδενικής δομής στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$  συναρτήσεων μεταφοράς έπειτα από  $\Omega$ -πολυωνυμική ανάδραση εξόδου. Μια επέκταση επίσης των γνωστών συνηθικών απουσίας μηδενικών στο  $s=\infty$  πολυωνυμικών πινάκων (Pugh et.al. 1992, Zhang 1989a, 1989b), στην περίπτωση των ρητών πινάκων προτείνεται.

#### 4.2 Αλγεβρική δομή ρητών πινάκων σε μια περιοχή $\Omega \subset \mathbb{C}$ .

Εστω η περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{C}$  είναι συμμετρικά τοποθετημένη ως προς τον άξονα των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ , του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}$ . Εστω επίσης μια ρητή συνάρτηση  $t(s) \in \mathbb{R}(s)$  η οποία μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$t(s) = t_{\Omega}(s) \hat{t}(s) \quad (4.1)$$

όπου  $t_{\Omega}(s) = n_{\Omega}(s)/d_{\Omega}(s)$  με  $n_{\Omega}(s), d_{\Omega}(s) \in \mathbb{R}[s]$  πρώτα μεταξύ τους και με όλα τα μηδενικά τους μέσα στην περιοχή  $\Omega$  και  $\hat{t}(s) = \hat{n}(s)/\hat{d}(s)$  με  $\hat{n}(s), \hat{d}(s) \in \mathbb{R}[s]$  πρώτα μεταξύ τους και με όλα τα μηδενικά τους έξω από την περιοχή  $\Omega$ . Ορίζουμε την απεικόνιση  $\delta_{\Omega} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  διαμέσου της :

$$\delta_{\Omega}(t(s)) := \begin{cases} \deg n_{\Omega}(s) - \deg d_{\Omega}(s) & t_{\Omega}(s) \neq 0 \\ -\infty & t_{\Omega}(s) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

όπου  $\deg(\cdot)$  δηλώνει τον συνήθη βαθμό του συγκεκριμένου πολυωνύμου. Η απεικόνιση  $\delta_{\Omega}(\cdot)$  είναι μια διακριτή εκτίμηση (*discrete valuation*) στο  $\mathbb{R}(s)$ . Στην περίπτωση που  $t(s)$  είναι ένα συνηθισμένο πολυώνυμο παρατηρούμε ότι  $\delta_{\Omega}(t(s)) \leq \deg(t(s))$  με ισότητα να ισχύει εάν και μόνο εάν όλα τα μηδενικά του  $t(s)$  βρίσκονται μέσα στην περιοχή  $\Omega$ . Τα μηδενικά του πολυωνύμου  $n_{\Omega}(s)$  (αντίστοιχα  $d_{\Omega}(s)$ ) ονομάζονται **μηδενικά** (*zeros*) (αντίστοιχα **πόλοι** (*poles*)) της ρητής συνάρτησης  $t(s)$  στην περιοχή  $\Omega$ . Εστω  $\mathbb{R}_{\Omega}(s)$  ο δακτύλιος των ρητών συναρτήσεων χωρίς πόλους στην περιοχή  $\Omega$ . Αυτές οι ρητές συναρτήσεις θα ονομάζονται  **$\Omega$ -πολυώνυμα** ( *$\Omega$ -polynomials*) (Pernebo 1981) και εάν  $t(s) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s)$  τότε  $\lim_{s \rightarrow s_0} t(s)$  υπάρχει  $\forall s_0 \in \Omega$ . Τα μοναδιαία στοιχεία στην περιοχή  $\Omega$  είναι οι ρητές συναρτήσεις  $t(s) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s) : t(s)\tilde{t}(s) = 1$  ή ισοδύναμα οι ρητές συναρτήσεις που δεν έχουν πόλους ή μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$  δηλ. ρητές συναρτήσεις της μορφής  $t(s) = \hat{n}(s)/\hat{d}(s)$  όπου  $\hat{n}(s)$  και  $\hat{d}(s)$  πρώτα μεταξύ τους και δεν περιέχουν πόλους ή μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$ . Τις μοναδιαίες αυτές συναρτήσεις τις ονομάζουμε  **$\Omega$ -αντιστρέψιμες συναρτήσεις** ( *$\Omega$ -unimodular functions*). Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια γενίκευση των αποτελεσμάτων του Pernebo (1981) για την περίπτωση των ρητών πινάκων.



**Λήμμα 4.1** Εστω  $t_1(s), t_2(s) \in \mathbb{R}(s)$ ,  $t_2(s) \neq 0$  και  $\delta_\Omega(t_1(s)) > \delta_\Omega(t_2(s))$ . Τότε υπάρχει  $\hat{q}(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)$  και  $r(s) \in \mathbb{R}(s)$  τέτοια ώστε :

$$t_1(s) = t_2(s) \hat{q}(s) + r(s) \quad (4.3)$$

όπου  $\delta_\Omega(r(s)) < \delta_\Omega(t_2(s))$  ή  $r(s) \equiv 0$ .

**Απόδειξη** Εστω  $t_i(s) = (\hat{n}_i(s)/\hat{d}_i(s))(n_{\Omega_i}(s)/d_{\Omega_i}(s))$ ,  $\hat{n}_i(s)$ ,  $\hat{d}_i(s)$ ,  $n_{\Omega_i}(s)$ ,  $d_{\Omega_i}(s) \in \mathbb{R}[s]$ ,  $i=1,2$ .

Από τον αλγόριθμο της ευκλείδιας διαίρεσης για πολυώνυμα και την υπόθεση  $\delta_\Omega(t_1(s)) > \delta_\Omega(t_2(s))$  έχουμε ότι υπάρχουν πολυώνυμα  $q(s)$  και  $p(s)$  τέτοια ώστε :

$$n_{\Omega_1}(s)d_{\Omega_2}(s) = q(s) [n_{\Omega_2}(s)d_{\Omega_1}(s)] + p(s) \quad (4.4)$$

όπου

$$\deg[p(s)] < \deg[n_{\Omega_2}(s)d_{\Omega_1}(s)] \quad (4.5)$$

ή  $p(s) \equiv 0$ . Εάν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της (4.4) με  $d_{\Omega_2}(s)d_{\Omega_1}(s)$  παίρνουμε ότι :

$$\frac{n_{\Omega_1}(s)}{d_{\Omega_1}(s)} = q(s) \frac{n_{\Omega_2}(s)}{d_{\Omega_2}(s)} + \frac{p(s)}{d_{\Omega_1}(s) d_{\Omega_2}(s)} \quad (4.6)$$

όπου

$$\deg[p(s)] < \deg[n_{\Omega_2}(s)] + \deg[d_{\Omega_1}(s)] \Rightarrow$$

$$\deg[p(s)] - \deg[d_{\Omega_1}(s)] < \deg[n_{\Omega_2}(s)] \Rightarrow$$

$$\deg[p(s)] - \deg[d_{\Omega_1}(s)] - \deg[d_{\Omega_2}(s)] < \deg[n_{\Omega_2}(s)] - \deg[d_{\Omega_2}(s)] \Rightarrow$$

$$\deg[p(s)] - \deg[d_{\Omega_1}(s)] - \deg[d_{\Omega_2}(s)] < \delta_\Omega(t_2(s)) \quad (4.7)$$

Η σχέση (4.6) γράφεται ισοδύναμα ως :

$$\frac{\hat{d}_1(s)}{\hat{n}_1(s)} \left[ \frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}_1(s)} \frac{n_{\Omega_1}(s)}{d_{\Omega_1}(s)} \right] = q(s) \frac{\hat{d}_2(s)}{\hat{n}_2(s)} \left[ \frac{\hat{n}_2(s)}{\hat{d}_2(s)} \frac{n_{\Omega_2}(s)}{d_{\Omega_2}(s)} \right] + \frac{p(s)}{d_{\Omega_1}(s) d_{\Omega_2}(s)} \Rightarrow$$

$$t_1(s) = \left[ q(s) \frac{\hat{d}_2(s)}{\hat{n}_2(s)} \frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}_1(s)} \right] t_2(s) + \frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}_1(s)} \frac{p(s)}{d_{\Omega_1}(s) d_{\Omega_2}(s)} \quad (4.8)$$

όπου βάσει της (4.7) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta_{\Omega} \left[ \frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}_1(s)} \frac{p(s)}{d_{\Omega_1}(s) d_{\Omega_2}(s)} \right] &= \delta_{\Omega} \left[ \frac{p(s)}{d_{\Omega_1}(s) d_{\Omega_2}(s)} \right] = \delta_{\Omega}(p(s)) - \delta_{\Omega}(d_{\Omega_1}(s)d_{\Omega_2}(s)) \leq \\ &\leq \deg p(s) - \deg d_{\Omega_1}(s) - \deg d_{\Omega_2}(s) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \deg n_{\Omega_2}(s) + \deg d_{\Omega_1}(s) - \deg d_{\Omega_1}(s) - \deg d_{\Omega_2}(s) = \delta_{\Omega}(t_2(s)) \quad (4.9)$$

και η ρητή συνάρτηση

$$\hat{q}(s) = q(s) \frac{\hat{d}_2(s)}{\hat{n}_2(s)} \frac{\hat{n}_1(s)}{\hat{d}_1(s)} \quad (4.10)$$

δεν έχει πόλους στην περιοχή  $\Omega$  που αποδεικνύει το θεώρημα.  $\square$

Για  $t(s) (\neq 0) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s)$ ,  $\delta_{\Omega}(t(s)) \geq 0$ , και έτσι το  $\delta_{\Omega}(t)$  χρησιμοποιείται ως βαθμός στο  $\mathbb{R}_{\Omega}(s)$ . Έτσι από το λήμμα 4.1, συμπεραίνουμε ότι ο  $\mathbb{R}_{\Omega}(s)$  είναι Ευκλείδιος δακτύλιος και συνεπώς δακτύλιος κύριων ιδεωδών.

**Ορισμός 4.2** Ο  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ονομάζεται  $\Omega$ -πολυωνυμικός ( $\Omega$ -polynomial) εάν  $\lim_{s \rightarrow s_0} T(s)$  υπάρχει  $\forall s_0 \in \Omega$ . Το σύνολο αυτών των πινάκων συμβολίζεται  $\mathbb{R}_{\Omega}(s)^{p \times m}$ . Ο  $T(s) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s)^{p \times p}$  ονομάζεται  $\Omega$ -αντιστρέψιμος ( $\Omega$ -invertible) στην περίπτωση που υπάρχει  $\hat{T}(s) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s)^{p \times p}$  τέτοιος ώστε :

$$T(s) \hat{T}(s) = I_p \quad (4.11)$$

ή ισοδύναμα εάν και μόνο εάν  $\lim_{s \rightarrow s_0} T(s) = T_0$  με  $\det |T_0| \neq 0 \quad \forall s_0 \in \Omega$ .  $\square$

Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και στηλών στον  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ορίζονται κατά τον ακόλουθο τρόπο :

- 1) εναλλαγή δύο γραμμών (στηλών) ( $\rho_i \longleftrightarrow \rho_j$ )
- 2) πολλαπλασιασμός μιας γραμμής (στήλης) με ένα  $\Omega$ -αντιστρέψιμο στοιχείο  $u(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)$  ( $\rho_i \longmapsto \rho_i u(s)$ )
- 3) πρόσθεση στην γραμμή (στήλη)  $i$  της γραμμής (στήλης)  $j$  επί ένα στοιχείο  $u(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)$ . ( $\rho_i \longmapsto \rho_i + \rho_j u(s)$ )

Αυτές οι στοιχειώδεις πράξεις είναι ισοδύναμες με πολλαπλασιασμό του πίνακα  $T(s)$  από αριστερά (από δεξιά) με στοιχειώδεις  $\Omega$ -αντιστρέψιμους πίνακες οι οποίοι προέρχονται από την εφαρμογή αυτών των στοιχειωδών πράξεων στον μοναδιαίο πίνακα  $I_{p(m)}$ .

**Ορισμός 4.3** (Karampetakis) Δύο ρητοί πίνακες  $T_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και  $T_2(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ονομάζονται  $\Omega$ -αντιστρέψιμα ισοδύναμοι ( $\Omega$ -unimodular equivalent i.e.  $\Omega$ -u.e.),  $\Omega$ -αριστερά αντιστρέψιμα ισοδύναμοι ( $\Omega$ -left unimodular equivalent i.e.  $\Omega$ -l.u.e.) ή τέλος  $\Omega$ -δεξιά αντιστρέψιμα ισοδύναμοι ( $\Omega$ -right unimodular equivalent  $\Omega$ -r.u.e.) εαν υπάρχουν  $\Omega$ -αντιστρέψιμοι πίνακες  $U_L(s) \in \mathbb{R}_\Omega[s]^{p \times p}$  και  $U_R(s) \in \mathbb{R}_\Omega[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε να έχω αντίστοιχα

$$U_L(s)T_1(s)U_R(s) = T_2(s) ; U_L(s)T_1(s) = T_2(s) ; T_1(s)U_R(s) = T_2(s) \quad (4.12) \quad \square$$

Παρατηρούμε μια αντιστοιχία της έννοιας της ισοδυναμίας και των στοιχειωδών πράξεων στην περιοχή  $\Omega$  με αυτών στο  $\mathbb{C}$  και στο  $s=\infty$ . Μια ανάλογη αντιστοιχία έχουμε όσον αφορά και την αλγεβρική δομή των ρητών πινάκων στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Πιο συγκεκριμένα ακολουθώντας τις μεθόδους των Verghese (1979), Vardulakis and Karcianas (1983) και Vardulakis (1991) παίρνουμε το παρακάτω

**Θεώρημα 4.4 [Smith–McMillan μορφή ενός ρητού πίνακα στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ]**

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ ,  $r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε ο  $T(s)$  είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμος ισοδύναμος με τον διαγώνιο πίνακα

$$S_{T(s)}^{\Omega}(s) = \text{block diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (4.13)$$

όπου τα  $\varepsilon_i(s), \psi_i(s) \in \mathbb{R}[s]$  έχουν ως μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα, έχουν μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$ , είναι πρώτα μεταξύ τους και ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

$$\varepsilon_i(s) \mid \varepsilon_{i+1}(s) \quad i \in r-1 \quad (4.14\alpha)$$

$$\psi_{i+1}(s) \mid \psi_i(s) \quad i \in r-1 \quad (4.14\beta)$$

Ο διαγώνιος ρητός πίνακας  $S_{T(s)}^{\Omega}(s)$  ονομάζεται **Smith–McMillan μορφή του  $T(s)$  στην περιοχή  $\Omega$** .

**Απόδειξη** Με εναλλαγές γραμμών και στηλών του πίνακα  $T(s)$  φέρνουμε το στοιχείο με τον μικρότερο βαθμό  $\delta_{\Omega}(\cdot)$  στην θέση (1,1). Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.3) μπορούμε να γράψουμε τα στοιχεία  $t_{ij}(s)$  με  $j=2,3,\dots,m$  ως  $t_{ij}(s) = t_{11}(s)q_{ij}(s) + r_{ij}(s)$  όπου  $q_{ij}(s) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s)$  και  $r_{ij}(s) \in \mathbb{R}(s)$  είναι μηδέν ή  $\delta_{\Omega}(r_{ij}(s)) < \delta_{\Omega}(t_{11}(s))$ . Αφαιρούμε την (στήλη 1)  $\times q_{ij}(s)$  από τις στήλες  $j=2,3,\dots,m$ . Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο με τις γραμμές 2,3,...,p. Στην συνέχεια φέρνουμε το στοιχείο με τον μικρότερο βαθμό  $\delta_{\Omega}(\cdot)$  στην θέση (1,1) και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία έως ότου τα υπόλοιπα  $t_{ij}(s)$  και  $t_{i1}(s)$  γίνουν μηδέν  $i=2,3,\dots,p$   $j=2,3,\dots,m$ . Κατά αυτόν τον τρόπο ο βαθμός  $\delta_{\Omega}(\cdot)$  των στοιχείων της πρώτης γραμμής και στήλης συνέχεια μειώνεται έως ότου η πρώτη γραμμή και στήλη να μηδενισθεί εκτός από το στοιχείο στην θέση (1,1). Εάν μια από τις στήλες 2,3,...,m περιέχει ένα στοιχείο που δεν είναι δυνατό να διαιρεθεί χωρίς υπόλοιπο σύμφωνα με την σχέση (4.3) τότε προσθέτουμε την στήλη αυτή στην πρώτη στήλη. Ο βαθμός  $\delta_{\Omega}(\cdot)$  του στοιχείου (1,1) μπορεί τώρα να μειωθεί ακόμη περισσότερο. Η διαδικασία τελειώνει εάν οι παρονομαστές  $d_{\Omega i i}(s)$  και  $d_{\Omega j 1}(s)$

των ρητών συναρτήσεων  $t_{1i}(s) = \frac{\hat{n}_{1i}(s)}{\hat{d}_{1i}(s)} \frac{n_{\Omega 1i}(s)}{d_{\Omega 1i}(s)}$  και  $t_{j1}(s) = \frac{\hat{n}_{j1}(s)}{\hat{d}_{j1}(s)} \frac{n_{\Omega j1}(s)}{d_{\Omega j1}(s)}$  με  $i=2,3,\dots,m$  και  $j=2,3,\dots,p$  διαιρούν τον παρονομαστή  $d_{\Omega 11}(s)$  της ρητής συνάρτησης  $t_{11}(s) = \frac{\hat{n}_{11}(s)}{\hat{d}_{11}(s)} \frac{n_{\Omega 11}(s)}{d_{\Omega 11}(s)}$  και ο παρονομαστής  $n_{\Omega 11}(s)$  είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $n_{\Omega 1i}(s)$  και  $n_{\Omega j1}(s)$  με  $i=2,3,\dots,m$  και  $j=2,3,\dots,p$ . Συνεχίζουμε με την ίδια διαδικασία για τον υποπίνακα που σχηματίζεται από τις γραμμές  $2,3,\dots,p$  και τις στήλες  $2,3,\dots,m$  έως ότου ο πίνακας  $T(s)$  πάρει μια διαγώνια μορφή. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία  $t_{ii}(s) = \frac{\hat{n}_{ii}(s)}{\hat{d}_{ii}(s)} \frac{n_{\Omega ii}(s)}{d_{\Omega ii}(s)}$  με τις  $\Omega$ -αντιστρέψιμες συναρτήσεις  $\frac{\hat{d}_{ii}(s)}{\hat{n}_{ii}(s)}$  και παίρνουμε την διαγώνια μορφή (4.13).  $\square$

**Ορισμός 4.5** (Karampetakis) Οι ρητές συναρτήσεις  $\varepsilon_i(s)/\psi_i(s) =: f_i(s)$   $i \in \mathbb{R}$  αποτελούν ένα πλήρες σύνολο αναλλοιώτων στην κλάση ισοδυναμίας  $E^{\mathbb{C}}$  των ισοδύναμων ρητών πινάκων στην περιοχή  $\Omega$  και τις ονομάζουμε **αναλλοιώτες ρητές συναρτήσεις** (*invariant rational functions*) του  $T(s)$ .  $\square$

**Ορισμός 4.6** (Karampetakis) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Ορίζουμε ως **μηδενικά** (zeros) (αντίστοιχα **πόλους** (poles)) του  $T(s)$  στην περιοχή  $\Omega$  τα μηδενικά των πολυωνύμων  $\varepsilon_i(s)$ ,  $i \in \mathbb{R}$  (αντίστοιχα των πολυωνύμων  $\psi_i(s)$ ,  $i \in \mathbb{R}$ ).  $\square$

**Ορισμός 4.7** (Pernebo 1981) Οι  $A(s) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s)^{p \times p}$  και  $B(s) \in \mathbb{R}_{\Omega}(s)^{p \times m}$  ονομάζονται  **$\Omega$ -αριστερά πρωτοί** ( $\Omega$ -left coprime) εαν και μόνο εαν

$$\text{rank}_{\mathbb{R}}(A(s_0), B(s_0)) = p \quad \forall s_0 \in \Omega \quad (4.15) \quad \square$$

Για  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ισχύουν τα επόμενα

**Πρόταση 4.8** (Pernebo 1981) Εστω  $T_1(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times \ell}$ ,  $T_2(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times t}$ ,  $\ell+t =: m \geq p = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)}[T_1(s), T_2(s)]$ . Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- 1) Οι  $T_1(s), T_2(s)$  είναι  $\Omega$ -αριστερά πρώτοι.
- 2) Ο  $T(s) = [T_1(s), T_2(s)] \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times m}$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$ .
- 3) Υπάρχει ένας  $\Omega$ -αντιστρέψιμος πίνακας  $\tilde{T}_R(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{m \times m}$  τέτοιος ώστε
 
$$[T_1(s) \ T_2(s)] \tilde{T}_R(s) = [I_p \ 0_{p, m-p}] \equiv S_{T(s)}^\Omega(s)$$
 όπου  $S_{T(s)}^\Omega(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times m}$  είναι η Smith–McMillan form του  $T(s)$  στην περιοχή  $\Omega$ .
- 4)  $\text{rank}_{\mathbb{R}}[T_1(s_0) \ T_2(s_0)] = p \ \forall s_0 \in \Omega$ .
- 5) Υπάρχουν  $X(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{\ell \times p}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{t \times p}$  τέτοιοι ώστε
 
$$T_1(s)X(s) + T_2(s)Y(s) = I_p$$
- 6) Υπάρχουν  $T_3(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{(m-p) \times \ell}$  και  $T_4(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{(m-p) \times t}$  τέτοιοι ώστε ο πίνακας
 
$$\begin{bmatrix} T_1(s) & T_2(s) \\ T_3(s) & T_4(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{m \times m}$$
 να είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμος. □

Όπως στο σώμα των ρητών συναρτήσεων κάθε ρητή συνάρτηση γράφεται ως κλάσμα πρώτων μεταξύ τους πολυωνύμων σε μια περιοχή  $\Omega$ , το ίδιο συμβαίνει και στον ρητούς πίνακες.

**Πρόταση 4.9** Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ ,  $r \leq \min\{p, m\}$ . Τότε υπάρχουν (μη μοναδικοί)  $\Omega$ -αριστερά πρώτοι πολυωνυμικοί πίνακες  $A_1(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times p}$ ,  $B_1(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times m}$  τέτοιοι ώστε :

$$T(s) = A_1^{-1}(s) B_1(s) \quad (4.16)$$

Κάθε άλλη  $\Omega$ -αριστερά πρώτη παραγοντοποίηση  $\tilde{A}_1^{-1}(s) \tilde{B}_1(s)$  είναι τέτοια ώστε :

$$\tilde{A}_1(s) = U_L(s) A_1(s) \quad \text{και} \quad \tilde{B}_1(s) = U_L(s) B_1(s) \quad (4.17)$$

όπου  $U_L(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times p}$  είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμος πίνακας.

**Απόδειξη** Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται κατά τον ίδιο τρόπο με το αντίστοιχο αποτέλεσμα για πολυωνυμικούς πίνακες. (πρδ. Rosenbrock (1970) pp.139)  $\square$

**Ορισμός 4.10** (Karampetakis) Η έκφραση (4.16) ονομάζεται  $\Omega$ -αριστερά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση ( $\Omega$ -Π.Κ.Ε) του  $T(s)$  ( $\Omega$ -left (right) coprime matrix fraction description ( $\Omega$ -MFD)).  $\square$

Ο ορισμός 4.7 μπορεί τώρα να γενικευτεί έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει και ρητούς πίνακες και όχι απλά  $\Omega$ -πολυωνυμικούς πίνακες.

**Ορισμός 4.11** (Karampetakis) Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times p}$  και  $B(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Θεωρείστε την  $\Omega$ -πρώτη Π.Κ.Ε. του

$$(A(s) \ B(s)) = D_1^{-1}(s) (\bar{A}(s) \ \bar{B}(s)) \quad (4.18)$$

Οι  $A(s)$  και  $B(s)$  είναι  $\Omega$ -αριστερά πρώτοι ( $\Omega$ -left coprime) εαν και μόνο εαν οι  $\Omega$ -πολυωνυμικοί πίνακες  $\bar{A}(s)$  και  $\bar{B}(s)$  είναι  $\Omega$ -αριστερά πρώτοι.  $\square$

**Παρατήρηση 4.12** Οπως και στην πρόταση 4.8 έτσι και εδώ εαν οι ρητοί πίνακες  $A(s)$  και  $B(s)$  είναι  $\Omega$ -αριστερά πρώτοι τότε ο ρητός πίνακας  $(A(s) \ B(s))$  έχει πλήρη τάξη και δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Επειδή όμως δεν είναι δυνατός ο ορισμός στην περίπτωση που  $\Omega \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  γι'αυτόν τον λόγο θα θεωρούμε δύο ρητούς πίνακες  $A(s)$  και  $B(s) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ -αριστερά πρώτους εαν και μόνο εαν ο ρητός πίνακας  $(A(s) \ B(s))$  έχει πλήρη τάξη και δεν περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .  $\square$

Ομοιοι ορισμοί με τους παραπάνω μπορούν να δοθούν και για  $\Omega$ -δεξιά πρώτους πίνακες ( $\Omega$ -right coprime matrices). Ορίζουμε κάθε  $p \times m$  πολυωνυμικό πίνακα στην περιοχή  $\Omega$  σαν τον  $B_1(s)$  ως **αριθμητή** (numerator) του  $T(s)$  και κάθε  $p \times p$  πολυωνυμικό πίνακα στην περιοχή  $\Omega$  σαν τον  $A_1(s)$  ως **παρονομαστή** (denominator) του  $T(s)$ . Κατά τον συνήθη τρόπο

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} & \Deltaομή των μηδενικών στην περιοχή  $\Omega$  του  $T(s) \equiv$  \\ & \equiv \Deltaομή των μηδενικών του  $B_1(s) (B_2(s))$  στην περιοχή  $\Omega$  \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} & \Deltaομή των πόλων του  $T(s)$  στην περιοχή  $\Omega \equiv$  \\ & \equiv \Deltaομή των μηδενικών του  $A_1(s) (A_2(s))$  στην περιοχή  $\Omega$  \end{aligned} \quad (4.20)$$

**Ορισμός 4.13** (Karampetakis) Εάν  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\infty\}$  τότε ο  $\Omega$ -ελάχιστος βαθμός ( $\Omega$ -least order) του  $T(s)$ , συμβολίζεται  $\nu_\Omega(T(s))$ , είναι ο συνολικός αριθμός των πόλων του  $T(s)$  που βρίσκονται στην περιοχή  $\Omega$ , μετρημένος σύμφωνα με βαθμό και πολλαπλότητα.  $\square$

**Συμπέρασμα 4.14** Όταν  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  τότε η Π.Κ.Ε. (4.16) είναι  $\Omega$ -αριστερά πρώτη εάν και μόνο εάν

$$\delta_\Omega(|A_1(s)|) = \nu_\Omega(T(s)) \quad (4.21) \quad \square$$

### 4.3 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί ρητών πινάκων σε μια περιοχή $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\infty\}$ .

Είναι πολύ ενδιαφέρον να ξέρουμε εάν υπάρχουν μετασχηματισμοί οι οποίοι διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή σε μια περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , ρητών πινάκων όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων. Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  λόγω του ότι υπάρχουν μερικά τεχνικά προβλήματα στο να εξετάσουμε το μαγαδικό επίπεδο ταυτόχρονα με το  $s=\infty$  (πρδ.  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\infty\}$ ) όπως σημειώνεται και από τον Pernebo (1981). Μπορούμε εδώ να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που θέλουμε να θεωρήσουμε ως  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\infty\}$ , ένας διγραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να εφαρμοστεί και να μεταφέρει το πρόβλημα σε μια καινούργια περιοχή  $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$ . Εστω  $\mathcal{P}(p,m)$  και  $\mathcal{P}_\Omega(p,m)$  τα σύνολα των  $(r+p) \times (r+m)$  ρητών και  $\Omega$ -πολυωνυμικών πινάκων αντίστοιχα, όπου  $r \geq \max(-p, -m)$ .



**Ορισμός 4.15** (Karampetakis) Οι  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  ονομάζονται  $\Omega$ -ισοδύναμοι ( $\Omega$ -equivalent) εάν υπάρχουν ρητοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (4.22)$$

ή ισοδύναμα

$$(M(s) \ P_2(s)) \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

όπου οι υποπίνακες των σύνθετων πινάκων

$$(M(s) \ P_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

(πρδ.  $M(s)$  και  $P_2(s)$  ή  $P_1(s)$  και  $N(s)$ ) είναι  $\Omega$ -αριστερά και  $\Omega$ -δεξιά πρώτοι αντίστοιχα και ικανοποιούν τις παρακάτω  $\Omega$ -ελάχιστης τάξης ( $\Omega$ -least order) συνθήκες :

$$\nu_{\Omega}(M(s) \ P_2(s)) = \nu_{\Omega}(P_2(s)) \quad \text{και} \quad \nu_{\Omega} \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \nu_{\Omega}(P_1(s)) \quad (4.25) \quad \square$$

#### Θεώρημα 4.16

(α) Εάν  $\Omega \in \mathbb{C}U\{\infty\}$  ή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  τότε η  $\Omega$ -αντιστρέψιμη ισοδυναμία συνεπάγεται την  $\Omega$ -ισοδυναμία.

(β) Εάν  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\infty\}$  και  $\Omega_1 \subset \Omega$  τότε η  $\Omega$ -ισοδυναμία συνεπάγεται την  $\Omega_1$ -ισοδυναμία.

#### Απόδειξη

(α) Εστω  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμα ισοδύναμοι όπου  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  κάτω από τον  $\Omega$ -αντιστρέψιμο ισοδύναμο μετασχηματισμό :

$$P_2(s) = U_L(s) P_1(s) U_R(s) \quad (4.26)$$

όπου  $U_L(s)$  και  $U_R(s)$  είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμοι πίνακες. Η (4.26) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$U_L^{-1}(s) P_2(s) = P_1(s) U_R(s) \Leftrightarrow \tilde{U}_L(s) P_2(s) = P_1(s) U_R(s) \quad (4.27)$$

όπου  $\tilde{U}_L(s) = U_L^{-1}(s)$  είναι επίσης  $\Omega$ -αντιστρέψιμος πίνακας, και συνεπώς δεν έχει πόλους στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Έτσι η δομή των πόλων του σύνθετου πίνακα

$$(\tilde{U}_L(s) P_1(s)) \quad (4.28)$$

ταυτίζεται ακριβώς με αυτήν του ρητού πίνακα  $P_1(s)$  και έτσι ο πίνακας (4.28) ικανοποιεί τις  $\Omega$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες. Εστω τώρα  $P_1(s) = D_\Omega^{-1}(s) N_\Omega(s)$  είναι μια  $\Omega$ -δεξιά πρώτη Π.Κ.Ε. του  $P_1(s)$ . Τότε

$$(\tilde{U}_L(s) P_1(s)) = D_\Omega^{-1}(s) (D_\Omega(s) \tilde{U}_L(s) N_\Omega(s)) \quad (4.29)$$

είναι μια  $\Omega$ -Π.Κ.Ε. του σύνθετου πίνακα (4.28). Παρατηρήστε ότι ο  $\Omega$ -πολυωνυμικός πίνακας

$$(D_\Omega(s) D_\Omega(s) \tilde{U}_L(s) N_\Omega(s)) \quad (4.30)$$

είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμο ισοδύναμο με τον  $\Omega$ -πολυωνυμικό πίνακα

$$(D_\Omega(s) \ 0 \ N_\Omega(s)) = (D_\Omega(s) \ D_\Omega(s) \tilde{U}_L(s) \ N_\Omega(s)) \begin{bmatrix} I & -\tilde{U}_L(s) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

ο οποίος δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$ . Έτσι η  $\Omega$ -Π.Κ.Ε. (4.29) είναι αριστερά πρώτη Π.Κ.Ε. και συνεπώς τα μηδενικά του σύνθετου πίνακα  $(D_\Omega(s) \tilde{U}_L(s) \ N_\Omega(s))$  ταυτίζονται με τα μηδενικά του σύνθετου πίνακα (4.28). Παρ'όλα αυτά

$$(D_\Omega(s) \tilde{U}_L(s) \ N_\Omega(s)) = (D_\Omega(s) \ N_\Omega(s)) \begin{bmatrix} \tilde{U}_L(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

είναι μια  $\Omega$ -αντιστρέψιμη ισοδυναμία και συνεπώς τα μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$  του σύνθετου πίνακα (4.28) ή ισοδύναμα τα μηδενικά του  $(D_\Omega(s) \tilde{U}_L(s) \ N_\Omega(s))$  ταυτίζονται μ'αυτά του  $(D_\Omega(s) \ N_\Omega(s))$  ο οποίος φυσικά δεν έχει. Έτσι ο σύνθετος πίνακας (4.28) δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$ . Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να

δείξουμε ότι ο σύνθετος πίνακας  $(P_2(s)^T \ U_R(s)^T)^T$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$  και έτσι η (4.27) είναι μια  $\Omega$ -ισοδυναμία στην περίπτωση που  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Στην περίπτωση που  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν δικαιοδικό μετασχηματισμό που θα ανάγει το πρόβλημα στην περίπτωση όπου  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  και το αποτέλεσμα που θέλουμε ακολουθεί ανάλογα.

- (β) Εστω  $P_1(s), P_2(s)$  είναι  $\Omega$ -ισοδύναμοι, κάτω από τον μετασχηματισμό (4.22) με  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Εάν  $s_0 \in \Omega$  είναι ένας πόλος του  $P_2(s)$  τότε το  $s_0$  είναι επίσης πόλος του σύνθετου πίνακα  $(M(s) \ P_2(s))$  του οποίου οι πολλαπλότητες μπορούν να είναι μόνο μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του  $P_2(s)$ , επειδή ο  $M(s)$  είναι ρητός πίνακας. Εάν ο  $M(s)$  είναι τέτοιος ώστε να αυξάνει τις πολλαπλότητες του  $P_2(s)$  τότε οι  $\Omega$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες δεν μπορούν να ισχύουν. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι  $\Omega$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες θα ικανοποιούνται ως προς κάθε σημείο  $s_0 \in \Omega$ . Έτσι εάν αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται για την συγκεκριμένη περιοχή  $\Omega$ , τότε θα πρέπει να ικανοποιούνται για κάθε υποπεριοχή του  $\Omega$ ,  $\Omega_1 \subseteq \Omega$ . Είναι πολύ εύκολο επίσης να παρατηρηθεί ότι εάν ο σύνθετος πίνακας  $(M(s) \ P_2(s))$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$  αμέσως συνεπάγεται ότι δεν θα έχει μηδενικά σε οποιαδήποτε περιοχή  $\Omega_1 \subseteq \Omega$ . Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τον σύνθετο πίνακα  $(P_1(s)^T \ -N(s)^T)^T$  το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

#### Συμπέρασμα 4.17

- (α) Εάν οι  $\Omega$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες της  $\Omega$ -ισοδυναμίας ικανοποιούνται για την περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  τότε ικανοποιούνται και για κάθε σημείο  $s_0 \in \Omega$ .
- (β) Εάν  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p, m)$  είναι  $\Omega$ -ισοδύναμοι για  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι  $s_0$ -ισοδύναμοι για κάθε  $s_0 \in \Omega$  περιεχομένου και του σημείου  $s_0 = \infty$ .  $\square$

Σημειώστε ότι οι συνθήκες (α) και (β) του θεωρήματος 4.16 είναι μόνο αναγκαίες συνθήκες. Μπορούμε να το δούμε αυτό στο παρακάτω :

**Παράδειγμα 4.18** Εστω  $P_1(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2}$  και  $P_2(s) = s+1$ . Με  $\Omega \equiv \mathbb{C}$  θεωρείστε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\begin{pmatrix} (s+2)^2 & s+1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)^2} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.1})$$

Η σχέση (E.1) είναι ένας  $\Omega$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός. Μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί ότι οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια δομή μηδενικών στο  $\mathbb{C}$  αλλά διαφορετική δομή πόλων στο  $\mathbb{C}$  και συνεπώς οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  δεν είναι  $\mathbb{C}$ -αντιστρέψιμα ισοδύναμοι. Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι

$$\nu_{\mathbb{C}\{s\}}((s+2)^2 \quad s+1) = 2 \neq 1 = \nu_{\mathbb{C}\{s\}}(s+1) \quad (\text{E.2})$$

και συνεπώς οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  δεν είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι. Αυτό αποδεικνύει ότι το αντίστροφο της πρότασης (β) του θεωρήματος 4.16 δεν ισχύει.  $\square$

Η σημαντικότητα της  $\Omega$ -ισοδυναμίας φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 4.19** Η  $\Omega$ -ισοδυναμία στο  $\mathcal{P}(p,m)$  διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το έλλειμμα τάξης.

**Απόδειξη** Εστω  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  και

$$(M(s) \quad P_2(s)) = D_2^{-1}(s) (\tilde{M}(s) \quad \tilde{P}_2(s)) \quad ; \quad \begin{bmatrix} P_1(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1(s) \\ -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} D_1^{-1}(s) \quad (4.33)$$

είναι  $\Omega$ -πρώτες Π.Κ.Ε.. Τότε

$$\delta_{\Omega}(|D_2(s)|) = \nu_{\Omega}(M(s) P_2(s)) \stackrel{(4.25)}{:=} \nu_{\Omega}(P_2(s)) \quad (4.34)$$

το οποίο σημαίνει από το συμπέρασμα 4.14, ότι η  $\Omega$ -Π.Κ.Ε.

$$P_2(s) = D_2^{-1}(s) \tilde{P}_2(s) \quad (4.35)$$

είναι μια  $\Omega$ -αριστερά πρώτη Π.Κ.Ε. και συνεπώς η μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το έλλειμμα τάξης του  $P_2(s)$  και  $\tilde{P}_2(s)$  ταυτίζονται. Ομοια  $P_1(s) = \tilde{P}_1(s) D_1^{-1}(s)$  είναι μια  $\Omega$ -δεξιά πρώτη Π.Κ.Ε. και συνεπώς η δομή των μηδενικών στην περιοχή  $\Omega$  και το έλλειμμα τάξης των  $P_1(s)$  και  $\tilde{P}_1(s)$  ταυτίζεται. Έτσι από (4.22) και (4.33) έχουμε

$$(\tilde{M}(s) \tilde{P}_2(s)) \begin{bmatrix} \tilde{P}_1(s) \\ -\tilde{N}(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

όπου  $(\tilde{M}(s) \tilde{P}_2(s))$  και  $(\tilde{P}_1(s)^T - \tilde{N}(s)^T)^T$  έχουν πλήρη τάξη  $\forall s_0 \in \Omega$ . Από την πρόταση 4.8 έχουμε ότι υπάρχουν  $\Omega$ -πολυωνυμικοί πίνακες  $A_1(s)$ ,  $A_2(s)$ ,  $B_1(s)$ ,  $B_2(s)$  τέτοιοι ώστε

$$\tilde{M}(s)A_1(s) + \tilde{P}_2(s)B_1(s) = I_1 \quad (4.37)$$

$$A_2(s)\tilde{N}(s) + B_2(s)\tilde{P}_1(s) = I_2 \quad (4.38)$$

Από τις (4.36), (4.37) και (4.38) παίρνουμε ότι

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_2(s) & \tilde{M}(s) \\ -A_2(s) & B_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1(s) & -\tilde{N}(s) \\ A_1(s) & \tilde{P}_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

όπου

$$A_2(s) = -(A_2(s)B_1(s) - B_2(s)A_1(s)) \tilde{P}_2(s) + A_2(s) \quad (4.40\alpha)$$

και

$$B_2(s) = (A_2(s)B_1(s) - B_2(s)A_1(s)) \tilde{M}(s) + B_2(s) \quad (4.40\beta)$$

Από την (4.39) οι δύο  $\Omega$ -πολυωνυμικοί πίνακες στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμοι. Άρα

$$\begin{bmatrix} B_1(s) & -\tilde{N}(s) \\ A_1(s) & \tilde{P}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_2(s) & \tilde{M}(s) \\ -A_3(s) & B_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

που συνεπάγεται κατευθείαν ότι

$$\begin{bmatrix} B_1(s) & -\tilde{N}(s) \\ A_1(s) & \tilde{P}_1(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_2(s) & 0 \\ -A_3(s) & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & -\tilde{N}(s) \\ 0 & \tilde{P}_1(s) \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Έτσι επειδή οι  $\tilde{N}(s)$  και  $A_3(s)$  είναι  $\Omega$ -πολυωνυμικοί πίνακες άρα και οι

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_2(s) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_1(s) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι και συνεπώς οι  $\tilde{P}_1(s)$  και  $\tilde{P}_2(s)$  ή ισοδύναμα οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.  $\square$

Η  $\Omega$ -ισοδυναμία συνεπώς έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή ρητών πινάκων όχι κατ'ανάγκη των ίδιων διαστάσεων στην περιοχή  $\Omega$ . Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος μας δείχνει ότι οι  $\Omega$ -πολυωνυμικοί πίνακες  $D_1(s)$  και  $D_2(s)$  που εμπεριέχουν την δομή των πόλων στην περιοχή  $\Omega$  των ρητών πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  αντίστοιχα, μπορούν να απλοποιηθούν στην σχέση (4.22) κατά τον τρόπο της (4.36). Άρα η δομή των πόλων στην περιοχή  $\Omega$  δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από την  $\Omega$ -ισοδυναμία.

**Παράδειγμα 4.20** Θεωρείστε τον μετασχηματισμό του παραδείγματος 4.18

$$((s+2)^2 \quad s+1) \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+2)^2} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.1})$$

Ο (E.1) είναι ένας  $\mathbb{C}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός και συνεπώς οι πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ . Παρ'όλα αυτά ο  $P_1(s)$  έχει έναν πόλο στο  $s=-2$  ενώ ο  $P_2(s)$  δεν έχει κανέναν πόλο στο  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Θεώρημα 4.21** Εάν  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης τότε είναι  $\Omega$ -ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Εστω  $S_{P_1(s)}^\Omega(s)$  και  $S_{P_2(s)}^\Omega(s)$  οι Smith McMillan μορφές στην περιοχή  $\Omega$  των  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$ . Τότε υπάρχουν  $\Omega$ -αντιστρέψιμοι πίνακες  $U_1(s), U_2(s), U_3(s)$  και  $U_4(s)$  τέτοιοι ώστε

$$U_1(s) P_1(s) U_2(s) = S_{P_1(s)}^\Omega(s) = \text{block diag} \left[ \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, \mathbf{0} \right] \quad (4.44\alpha)$$

$$U_3(s) P_2(s) U_4(s) = S_{P_2(s)}^\Omega(s) = \text{block diag} \left[ \frac{1}{\tilde{\psi}_1(s)}, \dots, \frac{1}{\tilde{\psi}_{k-1}(s)}, \frac{\varepsilon_1(s)}{\tilde{\psi}_k(s)}, \dots, \frac{\varepsilon_r(s)}{\tilde{\psi}_{r+k-1}(s)}, \mathbf{0} \right] \quad (4.44\beta)$$

όπου  $S_{P_1(s)}^\Omega(s), S_{P_2(s)}^\Omega(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης. Τώρα

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Psi' & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] S_{P_2(s)}^\Omega(s) = S_{P_1(s)}^\Omega(s) \left[ \begin{array}{c|c} \Psi & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (4.45)$$

$$\Psi' = (\mathbf{0}_{r,k-1}, \text{diag}[\tilde{\psi}_k(s), \tilde{\psi}_{k+1}(s), \dots, \tilde{\psi}_{r+k-1}(s)])$$

$$\Psi = (\mathbf{0}_{r,k-1}, \text{diag}[\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_r(s)])$$

είναι ένας  $\Omega$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός λόγω του ότι οι σύνθετοι πίνακες της μορφής (4.24) που προκύπτουν από την (4.45) ισοδυναμία ικανοποιούν όλες τις συνθήκες του ορισμού 4.15. Από (4.44) και (4.45) έχουμε ότι

$$\left[ U_1^{-1}(s) \left[ \frac{\Psi'}{0} \middle| \frac{0}{I} \right] U_3(s) \right] P_2(s) = P_1(s) \left[ U_2(s) \left[ \frac{\Psi'}{0} \middle| \frac{0}{I} \right] U_4^{-1}(s) \right] \quad (4.46)$$

Ο μετασχηματισμός (4.46) είναι επίσης ένας  $\Omega$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός λόγω του ότι πολλαπλασιασμοί με  $\Omega$ -αντιστρέψιμους πίνακες δεν αλλάζουν τις συνθήκες που εμφανίστηκαν στον μετασχηματισμό (4.45).  $\square$

Από τα θεωρήματα 4.20 και 4.21 βλέπουμε ότι η  $\Omega$ -ισοδυναμία είναι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε δύο ρητοί πίνακες να έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης. Επίσης από το θεώρημα 4.21 έχουμε το ακόλουθο

**Συμπέρασμα 4.22** Οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  στην σχέση (4.22) μπορούν να παρθούν έτσι ώστε να είναι  $\Omega$ -πολυωνυμικοί.

**Απόδειξη** Η απόδειξη φαίνεται κατευθείαν από τη σχέση (4.46).  $\square$

**Συμπέρασμα 4.23** Εστω  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}_\Omega(p, m)$  της ίδιας διάστασης με  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι  $\Omega$ -αντιστρέψιμα ισοδύναμοι εάν και μόνο εάν είναι  $\Omega$ -ισοδύναμοι.

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Έχει αποδειχθεί στο (α) του θεωρήματος 4.16.

( $\Leftarrow$ ) Στην ειδική αυτή περίπτωση έχουμε πάντα την δυνατότητα σύμφωνα με το συμπέρασμα 4.22 να πάρουμε τους πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  ως  $\Omega$ -πολυωνυμικούς και πιο συγκεκριμένα  $\Omega$ -αντιστρέψιμους (δες 4.46), που αποδεικνύει το παραπάνω συμπέρασμα.  $\square$



Ένα άμεσο συμπέρασμα από τα παραπάνω είναι ότι η γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία του κεφ.3 ορίζει την ίδια κλάση ισοδυναμίας με την αντιστρέψιμη ισοδυναμία στην περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων ιδίων διαστάσεων. Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί επίσης να εφαρμοσθεί στην περίπτωση που  $\Omega \subset \mathbb{C}U\{\omega\}$ , κάτω από τον γνωστό δικαιοδικό μετασχηματισμό, το οποίο αποδεικνύει ότι η γενικευμένη ρητή ισοδυναμία του κεφ.3 ορίζει την ίδια κλάση ισοδυναμίας με την δικαιοδική ισοδυναμία (Vardulakis et.al. 1983, Vardulakis 1991) στην περίπτωση των κανονικά ρητών πινάκων, ιδίων διαστάσεων.

**Θεώρημα 4.24** Η  $\Omega$ -ισοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathcal{P}(p,m)$ .

**Απόδειξη**

(α) **Ανακλαστική ιδιότητα.**

Είναι προφανές ότι

$$I P(s) = P(s) I \quad (4.47)$$

είναι ένας  $\Omega$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός.

(β) **Συμμετρική ιδιότητα.**

Εστω  $P_1(s)$  και  $P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  είναι  $\Omega$ -ισοδύναμοι

$$\text{πρδ. } M(s) P_1(s) = P_2(s) N(s) \quad (4.48)$$

Τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης σύμφωνα με το θεώρημα 4.20. Έτσι θα υπάρχει ένας  $\Omega$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός της μορφής (4.46) μεταξύ των  $P_2(s)$  και  $P_1(s)$  που αποδεικνύει την συμμετρική ιδιότητα.

(γ) **Μεταβατική ιδιότητα.**

Εστω  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  και  $P_2(s), P_3(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  είναι  $\Omega$ -ισοδύναμοι

αντίστοιχα. Τότε οι  $P_1(s), P_2(s)$  και  $P_2(s), P_3(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης. Έτσι οι  $P_1(s)$  και  $P_3(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης και άρα από θεώρημα 4.21 οι  $P_1(s)$  και  $P_3(s)$  είναι  $\Omega$ -ισοδύναμοι. □

**Παράδειγμα 4.25** Στην ειδική περίπτωση που  $\Omega \equiv \mathbb{C}$  και  $P_1(s), P_2(s)$  είναι πολυωνυμικοί πίνακες η  $\Omega$ -ισοδυναμία ταυτίζεται με την γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (Pugh and Shelton, 1978). Αυτό συμβαίνει επειδή οι  $\Omega$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες, απαιτούν οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  να είναι πολυωνυμικοί, ενώ οι συνθήκες ότι οι σύνθετοι πίνακες στην (4.24) δεν έχουν μηδενικά στην περιοχή  $\Omega$  ανάγονται στις γνωστές συνθήκες της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας.  $\square$

**Παράδειγμα 4.26** Στην ειδική περίπτωση που  $\Omega \equiv \{s_0\}$  όπου  $s_0 \in \mathbb{C}$ , και  $P_1(s), P_2(s)$  είναι πολυωνυμικοί πίνακες, η  $\Omega$ -ισοδυναμία ανάγεται στην τοπική ισοδυναμία (local equivalence) (Cullen, 1987). Εάν  $\Omega \equiv \{\infty\}$ , τότε από συμπέρασμα 4.22 οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  μπορούν να παρθούν ως  $\{\infty\}$ -πολυωνυμικοί ή ισοδύναμα ως καιονικά ρητοί πίνακες. Εάν επιπλέον οι  $P_1(s), P_2(s)$  είναι πολυωνυμικοί πίνακες τότε οι  $\Omega$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες απλοποιούνται και η  $\Omega$ -ισοδυναμία ταυτίζεται με την γενικευμένη ρητή ισοδυναμία (Walker, 1988).  $\square$

Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση που προκύπτει είναι ποιό μετασχηματισμοί θα διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή ενός ρητού πίνακα στην περιοχή  $\Omega \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δείχνει ότι η  $\Omega$ -ισοδυναμία κάτω από τις ίδιες συνθήκες του ορισμού 4.15, ακόμη και εάν  $\Omega \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , μας δίνει μια απάντηση σ' αυτό το ερώτημα.

**Θεώρημα 4.27** Εάν οι  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  είναι  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ -ισοδύναμοι τότε έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης.

**Απόδειξη** Ας δηλώσουμε με  $A$  το σύνολο όλων των θέσεων των πόλων και των μηδενικών των  $P_1(s), P_2(s)$  στην περιοχή  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Επειδή οι  $P_1(s), P_2(s)$  είναι ρητοί πίνακες πάνω στο  $\mathbb{R}$  συμπεραίνουμε ότι το σύνολο  $A$  είναι πεπερασμένο και συμμετρικό σε σχέση με τον πραγματικό άξονα  $\mathbb{R}$ , και συνεπώς  $A \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Αρα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός  $\alpha \notin A$ . Από το θεώρημα 4.16β οι  $P_1(s), P_2(s)$  είναι  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{\alpha\}$ -ισοδύναμοι λόγω του ότι είναι

$\mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ —ισοδύναμοι. Έτσι από θεώρημα 4.20 οι  $P_1(s), P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\} \setminus \{\alpha\}$ . Από τον ορισμό του  $\alpha$  όμως, οι πίνακες  $P_1(s), P_2(s)$  δεν έχουν μηδενικά στο  $\alpha$  το οποίο μας δίνει και την απόδειξη του θεωρήματος.  $\square$

**Συμπέρασμα 4.28** Στην ειδική περίπτωση που οι πίνακες  $P_1(s), P_2(s)$  είναι πολυωνυμικοί, τότε η  $\mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ —ισοδυναμία ταυτίζεται με την πλήρη ισοδυναμία (Hayton et.al. 1988).

**Απόδειξη** Εάν οι  $P_1(s), P_2(s)$  είναι πολυωνυμικοί πίνακες τότε οι  $\mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ —ελάχιστης τάξης συνθήκες (4.25) ή ισοδύναμα από θεώρημα 4.16β, οι  $\mathbb{C}$ —ελάχιστης τάξης συνθήκες μας δίνουν ότι οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  πρέπει να μην έχουν πόλους στο  $\mathbb{C}$  και συνεπώς πρέπει να είναι πολυωνυμικοί. Αυτές οι συνθήκες λοιπόν ανάγονται κατευθείαν στις γνωστές McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας. Οι άλλες συνθήκες της  $\mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$  ισοδυναμίας ταυτίζονται ολοφάνερα με τις υπόλοιπες συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας.  $\square$

**Συμπέρασμα 4.29** Εάν οι  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  είναι  $\Omega$ —ισοδύναμοι για κάθε  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$  τότε οι  $P_1(s), P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega$ .

**Απόδειξη** Εάν  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  τότε από θεώρημα 4.20 έχουμε το αποτέλεσμα. Εάν  $\Omega \equiv \mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$  τότε από θεώρημα 4.27 έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. Εάν επίσης  $\Omega \subset \mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$  τότε εφαρμόζοντας τον γνωστό δικαιοδικό μετασχηματισμό μπορούμε να μεταθέσουμε την περιοχή  $\Omega$  σε μια άλλη περιοχή  $\Omega' \subseteq \mathbb{C}$  και να εφαρμόσουμε το θεώρημα 4.20.  $\square$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι ενώ στην περίπτωση που  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ή  $\Omega \subset \mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$  το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος ισχύει, στην περίπτωση που  $\Omega \equiv \mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$  το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει όπως φαίνεται στο παράδειγμα 3.20.

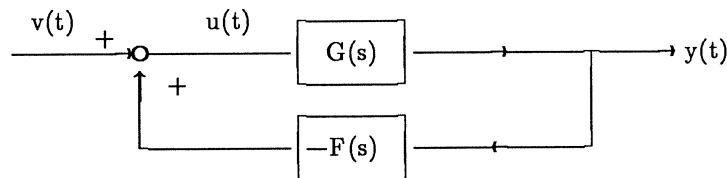
**Συμπέρασμα 4.30** Η πλήρης ισοδυναμία συνεπάγεται την γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία και την γενικευμένη ρητή ισοδυναμία.

**Απόδειξη** Εστω  $P_1(s), P_2(s)$  είναι δύο πολυωνυμικοί πίνακες που είναι πλήρως ισοδύναμοι, ή ισοδύναμα από το συμπέρασμα 4.28,  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι. Είναι φανερό ότι  $\{s\} \subset \mathbb{C}\{s\}$  και  $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\{s\}$  και έτσι από θεώρημα 4.16β, οι  $P_1(s), P_2(s)$  είναι και  $\{s\}$ -ισοδύναμοι και  $\mathbb{C}$ -ισοδύναμοι. Από τα παραδείγματα 4.25 και 4.26 όμως, η  $\{s\}$ -ισοδυναμία και η  $\mathbb{C}$ -ισοδυναμία ανάγονται στην γενικευμένη ρητή ισοδυναμία και γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία αντίστοιχα που μας δίνει την απόδειξη.  $\square$

#### 4.4 Μηδενική δομή στο $\Omega \subset \mathbb{C}\{s\}$ κάτω από ανάδραση εξόδου.

Εστω  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς ενός ανοικτού συστήματος. Εάν  $G_F(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος (Εικόνα 1) το οποίο σχηματίζεται έπειτα από ανάδραση εξόδου της μορφής

$$u(t) = -F(\rho)y(t) + v(t) \quad F(\rho) \in \mathbb{R}(\rho)^{m \times p} \quad (4.48)$$



Εικόνα 1

τότε

$$G_F(s) = G(s) (I_m + F(s)G(s))^{-1} = (I_p + G(s)F(s))^{-1} G(s) \quad (4.49)$$

με την προϋπόθεση ότι

$$|I_p + G(s)F(s)| \neq 0 \quad (\text{ή} \quad |I_m + F(s)G(s)| \neq 0) \quad (4.50)$$

Η μελέτη αναλλοίωτων της συνάρτησης μεταφοράς κάτω από ανάδραση εξόδου είναι μια από τις εφαρμογές της  $\Omega$ -ισοδυναμίας. Θεωρείστε τον μετασχηματισμό :

$$(I_p + G(s)F(s)) G_F(s) = G(s) I_m \quad (4.51)$$

**Θεώρημα 4.31** Η μηδενική δομή στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$  της συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$ , του ανοικτού συστήματος, παραμένει αναλλοίωτη έπειτα από  $\Omega$ -πολυωνυμική ανάδραση εξόδου ( $\Omega$ -polynomial feedback) πρδ.  $F(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{m \times p}$ , ή ισοδύναμα ο  $F(s)$  δεν έχει πόλους στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$ .

**Απόδειξη** Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός (4.51) είναι ένας  $\Omega$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός και έτσι από το συμπέρασμα 4.29, οι ρητοί πίνακες  $G(s)$  και  $G_F(s)$  θα έχουν την ίδια μηδενική δομή μηδενικών στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$ . Θεωρείστε λοιπόν τους σύνθετους πίνακες που προκύπτουν από τον μετασχηματισμό (4.51)

$$(I_p + G(s)F(s) \quad G(s)) \quad ; \quad \begin{bmatrix} G_F(s) \\ -I_m \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Εστω

$$G_F(s) = N_F(s)D_F^{-1}(s) \quad (4.53)$$

είναι μια δεξιά πρώτη  $\Omega \setminus \{\omega\}$ -Π.Κ.Ε. του  $G_F(s)$ . Τότε

$$\begin{bmatrix} G_F(s) \\ -I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_F(s) \\ -D_F(s) \end{bmatrix} D_F^{-1}(s) \quad (4.54)$$

είναι φανερά μια δεξιά πρώτη  $\Omega \setminus \{\omega\}$ -Π.Κ.Ε.. Συνεπώς η μηδενική δομή του  $(G_F(s)^T \quad -I_m^T)^T$  στην περιοχή  $\Omega \setminus \{\omega\}$  ταυτίζεται με την αντίστοιχη του πίνακα  $(N_F(s)^T \quad -D_F(s)^T)^T$  και άρα δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega \setminus \{\omega\}$ . Κατά τον ίδιο τρόπο στην περίπτωση που  $\{\omega\} \subset \Omega$  τότε μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας  $(G_F(\frac{1}{w})^T \quad -I_m^T)^T$  δεν έχει μηδενικά στο  $w=0$  και έτσι ο πίνακας  $(G_F(s)^T \quad -I_m^T)^T$  δεν έχει μηδενικά στο  $s=\omega$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω ο πίνακας  $(G_F(s)^T \quad -I_m^T)^T$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$ . Είναι φανερό επίσης ότι

$$\nu_\Omega \begin{bmatrix} G_F(s) \\ -I_m \end{bmatrix} = \nu_\Omega(G_F(s)) \quad (4.55)$$

και έτσι ο σύνθετος πίνακας  $(G_F(s)^T \ -I_m^T)^T$  ικανοποιεί τις συνθήκες της  $\Omega$ -ισοδυναμίας.

Για τον άλλο σύνθετο πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο επειδή ο πίνακας  $F(s)$  είναι  $\Omega$ -πολυωνυμικός θα έχουμε ότι

$$(I_p + G(s)F(s) \ G(s)) = (I_p \ G(s)) \begin{bmatrix} I_p & 0_{pm} \\ F(s) & I_m \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

είναι ένας  $\Omega$ -αντιστρέψιμος ισοδύναμος μετασχηματισμός του  $(I_p \ G(s))$ , ο οποίος αφήνει αναλλοίωτη την δομή των πόλων-μηδενικών στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Όπως και πριν εάν  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$  τότε ένας δικαιοδικός μετασχηματισμός μπορεί να εφαρμοστεί που θα μεταφέρει την περιοχή  $\Omega$  σε ένα υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ . Έτσι η δομή των πόλων-μηδενικών στην περιοχή  $\Omega$  διατηρείται και σ'αυτή την περίπτωση επίσης αναλλοίωτη. Τελικά εάν  $\Omega \equiv \mathbb{C}U\{\omega\}$  τότε ο μετασχηματισμός (4.56) είναι ένας αυστηρά ισοδύναμος μετασχηματισμός (δες ορισμό 3.1) λόγω του ότι η συνθήκη  $F(s) \in \mathbb{R}_\Omega(s)^{m \times p}$  με  $\Omega \equiv \mathbb{C}U\{\omega\}$  είναι ισοδύναμη με την συνθήκη ότι ο πίνακας  $F(s)$  είναι σταθερός. Έτσι και σ'αυτή την περίπτωση η δομή των πόλων-μηδενικών του πίνακα  $(I_p \ G(s))$  και του πίνακα  $(I_p + G(s)F(s) \ G(s))$  ταυτίζεται. Έτσι σ'όλες τις περιπτώσεις της περιοχής  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$  η δομή των πόλων-μηδενικών του πίνακα  $(I_p \ G(s))$  και του πίνακα  $(I_p + G(s)F(s) \ G(s))$  ταυτίζεται. Έτσι ο σύνθετος πίνακας  $(I_p + G(s)F(s) \ G(s))$  ικανοποιεί τις συνθήκες της  $\Omega$ -ισοδυναμίας λόγω του ότι ο πίνακας  $(I_p \ G(s))$  επίσης τις ικανοποιεί. Σαν αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός (4.51) είναι ένας  $\Omega$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός και οι ρητοί πίνακες  $G(s)$  και  $G_F(s)$  έχουν την ίδια δομή μηδενικών στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$ . □

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας δίνει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα για την γενική περίπτωση όπου  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$ . Παρ'όλα αυτά υπάρχουν μερικές αξιοσημείωτες υποπεριπτώσεις της περιοχής  $\Omega$  που θα δούμε παρακάτω.

**Περίπτωση 1.**  $\Omega \equiv \mathbb{C}$ , τότε ο πίνακας  $F(s)$  είναι  $\mathbb{C}$ -πολυωνυμικός ή ισοδύναμα είναι ένας συνήθης πολυωνυμικός πίνακας. Σ' αυτή την περίπτωση το θεώρημα 4.31 μας δίνει ότι :

*Η πεπερασμένη μηδενική δομή ενός ανοικτού συστήματος παραμένει αναλλοίωτη έπειτα από πολυωνυμική ανάδραση εξόδου ενώ η πεπερασμένη δομή των πόλων καθώς και η δομή των πόλων-μηδενικών στο  $s=\infty$ , δεν παραμένει αναλλοίωτη.*

**Παράδειγμα 4.32** Εστω

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ \frac{s(s+2)}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F(s) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -4 & s+3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Τότε

$$G_F(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2} & 0 \\ \frac{s^2+6s+4}{2s^2(s+2)} & \frac{1}{2(s+2)} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

και συνεπώς

$$S_{G(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} ; \quad S_{G_F(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2(s+2)} & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

και

$$S_{G(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} ; \quad S_{G_F(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

το οποίο μας δείχνει ότι η πεπερασμένη μηδενική δομή του  $G(s)$  παραμένει αναλλοίωτη έπειτα από πολυωνυμική ανάδραση εξόδου ενώ η πεπερασμένη δομή των πόλων καθώς και η δομή των πόλων-μηδενικών στο  $s=\infty$ , δεν παραμένει αναλλοίωτη.  $\square$

**Περίπτωση 2.**  $\Omega \equiv \{\infty\}$ , τότε ο  $F(s)$  είναι  $\{\infty\}$ -πολυωνυμικός ή ισοδύναμα καιονικά ρητός πίνακας. Το θεώρημα 4.31 τότε μας δίνει ότι :

Η μηδενική δομή στο  $s=\infty$  ενός ανοικτού συστήματος παραμένει αναλλοίωτη μετά από κανονικά ρητή ανάδραση εξόδου πρδ. ο  $F(s)$  είναι κανονικά ρητός πίνακας, ενώ η δομή των πόλων στο  $s=\infty$  καθώς και η πεπερασμένη δομή πόλων–μηδενικών δεν παραμένει αναλλοίωτη.

**Παράδειγμα 4.33** Εστω

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ \frac{s(s+2)}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad F(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Τότε

$$G_F(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s^2+s-1}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Εαν συγκρίνουμε τις Smith–McMillan μορφές στο  $s \in \mathbb{C}$  και στο  $s=\infty$  των  $G(s)$  και  $G_F(s)$  θα έχουμε ότι

$$S_{G(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} ; \quad S_{G_F(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

και

$$S_{G(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} ; \quad S_{G_F(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Είναι φανερό ότι η μηδενική δομή στο  $s=\infty$  του  $G(s)$  παραμένει αναλλοίωτη μετά από κανονικά ρητή ανάδραση εξόδου ενώ η δομή των πόλων στο  $s=\infty$  καθώς και η πεπερασμένη δομή πόλων–μηδενικών δεν παραμένει αναλλοίωτη.  $\square$

**Περίπτωση 3.**  $\Omega \equiv \mathbb{C}U\{\infty\}$  (Pugh and Ratcliffe 1980), τότε ο  $F(s)$  είναι  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ –πολυωνυμικός πίνακας ή ισοδύναμα ο  $F(s)$  είναι ένας σταθερός πίνακας. Τότε το θεώρημα 4.31 μας δίνει ότι



Η πεπερασμένη μηδενική δομή καθώς και η μηδενική δομή στο  $s=\infty$  ενός ανοικτού συστήματος παραμένει αναλλοίωτη έπειτα από σταθερή ανάλυση εξόδου πρδ.  $F(s)$  είναι σταθερός πίνακας, ενώ η δομή των πόλων στην περιοχή  $\Omega \equiv \mathbb{C}U\{\infty\}$  δεν παραμένει αναλλοίωτη.

**Παράδειγμα 4.34** Εστω το ανοικτό σύστημα που περιγράφεται από την συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ \frac{s(s+2)}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

έπειτα από σταθερή (μοναδιαία) ανάλυση εξόδου η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$F(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \quad (\text{E.2})$$

Τότε

$$G_F(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 0 \\ \frac{s}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Παρατηρούμε ότι

$$S_{G(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} ; \quad S_{G_F(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

και

$$S_{G(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} ; \quad S_{G_F(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

και άρα οι  $G(s)$  και  $G_F(s)$  έχουν την ίδια δομή μηδενικών στην περιοχή  $\Omega \equiv \mathbb{C}U\{\infty\}$  και διαφορετική δομή πόλων στην ίδια περιοχή.  $\square$

**Περίπτωση 4.**  $\Omega \equiv \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$  (επεκτεταμένο δεξιό μιγαδικό επίπεδο), τότε ο  $F(s)$  είναι ένας  $\mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$ -πολυωνυμικός πίνακας, που σημαίνει ότι ο  $F(s)$  είναι ευσταθής. Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα 4.31 μας δίνει ότι

- (α) Η μηδενική δομή του  $G(s)$  στο επεκτεταμένο δεξιό μιγαδικό επίπεδο παραμένει αναλλοίωτη έπειτα από ευσταθή ανάδραση εξόδου.
- (β) Κάθε ελαχίστης φάσεως (minimum phase) συνάρτηση μεταφοράς παραμένει ελαχίστους φάσεως έπειτα από ευσταθή ανάδραση εξόδου.

**Παράδειγμα 4.35** Θεωρείστε την ελαχίστους φάσεως συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -\frac{s+2}{s+1} & \frac{s+4}{s+1} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

η οποία έπειτα από ευσταθή ανάδραση εξόδου

$$F(s) = \begin{bmatrix} -\frac{s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)^2} & 0 \\ \frac{s^2+4s+2}{(s+1)(s+4)} & \frac{4s+10}{(s+2)(s+4)} \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

μας δίνει

$$G_F(s) = \begin{bmatrix} (s+2)^2 & 0 \\ -\frac{(s+2)^3}{s+3} & \frac{s+2}{s+3} \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Παρατηρούμε ότι

$$S_{G(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & (s+1)(s+4) \end{bmatrix}; \quad S_{G_F(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+3} & 0 \\ 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

και

$$S_{G(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad S_{G_F(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

και συνεπώς η  $G_F(s)$  είναι επίσης ελαχίστους φάσεως όπως αποδεικνύεται και στο θεώρημα 4.31. . □

#### 4.5 Συνθήκες απουσίας μηδενικών στο $s=\infty$ ρητών πινάκων.

Στο κεφάλαιο αυτό, σαν εφαρμογή της  $\Omega$ -ισοδυναμίας, προτείνουμε μια γενίκευση γνωστών συνθηκών για την απουσία μηδενικών στο  $s=\infty$  πολυωνυμικών πινάκων, στην περίπτωση που έχουμε ρητούς πίνακες. Μερικές βασικές ιδέες για την μελέτη του σημείου  $s=\infty$ , που θα χρειαστούν στη συνέχεια, παρουσιάζουμε παρακάτω.

**Ορισμός 4.36** (Vardulakis et al. 1982, Vardulakis 1991) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ . Ορίζουμε ως *εκτίμηση* (valuation) στο  $s=\infty$  του ρητού πίνακα  $T(s)$  την απεικόνιση  $\delta_{\infty}(\cdot) : \mathbb{R}(s)^{p \times m} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

$$\delta_{\infty}(T(s)) := \begin{cases} \min \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\infty}(\cdot) \text{ μεταξύ των } \delta_{\infty}(\cdot) \text{ όλων} \\ \text{των } r\text{-τάξης } \text{οριζουσών του } T(s) \end{array} \right\} & r > 0 \\ +\infty & r = 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

όπου  $\delta_{\infty}(\cdot)$  έχει ορισθεί από την σχέση (2.36). □

**Λήμμα 4.37** (Vardulakis et al. 1982, Vardulakis 1991)

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$  και θεωρείστε την Smith–McMillan μορφή στο  $s=\infty$  του  $T(s)$

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) := \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, \mathbf{0}_{p-r \times m-r} \right] \quad (4.58)$$

όπου  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k \geq 0$  και  $\hat{q}_r \geq \hat{q}_{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} \geq 0$  είναι αντίστοιχα η τάξη των πόλων και των μηδενικών του  $T(s)$  στο  $s=\infty$ . Τότε

$$\delta_{\infty}(T(s)) = \sum_{i=k+1}^r \hat{q}_i - \sum_{i=1}^k q_i \quad (4.59) \quad \square$$

Το λήμμα 4.37 καθώς και η έννοια της  $\{\omega\}$ -ελάχιστης συνθήκης (ορισμός 4.13) μπορούν να συνδιαστούν για να μας δώσουν το παρακάτω

**Λήμμα 4.38** Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ . Ο  $T(s)$  δεν έχει μηδενικά στο  $s = \omega$  εάν και μόνο εάν

$$\delta_{\omega}(T(s)) = -\nu_{\omega}(T(s)) \quad (4.60)$$

**Απόδειξη**

Από τον ορισμό της  $\{\omega\}$ -ελάχιστης συνθήκης έχουμε ότι

$$\nu_{\omega}(T(s)) = \sum_{i=1}^k q_i \quad (4.61)$$

και έτσι από τις σχέσεις (4.59) και (4.61) έχουμε ότι

$$\delta_{\omega}(T(s)) = -\nu_{\omega}(T(s)) \Leftrightarrow \sum_{i=k+1}^r \hat{q}_i = 0 \Leftrightarrow \hat{q}_i = 0 \quad i=k+1, \dots, r \quad (4.62)$$

Επειδή  $\hat{q}_i$  είναι οι τάξεις των μηδενικών στο  $s = \omega$ , το λήμμα αποδείχτηκε.  $\square$

Ας συμβολίσουμε με  $\delta_{\omega i}(\cdot)$  την εκτίμηση της  $i$ -γραμμής του συγκεκριμένου πίνακα, τότε κάθε ρητός πίνακας  $T(s)$  μπορεί να γραφτεί (Vardulakis 1991) ως

$$T(s) = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{s}\right] \delta_{\omega 1}(T) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{s}\right] \delta_{\omega 2}(T) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left[\frac{1}{s}\right] \delta_{\omega p}(T) \end{bmatrix} C + \hat{T}(s) \quad (4.63)$$

όπου  $C \in \mathbb{R}^{p \times m}$  και  $\hat{T}(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\delta_{\omega i}(\hat{T}(s)) \geq \delta_{\omega i}(T(s))$ ,  $i \in p$ .

**Ορισμός 4.39** (Verghese and Kailath 1981, Vardulakis 1991)

Ο σταθερός πίνακας  $C$  στην σχέση (4.63) ορίζεται ως *συντελεστής πίνακας ελάχιστης γραμμικής εκτίμησης* (*least row valuation (at  $s=\infty$ ) coefficient matrix*) του ρητού πίνακα  $T(s)$  και συμβολίζεται με  $[T(s)]_r^\ell$  πρδ.  $[T(s)]_r^\ell := C \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Ο πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ονομάζεται *καινικός κατά γραμμές στο  $s=\infty$*  (*row reduced at  $s=\infty$* ) εάν

$$\text{rank}_{\mathbb{R}}[T(s)]_r^\ell = \min(p, m) \quad (4.64) \quad \square$$

Ο ορισμός του καινικού κατά γραμμές ρητού πίνακα  $T(s)$  αποτελεί μια γενίκευση του αντίστοιχου ορισμού 2.7 για την ειδική περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων. Μια σημαντική ιδιότητα των καινικών κατά γραμμές ρητών πινάκων δίνεται από το παρακάτω

**Λήμμα 4.40** (Verghese and Kailath 1981, Vardulakis 1991)

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$ . Ο  $T(s)$  είναι καινικός κατά γραμμές στο  $s=\infty$  εάν και μόνο εάν η δομή των πόλων–μηδενικών στο  $s=\infty$  του  $T(s)$  δίνεται από την δομή των πόλων–μηδενικών στο  $s=\infty$  της κάθε γραμμής του ξεχωριστά.  $\square$

Εστω τώρα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $p < m$  και  $V(s)$  ένας  $p \times p$  ρητός πίνακας τέτοιος ώστε

$$\bar{T}(s) = V(s) T(s) \quad (4.65)$$

όπου

(α) Ο  $\bar{T}(s)$  είναι καινικός κατά γραμμές στο  $s=\infty$

(β)  $\delta_{\omega_i}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad \forall i \in p$ .

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη (β) εγγυάται ότι ο ρητός πίνακας  $\bar{T}(s)$  δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$ . Η σχέση (4.65) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$(V(s) \quad \bar{T}(s)) \begin{bmatrix} T(s) \\ -I_m \end{bmatrix} = 0 \quad (4.66)$$

**Θεώρημα 4.41** Με την παραπάνω ορολογία και υποθέσεις, ο (4.66) είναι ένας  $\{\omega\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός εαν και μόνο εαν

$$\delta_{\omega i}(V(s)) \geq \delta_{\omega i}(\bar{T}(s)) \quad (4.67)$$

**Απόδειξη**

( $\Leftarrow$ ) Ας υποθέσουμε ότι ο (4.66) είναι ένας  $\{\omega\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός. Οι  $\{\omega\}$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες αυτού του μετασχηματισμού μας δίνουν ότι

$$\nu_{\omega}(V(s) - \bar{T}(s)) = \nu_{\omega}(\bar{T}(s)) \quad (4.68)$$

Επειδή ο  $\bar{T}(s)$  είναι κανονικός κατά γραμμές στο  $s=\omega$  και  $\delta_{\omega i}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad \forall i \in \mathbf{p}$  έχουμε από Λήμμα 4.40 ότι δεν έχει μηδενικά στο  $s=\omega$  και συνεπώς ικανοποιεί την συνθήκη του λήμματος 4.38, πρδ.

$$-\nu_{\omega}(\bar{T}(s)) = \delta_{\omega}(\bar{T}(s)) \quad (4.69)$$

Από τις (4.68) και (4.69) έχουμε ότι

$$-\nu_{\omega}(V(s) - \bar{T}(s)) = \delta_{\omega}(\bar{T}(s)) \quad (4.70)$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$\delta_{\omega i}(V(s)) \geq \delta_{\omega i}(\bar{T}(s)) \quad \text{επειδή} \quad \delta_{\omega i}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad (4.71)$$

Ετσι η συνθήκη (4.67) ικανοποιείται.

( $\Rightarrow$ ) Ας υποθέσουμε ότι οι σχέσεις (4.66) και (4.67) ικανοποιούνται. Είναι προφανές ότι ο σύνθετος πίνακας

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ -I_m \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$  και ικανοποιεί τις  $\{\infty\}$ -ελάχιστης τάξης συνθήκες.  
Θεωρείστε τον σύνθετο πίνακα

$$(V(s) \quad \bar{T}(s)) \quad (4.73)$$

Η συνθήκη (4.67) μαζί με την υπόθεση  $\delta_{\omega_i}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad \forall i \in \mathbf{p}$  συνεπάγεται ότι

$$\delta_{\omega_i}(V(s) \quad \bar{T}(s)) = \delta_{\omega_i}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad (4.74)$$

και επειδή ο  $\bar{T}(s)$  είναι κανονικός κατά γραμμές στο  $s=\infty$ , έχουμε ότι ο πίνακας  $(V(s) \quad \bar{T}(s))$  είναι επίσης κανονικός κατά γραμμές στο  $s=\infty$  και συνεπώς δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$ . Έτσι

$$\begin{aligned} \nu_{\omega}([V(s) \quad \bar{T}(s)]) &\stackrel{\text{(Ορισμός 4.13)}}{=} \sum q_i([V(s) \quad \bar{T}(s)]) = \\ &\stackrel{\text{(Λήμμα 4.40)}}{=} \sum \delta_{\omega_i}([V(s) \quad \bar{T}(s)]) = \\ &\stackrel{\text{(4.74)}}{=} \sum \delta_{\omega_i}(\bar{T}(s)) \stackrel{\text{(Λήμμα 4.40)}}{=} \sum q_i(\bar{T}(s)) \\ &\stackrel{\text{(Ορισμός 4.13)}}{=} \nu_{\omega}(\bar{T}(s)) \end{aligned} \quad (4.75)$$

όπου  $q_i(\cdot)$  δηλώνει τις τάξεις των πόλων στο  $s=\infty$  του συγκεκριμένου πίνακα, και έτσι ο (4.66) είναι ένας  $\{\infty\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός.  $\square$

**Συμπέρασμα 4.42** Οι συνθήκες (4.66) και (4.67) είναι αναγκαίες συνθήκες για την μη ύπαρξη μηδενικών στο  $s=\infty$ , σε έναν ρητό πίνακα  $T(s)$ .

**Απόδειξη** Αποδείχτηκε στο θεώρημα 4.41 ότι κάτω από τις συνθήκες (4.66) και (4.67), ο ρητός πίνακας  $T(s)$  είναι  $\{\infty\}$ -ισοδύναμος με τον κανονικό κατά γραμμές στο  $s=\infty$  ρητό πίνακα  $\bar{T}(s)$ . Επειδή  $\delta_{\omega_i}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad \forall i \in \mathbf{p}$ , ο  $\bar{T}(s)$  δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$  και συνεπώς από το συμπέρασμα 4.29 ο  $T(s)$  δεν θα έχει επίσης μηδενικά στο  $s=\infty$ .  $\square$

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι στην περίπτωση που οι  $\bar{T}(s)$  και  $T(s)$  είναι πολυωνυμικοί πίνακες (και συνεπώς η συνθήκη  $\delta_{\omega}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad \forall i \in \mathbb{P}$  αυτομάτως ικανοποιείται), και  $V(s)$  είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τότε οι συνθήκες (4.66) και (4.67) ανάγονται σ'αυτά που προτάθηκαν από τον Zhang (1989a, 1989b). Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα 4.42 και το θεώρημα 4.41 μας δίνουν μια αναγκαία συνθήκη για την μη ύπαρξη μηδενικών στο  $s=\omega$  ενός πολυωνυμικού πίνακα η οποία ταυτίζεται με αυτήν που προτάθηκε από τους Pugh et.al. (1992).

Από το λήμμα 4.38, το θεώρημα 4.41 και το συμπέρασμα 4.42, μπορούμε να δώσουμε τώρα ένα πλήθος συνθηκών για την απουσία μηδενικών στο  $s=\omega$  ενός ρητού πίνακα.

**Θεώρημα 4.43** Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ , με  $p < m$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p$ . Εστω επίσης η Laurent ανάπτυξη του  $T(s)$

$$T(s) = T_q s^q + \dots + T_1 s + T_0 + T_{-1} \frac{1}{s} + \dots \quad (4.76)$$

Τότε ο  $T(s)$  δεν έχει μηδενικά στο  $s=\omega$  εάν μια από τις ακόλουθες συνθήκες ικανοποιείται

(α) Ο  $T(s)$  έχει έναν δεξιά καιονικά ρητό αντίστροφο (Kailath 1980).

(β) Το ελάχιστο μεταξύ των  $\delta_{\omega}(\cdot)$  όλων των  $p$ -τάξης οριζουσών ταυτίζεται με  $-\nu_{\omega}(T(s))$  (λήμμα 4.38) δηλ.  $\delta_{\omega}(T(s)) = -\nu_{\omega}(T(s))$ .

(γ) Υπάρχει ένας  $p \times p$  ρητός πίνακας  $V(s)$  τέτοιος ώστε

$$\bar{T}(s) = V(s) T(s) \quad (5.78)$$

όπου



(γ1) Ο  $\bar{T}(s)$  είναι κανονικός κατά γραμμές στο  $s=\infty$

(γ2)  $\delta_{\omega_i}(\bar{T}(s)) \leq 0 \quad \forall i \in p.$

(γ3)  $\delta_{\omega_i}(V(s)) \geq \delta_{\omega_i}(\bar{T}(s))$

(δ) (Pugh et.al. 1989)

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_q & 0 & \cdots & 0 \\ T_{q-1} & T_q & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_0 & T_1 & \cdots & T_q \end{bmatrix} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_q & 0 & \cdots & 0 \\ T_{q-1} & T_q & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_1 & T_2 & \cdots & T_q \end{bmatrix} + p \quad (4.79)$$

□

Το θεώρημα 4.43 μας δίνει την αναγκαιότητα των τεσσάρων συνθηκών που προτείνει, αλλά μπορεί επίσης να σημειωθεί ότι οι συνθήκες (α), (β) και (δ) στην πραγματικότητα είναι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την απουσία των μηδενικών στο  $s=\infty$  του ρητού πίνακα  $T(s)$ .

#### 4.6 Περίληψη.

Ο ορισμός της  $\Omega$ -ισοδυναμίας μεταξύ ρητών πινάκων διαφορετικών διαστάσεων έχει ορισθεί. Έχει δειχθεί ότι η  $\Omega$ -ισοδυναμία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή, δεδομένων πινάκων, μέσα σε μια περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{w\}$  και ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο  $P(p,m)$  στην περίπτωση που  $\Omega \subset \mathbb{C}\{w\}$  ή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ . Παρατηρήθηκε ότι η  $\Omega$ -ισοδυναμία είναι η γενίκευση πολλών γνωστών μετασχηματισμών, για παράδειγμα, της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας, της γενικευμένης ρητής ισοδυναμίας, της τοπικής ισοδυναμίας, της πλήρους ισοδυναμίας. Η έννοια της  $\Omega$ -ισοδυναμίας μας δίνει μια ακριβή ερμηνεία για το αναλλοίωτο της μηδενικής δομής στην περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{w\}$ , της συνάρτησης μεταφοράς ενός ανοικτού συστήματος έπειτα από  $\Omega$ -πολυωνυμική ανάδραση εξόδου (ορισμένες ειδικές περιπτώσεις της περιοχής  $\Omega$  μελετήθηκαν). Η έννοια της  $\Omega$ -ισοδυναμίας χρησιμοποιήθηκε για να μας δώσει συνθήκες για την απουσία μηδενικών ενός ρητού πίνακα, μια από τις οποίες γενικεύει μάλιστα την δουλειά του Zhang (1989a, 1989b) και Pugh et.al. (1992) για την ειδική περίπτωση των πολυωνυμικών πινάκων.

Ένα πρώτο ανοικτό ερώτημα που προκύπτει με το τέλος αυτού του κεφαλαίου είναι αν οι μετασχηματισμοί που αναφέραμε έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την αριστερή ή δεξιά μηδενική δομή ρητών πινάκων. Ένα δεύτερο ανοικτό ερώτημα είναι αν τα παραπάνω είδη μετασχηματισμών που αναφέραμε είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο  $\Omega \equiv \mathbb{C}\{w\}$ .

B I B Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

- [A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (I), *J.Australian Math. Soc., Ser.B*, **27**, 194–222.
- [C1] Cullen J., 1987, Underlying algebraic framework of equivalence relations on Linear Systems., *Int.J.Control*, **45**, 1415–1425.
- [H1] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications., *Int.J.Control*, **47**, 53–64.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems.*, Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall.
- [K2] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1992, Equivalence transformations of rational matrices., *Proceedings of the Second IFAC Workshop on System Structure and Control*, Prague, 3–5 September 1992, 40–43, to appear in *Kybernetika*.
- [K3] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1992, Equivalence transformations of rational matrices and applications., to appear in *Int.J.Control*.
- [P1] Pernebo L., 1981, An algebraic theory for the design of controllers for Linear Multivariable Systems. – Part I., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-26**, 171–182.
- [P2] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.27, NO.5, 657–672.
- [P3] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, The infinite zeros of a rational matrix., *Report C.T.5.*
- [P4] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, On the zeros and poles of a rational matrix., *Int.J.Control*, Vol.30, NO.2, 213–226.
- [P5] Pugh A.C., Kafai A. and Hayton G.E., 1988, Some local results for Linear Systems and implications for state variable feedback., *Int.J.Control*, Vol.48, NO.5, 1755–1767.

- [P6] Pugh A.C., Jones E.R.L., Demianczuk O. and Hayton G.E., 1989, Infinite frequency structure and a certain matrix Laurent expansion., *Int.J.Control*, **50**, 1793–1805.
- [P7] Pugh A.C., Johnson D.S. and Hayton G.E., 1992, On conditions guaranteeing two polynomial matrices possess identical zero structures., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-37**, 1383–1386.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1974, *State-Space and Multivariable Theory.*, Nelson, London.
- [S1] Smith M.C., 1981, Matrix fractions and strict system equivalence, *Int.J.Control*, Vol.**34**, NO.5, 869–883.
- [V1] Vardulakis A.I.G., Limebeer D.J.N. and Karcanias N., 1982, Structure, Smith–McMillan form of a rational matrix at infinity., *Int.J.Control*, **35**, 701–725.
- [V2] Vardulakis A.I.G. and Karcanias N., 1983, Structure and Smith–McMillan form and coprime MFDs of a rational matrix inside a region  $P=\Omega\cup\{\omega\}$ ., *Int.J.Control*, **38**, 927–957.
- [V3] Vardulakis A.I. ,1991 ,*Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods*. Nelson–Wiley, London..
- [V4] Verghese G.C. ,1979 , *Infinite frequency behaviour in generalized dynamical systems.*, Ph.D. dissertation ,Stanford University ,Stanford ,CA.
- [V5] Verghese G.C. and Kailath T., 1981, Rational matrix structure., *IEEE Trans. Auto. Control.*, **AC-26**, 434–439.
- [W1] Walker A.B. ,1988 , *Equivalence Transformations for Linear Systems.* ,Ph.D. Thesis, Hull University ,Hull ,England.
- [Z1] Zhang S–Y, (1989a), Generalized proper inverse of polynomial matrices and the existence of infinite decoupling zeros., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-34**, 743–745.
- [Z2] Zhang S–Y, (1989b), Polynomial matrix linearization and strongly irreducible realization for singular systems., *Int.J.Control*, **49**, 471–479.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 5

### ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ $CU\{\omega\}$ -ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

- 5.1 Εισαγωγή.
- 5.2 Ελάχιστες πραγματώσεις ρητών πινάκων.
- 5.3 Ρητοί πίνακες και  $CU\{\omega\}$ -ισοδύναμοι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες.
  - 5.3.1 Ισοδύναμη πραγμάτωση Verghese (1978).
  - 5.3.2 Ισοδύναμη πραγμάτωση Bosgra & Van Der Weiden (1981).
  - 5.3.3 Ισοδύναμη πραγμάτωσης Zhang (1989).
  - 5.3.4 Ισοδύναμη πραγμάτωση Tan & Vandewall (1988).
  - 5.3.5 Συγκρίσεις ισοδύναμων πραγματώσεων.
- 5.4 Η Kronecker κανονική μορφή ρητών πινάκων.
- 5.5 Περίληψη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την έννοια της ελάχιστης πραγματώσεως στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων χωρίς μη δυναμικές μεταβλητές ορίζει την έννοια της ελάχιστης πραγματώσεως. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε μεθόδους αναγωγής ρητών πινάκων σε  $\mathbb{C}\{\omega\}$ -ισοδύναμους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες. Όπως θα δούμε καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή τέτοιων ισοδύναμων πολυωνυμικών πινάκων παίζει η δυνατότητα κατασκευής ισχυρών μη αναγώγιμων πραγματώσεων στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, ενός ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Το κεφάλαιο αυτό κλείνει με την γενίκευση της μορφής Kronecker για την γενική κατηγορία των ρητών πινάκων.

## 5.2 Ελάχιστες πραγματώσεις ρητών πινάκων.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την "θεωρία πραγμάτωσης" ενός όχι κατά ανάγκη ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν και μια γενίκευση των γνωστών αποτελεσμάτων για καινικούς ρητούς πίνακες  $\text{prf. } T(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$ .

**Ορισμός 5.1** (Anderson *et al.* 1985, Cullen 1987) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Τότε μια τετράδα ρητών πινάκων  $\{C(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times n}, A(s) \in \mathbb{R}(s)^{n \times n}, B(s) \in \mathbb{R}(s)^{n \times m}, D(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}\}$  τέτοια ώστε :

$$T(s) = C(s) A(s)^{-1} B(s) + D(s) \quad (5.1)$$

οινομάζεται *ρητή πραγμάτωση* (*rational realization*) του  $T(s)$ . Στην περίπτωση που οι πίνακες μου είναι τέτοιοι ώστε  $\{C(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times n}, A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times m}, D(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}\}$  τότε η πραγμάτωση του πίνακα  $T(s)$  οιομάζεται *πολυωνυμική πραγμάτωση* (*polynomial realization*). Τέλος στην ειδική περίπτωση που  $C(s) = C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $A(s) = sE - A \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}$ ,  $B(s) = B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D(s) = D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , τότε η πραγμάτωση του πίνακα  $T(s)$  οιομάζεται *πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων* (*generalized state-space realization*) και έχουμε

$$T(s) = C (sE - A)^{-1} B + D \quad (5.2) \quad \square$$

**Σημείωση 5.2** Στον ορισμό 5.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ρητή (ή πολυωνυμική) πραγμάτωση  $\{C(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times n}, A(s) \in \mathbb{R}(s)^{n \times n}, B(s) \in \mathbb{R}(s)^{n \times m}, D(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}\}$  μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως  $\{\nu \in \mathbb{R}^{p \times r}, T(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times r}, u \in \mathbb{R}^{r \times m} \quad r = p + n + m\}$  όπου

$$\nu = (0_{pn} \quad 0_{pm} \quad I_p); \quad T(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0_{np} \\ -C(s) & D(s) & I_p \\ 0_{mn} & -I_m & 0_{mp} \end{bmatrix}; \quad u = \begin{bmatrix} 0_{nm} \\ 0_{pm} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

και

$$T(s) = \nu T(s)^{-1} u \quad (5.4) \quad \square$$

**Σημείωση 5.3** Ο όρος "πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων"  $\{E \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}\}$  του  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  ταυτίζεται με το γεγονός ότι εάν θεωρήσουμε ένα σύστημα  $\Sigma$  με διάνυσμα εισόδου  $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  και διάνυσμα εξόδου  $y(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  των οποίων οι μετασχηματισμοί Laplace είναι αντίστοιχα  $\hat{u}(s) = L(u(t))$  και  $\hat{y}(s) = L(y(t))$  και συνδέονται διαμέσου του ρητού πίνακα  $T(s)$  πρδ.  $\hat{y}(s) = T(s)\hat{u}(s)$ , τότε η συμπεριφορά μεταξύ εισόδου-εξόδου (input-output behavior) του  $\Sigma$  μπορεί να πραγματοποιηθεί από ένα κύκλωμα αναλογικού υπολογιστή του οποίου η δυναμική συμπεριφορά περιγράφεται από μια πρώτη τάξης διαφορική εξίσωση και μια έκφραση εξόδου της μορφής

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (5.5\alpha)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (5.5\beta) \quad \square$$

**Σημείωση 5.4** Μια ειδική περίπτωση του ορισμού 5.1 είναι όταν  $T(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$  και τότε μια τριάδα πινάκων  $\{C \in \mathbb{R}^{p \times n}, J \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}\}$  τέτοια ώστε

$$T(s) = C (sI_n - J)^{-1} B \quad (5.6)$$

οινομάζεται *πραγμάτωση στον χώρο των καταστάσεων* (state-space realization) του  $T(s)$ . Μια άλλη ειδική περίπτωση του ορισμού 5.1 είναι όταν  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και τότε μια τετράδα πινάκων  $\{C_{\infty} \in \mathbb{R}^{p \times \mu}, J_{\infty} \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_{\infty} \in \mathbb{R}^{\mu \times m} \text{ και } D_{\infty} \in \mathbb{R}^{p \times m}\}$  τέτοια ώστε

$$T(s) = C_{\infty} (I_{\mu} - sJ_{\infty})^{-1} B_{\infty} (+ D_{\infty}) \quad (5.7)$$

οινομάζεται *πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων* (generalized state-space realization) του  $T(s)$ . □

Μερικά χαρακτηριστικά καθώς και ιδιότητες των πολυωνυμικών πραγματώσεων ρητών πινάκων δίνονται παρακάτω



**Ορισμός 5.5** (Rosenbrock 1970, Verghese 1978) Ορίζουμε ως *αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου (εξόδου) (input (output) decoupling zeros)* στο  $s \in \mathbb{C}$  ή στο  $s = \infty$  μιας ρητής (πολυωνυμικής) πραγμάτωσης, τα μηδενικά στο  $s \in \mathbb{C}$  ή στο  $s = \infty$  του σύνθετου πίνακα  $(T(s) \ U)$   $((T(s)^T \ -V^T)^T)$  και ως *αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου (input-output decoupling zeros)* στο  $s \in \mathbb{C}$  ή στο  $s = \infty$  τα κοινά μηδενικά στο  $s \in \mathbb{C}$  ή στο  $s = \infty$  των πινάκων  $(T(s) \ U)$  και  $(T(s)^T \ -V^T)^T$ . Ορίζουμε επίσης ως *αποσυζευγμένα μηδενικά (decoupling zeros)* μιας ρητής (πολυωνυμικής) πραγμάτωσης το σύνολο  $\left\{ \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου} \} + \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου} \} - \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου} \} \right\}$ . Μια ρητή (πολυωνυμική) πραγμάτωση η οποία δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου και εξόδου στο  $s \in \mathbb{C}$  (στο  $s = \infty$ ) ονομάζεται *μη αναγώγιμη (μη αναγώγιμη στο  $s = \infty$ ) (irreducible (irreducible at infinity))* πραγμάτωση. Εάν ταυτόχρονα είναι και μη αναγώγιμη και μη αναγώγιμη στο  $s = \infty$  τότε ονομάζεται *ισχυρά μη αναγώγιμη (strongly irreducible)*.  $\square$

**Λήμμα 5.6** (Rosenbrock 1970, Verghese 1978) Μια σχέση που συνδέει το σύνολο των πόλων του πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ , με τα σύνολα των αποσυζευγμένων μηδενικών μιας πολυωνυμικής πραγμάτωσης όπως η (5.1) και των μηδενικών του πίνακα  $T(s)$  ο οποίος προκύπτει από την ισοδύναμη πολυωνυμική πραγμάτωση του  $T(s)$  της μορφής (5.4) είναι η εξής :

$$\begin{aligned} \#\{\text{μηδενικών του } T(s) \text{ στο } s \in \mathbb{C} (s = \infty)\} &\equiv \#\{\text{πόλων του } T(s) \text{ στο } s \in \mathbb{C} (s = \infty)\} + \\ &+ \#\{\text{αποσυζευγμένων μηδενικών της πολ. πραγμάτωσης στο } s \in \mathbb{C} (s = \infty)\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

όπου  $\#\{\cdot\}$  δηλώνει το συνολικό πλήθος συμπεριλαμβανομένης και της πολλαπλότητας.  $\square$

**Συμπέρασμα 5.7** Αμεσο συμπέρασμα του λήμματος 5.6 είναι το εξής

$$\begin{aligned} f &:= \delta_M(T(s)) \stackrel{(2.69)}{=} \#\{\text{μηδενικών του } T(s) \text{ στο } \mathbb{C}U\{\infty\}\} = \\ &= \delta_M(T(s)) + \#\{\text{αποσυζευγμένων μηδενικών της πολ. πραγμάτωσης στο } \mathbb{C}U\{\infty\}\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

όπου  $\#\{\cdot\}$  δηλώνει το συνολικό πλήθος συμπεριλαμβανομένης και της τάξης των μηδενικών. Αρα από (5.9) έχουμε ότι  $f \geq \delta_M(T(s))$  με ισότητα να ισχύει εάν και μόνο εάν η πολυωνυμική πραγμάτωση δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ .  $\square$

**Πρόταση 5.8** Θεωρείστε τους πίνακες που προκύπτουν από ρητές (πολυωνυμικές) πραγματώσεις του  $T(s)$  :

$$P(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Οι πίνακες  $P(s)$  και  $\mathcal{P}(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών.

**Απόδειξη** Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι υπάρχει ένας  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός (πλήρης ισοδύναμος) μεταξύ των  $P(s)$  και  $\mathcal{P}(s)$  της μορφής

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 & | & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p & | & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & | & I_m \\ -\bar{0} & -\bar{0} & -\bar{0} & | & -\bar{I}_p & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \\ C(s) & -D(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Η απόδειξη είναι όμοια με την αντίστοιχη των Hayton *et al.* (1990). Αρα σύμφωνα με το θεώρημα 4.27 οι  $P(s)$  και  $\mathcal{P}(s)$  θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Οσον αφορά τους ελάχιστους δείκτες γραμμών και στηλών, οι πίνακες  $P(s)$  και  $\mathcal{P}(s)$  συνδέονται με την παρακάτω αυστηρή ισοδυναμία

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 & | & 0 \\ -C(s) & D(s) & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & I_m & | & 0 \\ -\bar{0} & -\bar{0} & -\bar{0} & | & -\bar{I}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 & | & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p & | & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & | & I_m \\ -\bar{0} & -\bar{0} & -\bar{0} & | & -\bar{I}_p & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p \\ 0 & I_m & I_m & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

και συνεπώς οι  $P(s)$  και  $\mathcal{P}(s)$  έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών μια που η αυστηρή ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτους τους ελάχιστους δείκτες γραμμών και στηλών ρητών πινάκων.  $\square$

**Θεώρημα 5.9** (Verghese 1978) Θεωρείστε μια ισχυρά μη αναγώγιμη πολυωνυμική πραγματάωση  $\{C(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times n}, A(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times n}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{n \times m}, D(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}\}$  του ρητού πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και τους πίνακες  $P(s)$  και  $\mathcal{P}(s)$  της μορφής (5.10) που προκύπτουν από αυτήν. Τότε :

- (α) Η δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  του ρητού πίνακα  $T(s) = C(s) A(s)^{-1} B(s) + D(s) = \gamma T(s)^{-1}$   $\mathcal{U}$  είναι ισόμορφη με την δομή των μηδενικών του πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ .
- (β) Η δομή των μηδενικών στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  του ρητού πίνακα  $T(s) = C(s) A(s)^{-1} B(s) + D(s) = \gamma T(s)^{-1}$   $\mathcal{U}$  είναι ισόμορφη με την δομή των μηδενικών του πίνακα  $\mathcal{P}(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)}$  ή ισοδύναμα από την πρόταση 5.8 με την δομή των μηδενικών του πίνακα  $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{(n+p) \times (n+m)}$ .
- (γ) Εστω  $R(s)$  μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση για τον δεξιό μηδενικό χώρο του  $\mathcal{P}(s)$  τέτοια ώστε

$$\mathcal{P}(s) R(s) = 0 \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} T(s) & \mathcal{U} \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.13)$$

Τότε  $R_2(s)$  είναι μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση για τον δεξιό μηδενικό χώρο του  $T(s) = C(s) A(s)^{-1} B(s) + D(s) = \gamma T(s)^{-1}$   $\mathcal{U}$  και έχει τους ίδιους ελάχιστους δείκτες με την  $R(s)$ . Σύμφωνα με την πρόταση 5.8 ο πίνακας  $P(s)$  θα πρέπει επίσης να έχει τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών.

- (δ) Αντίθετα εάν  $R_2(s)$  είναι μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση για τον δεξιό μηδενικό χώρο του  $T(s)$ , τότε

$$R(s) = \begin{bmatrix} T(s)^{-1} \mathcal{U} R_2(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

είναι μια ελάχιστη πολυωνυμική βάση για τον δεξιό μηδενικό χώρο του  $\mathcal{P}(s)$  και έχει τους ίδιους ελάχιστους δείκτες με την  $R_2(s)$ .

- (ε) και (ζ) είναι ακριβώς οι δυαδικά αντίστοιχες των (γ) και (δ) και αφορούν τους αριστερούς μηδενικούς χώρους. □

Ευδιαφέρου παρουσιάζει στην Γραμμική Θεωρία Συστημάτων η κατασκευή κυκλωμάτων αναλογικών υπολογιστών ή ισοδύναμα πραγματώσεων, με τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων αλλά και συνδέσεων πρδ. πυκνωτές, αντιστάσεις, πηνία, που προσομοιώνουν την συμπεριφορά εισόδου–εξόδου που μας δίνει η περιγραφή στον χώρο των συχνοτήτων,  $\hat{y}(s) = T(s)\hat{u}(s)$ , όπου  $\hat{y}(s)$  ο μετασχηματισμός Laplace του διανύσματος εξόδου  $y(t)$ ,  $\hat{u}(s)$  ο μετασχηματισμός Laplace του διανύσματος εισόδου  $u(t)$  και  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Για τον λόγο αυτό δίνουμε τον παρακάτω

**Ορισμός 5.10** (Karampetakis) Μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $\{E \in \mathbb{R}^{r \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times r}, B \in \mathbb{R}^{r \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times r} \text{ ( } D \in \mathbb{R}^{p \times m} \text{ )}$   $r \in \mathbb{I}^+$  του  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  θα ονομάζεται **ελάχιστη πραγμάτωση** (*minimal realization*) εάν το γενικευμένο ιδιόμορφο σύστημα (5.5) έχει τον ελάχιστο αριθμό καταστάσεων πρδ.  $r = \text{ελάχιστο } \{r \in \mathbb{I}^+ \mid E \in \mathbb{R}^{r \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times r}, B \in \mathbb{R}^{r \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times r} \text{ ( } D \in \mathbb{R}^{p \times m} \text{ )}$  πραγμάτωση του  $T(s)$ .  $\square$

Στην ειδική περίπτωση όπου  $T(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$  τότε η πραγμάτωση στον χώρο των καταστάσεων  $[C \in \mathbb{R}^{p \times n}, J \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}]$  του  $T(s)$  είναι ελάχιστη εάν και μόνο εάν  $n = \delta_M(T(s)) \equiv \nu(T(s))$  (Rosenbrock 1970). Ενα ανοικτό πρόβλημα που παραμένει είναι για ποιές τιμές του  $m \in \mathbb{I}^+$  η πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[C_{\omega} \in \mathbb{R}^{p \times \mu}, J_{\omega} \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_{\omega} \in \mathbb{R}^{\mu \times m} \text{ and } D_{\omega} \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  του  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  μπορεί να ονομαστεί ελάχιστη ή καλύτερα για ποιές τιμές του  $r \in \mathbb{I}^+$  η πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[E \in \mathbb{R}^{r \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times r}, B \in \mathbb{R}^{r \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times r}, \text{ ( } D \in \mathbb{R}^{p \times m} \text{ )}]$  του  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  μπορεί να ονομαστεί ελάχιστη. Ενα βασικό λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια είναι το παρακάτω :

**Λήμμα 5.11** (Vardulakis 1991a, 1991b) Εστω  $T(s) = T_0 + T_1s + \dots + T_qs^q \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$  και  $q \geq 1$  με

$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_v}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-v}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, \mathbf{0}_{p-r \times m-r} \right] \quad (5.15)$$

όπου  $q=q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_v > 0$  και  $\hat{q}_r \geq \hat{q}_{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} > 0$  είναι αντίστοιχα οι τάξεις των πόλων και των μηδενικών στο  $s=\infty$  του  $T(s)$ . Τότε

(α) Ο McMillan βαθμός του  $\tilde{T}(w) = \frac{1}{w}T\left(\frac{1}{w}\right) \in \mathbb{R}_{\text{pr}}^{p \times m}(w)$  δίνεται από την σχέση

$$\mu = \delta_M(\tilde{T}(w)) = \sum_{i=1}^k (q_i+1) = \sum_{i=1}^v (q_i+1) + k - v = q_1 + q_2 + \dots + q_v + k \quad (q_i \geq 0) \quad (5.16)$$

(β) Εάν  $C_\infty \in \mathbb{R}^{p \times \mu}$ ,  $J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ ,  $B_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times m}$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση του  $\tilde{T}(w)$  με  $J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$  στην Jordan κανονική μορφή τότε

$$J_\infty = \text{block diag}[J_{\omega_1}, J_{\omega_2}, \dots, J_{\omega_v}, 0_{k-v, k-v}] \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu} \quad (5.17)$$

όπου

$$J_{\omega_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(q_i+1) \times (q_i+1)} \quad i \in v \quad (5.18)$$

□

Βασιζόμενοι στο προηγούμενο λήμμα μπορούμε τώρα να δείξουμε το επόμενο

**Θεώρημα 5.12** Μια πραγμάτωση  $[C_\infty \in \mathbb{R}^{p \times \mu}$ ,  $J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ ,  $B_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times m}$  and  $D_\infty \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  του  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι ελάχιστη εάν και μόνο εάν

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^v (q_i+1) \quad (5.19)$$

**Απόδειξη** Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα είναι κατασκευαστική. Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)$  με αυτήν την διάσταση και ότι δεν υπάρχει άλλη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων με διάσταση μικρότερη από  $\tilde{\mu}$ .

Θεωρείστε τον πίνακα  $\tilde{T}(w) = \frac{1}{w}T\left(\frac{1}{w}\right) \in \mathbb{R}_{\text{pr}}^{p \times m}(w)$  και έστω  $[C_\infty \in \mathbb{R}^{p \times \mu}$ ,  $J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ ,  $B_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times m}]$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση στον χώρο των καταστάσεων του  $\tilde{T}(w)$  σύμφωνα με το λήμμα 5.11. Τότε

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(w) &= \frac{1}{w} T\left(\frac{1}{w}\right) = C_{\omega} (wI_{\mu} - J_{\omega})^{-1} B_{\omega} \stackrel{w=\frac{1}{s}}{\implies} \\
s T(s) &= C_{\omega} \left(\frac{1}{s} I_{\mu} - J_{\omega}\right)^{-1} B_{\omega} \implies \\
T(s) &= C_{\omega} (I_{\mu} - s J_{\omega})^{-1} B_{\omega}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

όπου από λήμμα 5.11 έχουμε ότι  $J_{\omega} \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$  είναι στην Jordan κανονική μορφή και συνεπώς

$$J_{\omega} = \text{blockdiag}[J_{\omega_1}, J_{\omega_2}, \dots, J_{\omega_v}, 0_{k-v, k-v}] =: \text{block diag}[J_{\omega}^1, 0_{k-v, k-v}] \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu} \tag{5.21}$$

όπου

$$J_{\omega_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(q_i+1) \times (q_i+1)} \quad i \in v \tag{5.22}$$

Η παραπάνω πραγμάτωση αντιστοιχεί σύμφωνα με την σχέση (5.10) στον πολυωνυμικό πίνακα

$$P(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} I_{\tilde{\mu}} - sJ_{\omega}^1 & 0 & B_{\omega}^1 \\ \hline 0 & I_{k-v} & B_{\omega}^2 \\ -C_{\omega}^1 & -C_{\omega}^2 & 0 \end{array} \right] \tag{5.23}$$

όπου  $\tilde{\mu} = \mu - (k-v) = \sum_{i=1}^v (q_i+1)$ . Μπορούμε να δούμε στην (5.15) ότι μερικές τάξεις πόλων στο  $s=\omega$  μπορεί να είναι ίσες με μηδέν και συνεπώς να οδηγούν σε μηδενικά Jordan μπλόκ πρδ.  $J_{\omega_i} = [0]$  (δες (5.21)). Σ'αυτές τις περιπτώσεις, αποτέλεσμα αυτών των μηδενικών Jordan μπλόκ είναι μερικές μη δυναμικές μεταβλητές που δεν παίζουν κανένα ρόλο (δες Verghese 1978) στην πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)$  και συνεπώς μπορούν να απορροφηθούν διαμέσου ενός σταθερού όρου  $D_{\omega}$ .

$$T(s) = C_{\omega}^1 (I_{\tilde{\mu}} - s J_{\omega}^1)^{-1} B_{\omega}^1 + C_{\omega}^2 \cdot B_{\omega}^2 \tag{5.24}$$

Η τετράδα των πινάκων  $[C_{\omega}^1 \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{\mu}}, J_{\omega}^1 \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times \tilde{\mu}}, B_{\omega}^1 \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times m}, C_{\omega}^2 \cdot B_{\omega}^2 \in \mathbb{R}^{p \times m}]$ , όπου  $\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^v (q_i+1)$  είναι μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)$ . Ας υποθέσουμε

τώρα ότι υπάρχει ακόμη μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)$ , στην Jordan κανονική μορφή, έστω  $[\bar{C}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times \bar{\mu}}, \bar{J}_\omega \in \mathbb{R}^{\bar{\mu} \times \bar{\mu}}, \bar{B}_\omega \in \mathbb{R}^{\bar{\mu} \times m}, \bar{D}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  με  $\bar{\mu} < \tilde{\mu}$ . Μπορούμε κάλλιστα να πάρουμε (Verghese 1978) από την πραγμάτωση αυτή, μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση με μη δυναμικές μεταβλητές  $[\hat{C}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times \hat{\mu}}, \hat{J}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times \hat{\mu}}, \hat{B}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times m}, \hat{D}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  με  $\hat{\mu} \leq \tilde{\mu} (< \tilde{\mu})$ . Θα έχουμε συνεπώς

$$\sum_{i=1}^h (\bar{q}_i + 1) = \hat{\mu} < \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^v (q_i + 1) \quad (5.25)$$

όπου  $\bar{q}_i > 0 \ i=1,2,\dots,h$  είναι οι τάξεις των μηδενικών στο  $s=\omega$  του  $I_{\hat{\mu}} - s\hat{J}_\omega$ . Σύμφωνα με το συμπέρασμα 5.7 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f := \delta_M(I_{\hat{\mu}} - s\hat{J}_\omega) & \stackrel{(2.69)}{=} \sum_{i=1}^h \bar{q}_i \stackrel{(5.9)}{\geq} \delta_M(T(s)) = \sum_{i=1}^v q_i \implies \\ \sum_{i=1}^v (q_i + 1) & \leq \sum_{i=1}^h \bar{q}_i + v \end{aligned} \quad (5.26)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.25) και (5.26) παίρνουμε ότι

$$\sum_{i=1}^h (\bar{q}_i + 1) < \sum_{i=1}^h \bar{q}_i + v \implies h < v \quad (5.27)$$

Βάσει του Θεωρήματος 5.9 και του γεγονότος ότι οι πραγματώσεις  $[C_\omega^1 \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{\mu}}, J_\omega^1 \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times \tilde{\mu}}, B_\omega^1 \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times m}, C_\omega^2 \cdot B_\omega^2 \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  και  $[\hat{C}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times \hat{\mu}}, \hat{J}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times \hat{\mu}}, \hat{B}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times m}, \hat{D}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  είναι ισχυρά μη αναγώγιμες θα έχουμε ότι η δομή των πόλων ( $q_i(T) > 0$ ) στο  $s=\omega$  του πίνακα  $T(s)$  είναι ισόμορφη με την δομή των μηδενικών στο  $s=\omega$  των  $(I_{\hat{\mu}} - s\hat{J}_\omega)$  και  $(I_{\tilde{\mu}} - sJ_\omega^1)$  ή ισοδύναμα

$$\#\{\text{πόλων του } T(s) \text{ στο } s=\omega\} = h < v = \#\{\text{πόλων του } T(s) \text{ στο } s=\omega\} \quad (5.28)$$

όπου  $\#$  δηλώνει τον συνολικό αριθμό, χωρίς να συμπεριλαμβάνεται και η πολλαπλότητα. Από την σχέση (5.28) μπορούμε να δούμε ότι η σχέση (5.27) δεν είναι αληθής το οποίο έρχεται και σε αντίθεση με την υπόθεση μας ότι η πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των

καταστάσεων  $[\hat{C}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times \hat{\mu}}, \hat{J}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times \hat{\mu}}, \hat{B}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times m}, \hat{D}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  του  $T(s)$  έχει  $\hat{\mu} < \tilde{\mu}$ . Έτσι έχουμε βρεί μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[C_\omega^1 \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{\mu}}, J_\omega^1 \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times \tilde{\mu}}, B_\omega^1 \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times m}, C_\omega^2, B_\omega^2 \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  του  $T(s)$  με  $\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^v (q_i + 1)$  και δείξαμε ότι δεν υπάρχει άλλη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[\bar{C}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times \hat{\mu}}, \bar{J}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times \hat{\mu}}, \bar{B}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times m}, \bar{D}_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  με διάσταση  $\hat{\mu} < \tilde{\mu}$ .  $\square$

**Συμπέρασμα 5.13** Δύο σημαντικά αποτελέσματα που απορρέουν από το θεώρημα 5.12 είναι

- (α) ότι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[C_\omega \in \mathbb{R}^{p \times \mu}, J_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times m}$  και  $D_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  του  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ελάχιστη είναι ότι η πραγμάτωση αυτή πρέπει να είναι ισχυρά μη αναγώγιμη (εδώ μη αναγώγιμη στο  $s = \infty$ ) και να μην έχει μη δυναμικές μεταβλητές.
- (β) η ελάχιστη διάσταση  $\tilde{\mu}$  που μπορεί να έχει μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[C_\omega \in \mathbb{R}^{p \times \mu}, J_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times m}$  και  $D_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m}]$  του  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι ένας σταθερός αριθμός  $\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^v (q_i(T) + 1)$ .  $\square$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.12 και τα αποτελέσματα του Rosenbrock (1970) όσον αφορά ελάχιστες πραγματώσεις στον χώρο των καταστάσεων ανστηρά ρητών πινάκων παίρνουμε ότι

**Θεώρημα 5.14** Μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[E \in \mathbb{R}^{r \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times r}, B \in \mathbb{R}^{r \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times r}, (D \in \mathbb{R}^{p \times m})]$   $r \in \mathbb{Z}^+$  του  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι ελάχιστη εάν και μόνο εάν

$$r = \nu(T(s)) + \sum_{i=1}^v (q_i(T) + 1) \quad (5.29)$$

όπου  $q_i(T) \in \mathbb{N}$  είναι οι τάξεις των ανστηρά θετικών πόλων στο  $s = \infty$  του  $T(s)$ . Ο αριθμός  $r$  θα ονομάζεται *γενικευμένη ελάχιστη διάσταση* (generalized least dimension) του  $T(s)$ .

**Απόδειξη** Έστω

$$T(s) = T_{\text{spr}}(s) + T_{\text{pol}}(s) \quad (5.30)$$



όπου  $T_{\text{spr}}(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$  είναι το αυστηρά ρητό μέρος του  $T(s)$  και  $T_{\text{pol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι το αυστηρά πολυωνυμικό μέρος του  $T(s)$ . Θεωρείστε  $[\bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \bar{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}]$  μια ελάχιστη πραγμάτωση στον χώρο των καταστάσεων του  $T_{\text{spr}}(s)$  και  $[C_{\infty} \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{\mu}}, J_{\infty} \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times \tilde{\mu}}, B_{\infty} \in \mathbb{R}^{\tilde{\mu} \times m}$  ( $D_{\infty} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ )] μια ελάχιστη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T_{\text{pol}}(s)$ . Τότε η τριάδα (τετράδα) των πινάκων

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -J_{\infty} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\tilde{\mu}) \times (n+\tilde{\mu})}; \quad A = \begin{bmatrix} \bar{J} & 0 \\ 0 & -I_{\tilde{\mu}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\tilde{\mu}) \times (n+\tilde{\mu})}$$

$$C = [\bar{C} \quad C_{\infty}] \in \mathbb{R}^{p \times (n+\tilde{\mu})}; \quad B = \begin{bmatrix} \bar{B} \\ B_{\infty} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\tilde{\mu}) \times m} \quad (D = D_{\infty}) \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (5.31)$$

όπου  $n = \nu(T_{\text{spr}}(s)) \equiv \nu(T(s))$  (Vardulakis 1991a) και  $\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^v (q_i(T_{\text{pol}}(s))+1) \equiv \sum_{i=1}^v (q_i(T(s))+1)$  (Θεώρημα 2.31), είναι μια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)$ . Ας υποθέσουμε τώρα, χωρίς απώλεια της γενίκευσης (δες θεώρημα 5.12), ότι υπάρχει μια άλλη ισχυρά μη αναγώγιμη και χωρίς μη-δυναμικές μεταβλητές πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $[\bar{E} \in \mathbb{R}^{\bar{r} \times \bar{r}}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{\bar{r} \times \bar{r}}, \bar{B} \in \mathbb{R}^{\bar{r} \times m}, \bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times \bar{r}}]$  του  $T(s)$  με  $\hat{r} < \bar{r}$  και ότι αυτή είναι στην κανονική μορφή Jordan και έστω ο πίνακας  $P(s)$  (δες 5.10) που αντιστοιχεί σ'αυτήν την πραγμάτωση είναι

$$P(s) := \begin{bmatrix} s\bar{E}-\bar{A} & \bar{B} \\ -\bar{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI_{\hat{n}}-\hat{J} & 0 & \hat{B} \\ -0 & -I_{\hat{\mu}}-s\hat{J}_{\infty} & \hat{B}_{\infty} \\ -\hat{C} & -\hat{C}_{\infty} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

όπου  $\hat{r} := \hat{n} + \hat{\mu} < \bar{r}$  ή ισοδύναμα

$$\hat{r} := \hat{n} + \sum_{i=1}^h (\bar{q}_i + 1) < \nu(T(s)) + \sum_{i=1}^v (q_i + 1) =: \bar{r} \quad (5.33)$$

όπου  $\bar{q}_i > 0 \quad i=1,2,\dots,h$  είναι οι τάξεις των μηδενικών στο  $s=\infty$  του  $I_{\hat{\mu}}-s\hat{J}_{\infty}$ . Σύμφωνα με το συμπέρασμα 5.7 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{f} := \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{s}\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}}) &= \hat{n} + \sum_{i=1}^h \bar{q}_i \geq \delta_{\mathbf{M}}(\mathbf{T}(\mathbf{s})) = \nu(\mathbf{T}(\mathbf{s})) + \sum_{i=1}^v q_i \implies \\ \nu(\mathbf{T}(\mathbf{s})) + \sum_{i=1}^v (q_i + 1) &\leq \hat{n} + \sum_{i=1}^h \bar{q}_i + v \end{aligned} \quad (5.34)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.33) και (5.34) παίρνουμε ότι

$$\hat{n} + \sum_{i=1}^h (\bar{q}_i + 1) < \hat{n} + \sum_{i=1}^h \bar{q}_i + v \implies h < v \quad (5.35)$$

Σύμφωνα με την απόδειξη του θεωρήματος 5.12 η σχέση (5.35) δεν είναι αληθής και συνεπώς ερχόμαστε σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση ότι  $\hat{r} := \hat{n} + \hat{m} < r$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι  $n + \tilde{m} = r$  είναι αληθής εάν και μόνο εάν η καινούργια πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $\mathbf{T}(\mathbf{s})$  στην σχέση (5.32) δεν έχει μη δυναμικές μεταβλητές και είναι ισχυρά μη αναγώγιμη.  $\square$

Πολλοί αλγόριθμοι έχουν παρουσιαστεί από τον Rosenbrock (1970) για τον υπολογισμό του  $\nu(\mathbf{T}(\mathbf{s}))$ . Μεταξύ αυτών παρουσιάζουμε τον παρακάτω

**Λήμμα 5.15** (Rosenbrock 1970) Εστω  $\mathbf{T}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}(\mathbf{s})^{p \times m}$ . Αναπτύσσουμε τον πίνακα  $\mathbf{T}(\mathbf{s})$  σε σειρά Laurent η οποία συγκλίνει για αρκετά μεγάλα  $|\mathbf{s}|$

$$\mathbf{T}(\mathbf{s}) = \mathbf{T}_q \mathbf{s}^q + \mathbf{T}_{q-1} \mathbf{s}^{q-1} + \dots + \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_{-1} \mathbf{s}^{-1} + \dots = \mathbf{T}_{\text{spr}}(\mathbf{s}) + \mathbf{T}_{\text{pol}}(\mathbf{s}) \quad (5.36)$$

όπου  $\mathbf{T}_{\text{spr}}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(\mathbf{s})^{p \times m}$  είναι το αυστηρά ρητό μέρος και  $\mathbf{T}_{\text{pol}}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}[\mathbf{s}]^{p \times m}$  το πολυωνυμικό μέρος του  $\mathbf{T}(\mathbf{s})$ . Εστω επίσης  $\sigma$  ο βαθμός του  $d(\mathbf{s})$ , όπου

$$\mathbf{T}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{d(\mathbf{s})} + \mathbf{D}(\mathbf{s}) \quad (5.37)$$

και  $d(\mathbf{s})$  είναι ο ελάχιστου βαθμού κοινός παρονομαστής των στοιχείων του  $\mathbf{T}(\mathbf{s})$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{s})/d(\mathbf{s})$  είναι καιονικός ρητός πίνακας και  $\mathbf{D}(\mathbf{s})$  είναι πολυωνυμικός πίνακας. Τότε το  $\nu(\mathbf{T}(\mathbf{s}))$

δίνεται από την τάξη του  $\sigma \times \sigma m$  πίνακα  $H$

$$H = \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & \cdots & T_{-\sigma} \\ T_{-2} & T_{-3} & \cdots & T_{-\sigma-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{-\sigma} & T_{-\sigma-1} & \cdots & T_{-2\sigma+1} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

□

Ένας αλγόριθμος για τον υπολογισμό της γενικευμένης ελάχιστης διάστασης  $\tau$  του  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι ο παρακάτω

**Θεώρημα 5.16** Έστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με Laurent ανάπτυξη της μορφής (5.36) και  $S_{T(s)}^{\infty}(s)$  παρόμοια της σχέσεως (5.15). Τότε η γενικευμένη ελάχιστη διάσταση  $\tau$  του  $T(s)$  δίνεται από την σχέση

$$\tau = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & \cdots & T_{-\sigma} \\ T_{-2} & T_{-3} & \cdots & T_{-\sigma-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{-\sigma} & T_{-\sigma-1} & \cdots & T_{-2\sigma+1} \end{bmatrix} + 2\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \\ T_2 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_q \\ T_3 & T_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

**Απόδειξη** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.31 και την πρόταση 2.40 που μας λέει ότι η δομή των πόλων του  $T(s)$  ταυτίζεται με την δομή των πόλων του πολυωνυμικού μέρους του  $T(s)$  παίρνουμε ότι

$$\delta_M(T_{\text{pol}}(s)) = \sum_{i=1}^k q_i = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \\ T_2 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Χρησιμοποιώντας επίσης την (5.40) παίρνουμε ότι

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & \cdots & T_q \\ T_1 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \delta_M(sT_0 + s^2T_1 + \cdots + s^{q+1}T_q) =$$

$$= \delta_M(sT(s)) = \sum_{i=1}^k (q_i+1) = \sum_{i=1}^v (q_i+1) + (k-v) \quad (5.41)$$

και

$$\begin{aligned} \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_q \\ T_3 & T_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} &= \delta_M(T_2s + T_3s^2 + \cdots + T_qs^{q-1}) = \\ &= \delta_M\left(\frac{T_1s + T_2s^2 + \cdots + T_qs^q}{s}\right) = \sum_{i=1}^v (q_i-1) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Από τις (5.40) και (5.42) παίρνουμε ότι το πλήθος  $v$  των αυστηρά θετικών πόλων στο  $s=\infty$  του  $T(s)$  είναι

$$v = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \\ T_2 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_q \\ T_3 & T_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

και συνεπώς

$$r = \nu(T(s)) + \sum_{i=1}^v (q_i+1) \stackrel{(5.38)}{=} \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & \cdots & T_{-\sigma} \\ T_{-2} & T_{-3} & \cdots & T_{-\sigma-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{-\sigma} & T_{-\sigma-1} & \cdots & T_{-2\sigma+1} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^v q_i + v =$$

$$\begin{aligned} &\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & \cdots & T_{-\sigma} \\ T_{-2} & T_{-3} & \cdots & T_{-\sigma-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{-\sigma} & T_{-\sigma-1} & \cdots & T_{-2\sigma+1} \end{bmatrix} + 2\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \\ T_2 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_q \\ T_3 & T_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.44) \\ &\stackrel{(5.40)}{=} \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & \cdots & T_{-\sigma} \\ T_{-2} & T_{-3} & \cdots & T_{-\sigma-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_{-\sigma} & T_{-\sigma-1} & \cdots & T_{-2\sigma+1} \end{bmatrix} + 2\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \\ T_2 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_q \\ T_3 & T_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

### 5.3 Ρητοί πίνακες και $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\infty\}$ -ισοδύναμοι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες.

Στην ενότητα αυτή με την βοήθεια των ελαχίστων πραγματώσεων, παρουσιάζουμε ορισμένους αλγόριθμους αναγωγής ρητών πινάκων σε  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\infty\}$ -ισοδύναμους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες. Σαν αποτέλεσμα οι δύο αυτοί ισοδύναμοι πίνακες θα εμπεριέχουν την ίδια δομή μηδενικών στο  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\infty\}$ . Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που θα παρατηρήσουμε

είναι ότι εκτός από την δομή των μηδενικών και οι ελάχιστοι δείκτες στηλών και γραμμών παραμένουν αναλλοίωτοι.

### 5.3.1 Ισοδύναμη πραγμάτωση Verghese (1978).

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Ο  $T(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως  $T(s) = T_{\text{spr}}(s) + T_{\text{pol}}(s)$  όπου  $T_{\text{spr}}(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{p \times m}$  είναι το αυστηρά ρητό μέρος και  $T_{\text{pol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι το πολυωνυμικό μέρος του  $T(s)$ . Εστω τώρα  $[C \in \mathbb{R}^{p \times n}, J \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}]$   $n \in \mathbb{I}^+$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση στον χώρο των καταστάσεων του  $T_{\text{spr}}(s)$  τέτοια ώστε

$$T_{\text{spr}}(s) = C (sI_n - J)^{-1} B \quad (5.45)$$

και  $[C_{\omega} \in \mathbb{R}^{p \times \mu}, J_{\omega} \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_{\omega} \in \mathbb{R}^{\mu \times m}, D_{\omega} \in \mathbb{R}^{p \times m}]$   $\mu \in \mathbb{I}^+$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T_{\text{pol}}(s)$  ή ισοδύναμα από συμπέρασμα 5.13 μια μη αναγώγιμη στο  $s = \omega$  πραγμάτωση με μη δυναμικές μεταβλητές του  $T_{\text{pol}}(s)$  τέτοια ώστε

$$T_{\text{pol}}(s) = C_{\omega} (I_{\mu} - sJ_{\omega})^{-1} B_{\omega} + D_{\omega} \quad (5.46)$$

Ορίζουμε τώρα τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$sE - A = \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_{\mu} - sJ_{\omega} & B_{\omega} \\ -C & -C_{\omega} & D_{\omega} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

**Θεώρημα 5.17** Ο ρητός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας  $sE - A$  της σχέσεως (5.47) είναι  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Θεωρείστε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C(sI_n - J)^{-1} & C_{\omega}(I_{\mu} - sJ_{\omega})^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_{\mu} - sJ_{\omega} & B_{\omega} \\ -C & -C_{\omega} & D_{\omega} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.48) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_\mu & 0 \\ C(sI_n - J)^{-1} & C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} & I_p & 0 & 0 & T(s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ -C & -C_\omega & D_\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} = 0 \quad (5.49)$$

(α) Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο σύνθετος ρητός πίνακας

$$Q(s) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_\mu & 0 \\ C(sI_n - J)^{-1} & C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} & I_p & 0 & 0 & T(s) \end{array} \right] \quad (5.50)$$

δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά ή μηδενικά στο  $s = \omega$  λόγω του ότι εμπεριέχει τον μοναδιαίο πίνακα  $I_{p+n+m}$  (δες απόδειξη λήμματος 3.41). Από την παρατήρηση 2.32 έχουμε ότι οι σταθεροί όροι του  $Q(s)$  δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό του  $Q(s)$  και άρα

$$\delta_M(Q(s)) = \delta_M(C(sI_n - J)^{-1} C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} T(s)) =: \delta_M(Q_2(s)) \quad (5.51)$$

(α1) Από την παρακάτω αυστηρή ισοδυναμία

$$\begin{aligned} Q_3(s) &:= (C(sI_n - J)^{-1} C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} D_\omega) = \\ &= (C(sI_n - J)^{-1} C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} T(s)) \begin{bmatrix} I_n & 0 & -B \\ 0 & I_\mu & -B_\omega \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.52)$$

έχουμε ότι η δομή των πόλων του πίνακα  $Q_2(s)$  στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  ταυτίζεται με την δομή των πόλων του πίνακα  $Q_3(s)$  στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ .

(α2) Έχουμε επίσης ότι οι πραγματώσεις

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & J_\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times (n+\mu)}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times (n+\mu)}$$

$$\tilde{C} = (C \ C_\omega) \in \mathbb{R}^{p \times (n+\mu)}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times m}, \quad \tilde{D} = D_\omega \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (5.53)$$

και

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & J_\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times (n+\mu)}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times (n+\mu)}$$

$$\bar{C} = (C \ C_\omega) \in \mathbb{R}^{p \times (n+\mu)}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu)^2}, \quad \bar{D} = D_\omega \in \mathbb{R}^{p \times (n+\mu)} \quad (5.54)$$

είναι ελάχιστες και συνεπώς ισχυρά μη αναγώγιμες. Άρα από το θεώρημα 5.9 η δομή των πόλων του

$$(C \ C_\omega) \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega \end{bmatrix}^{-1} + D_\omega \quad \text{και} \quad (C \ C_\omega) \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B_\omega \end{bmatrix} + D_\omega \quad (5.55)$$

θα ταυτίζεται με την δομή των μηδενικών του πίνακα

$$\begin{bmatrix} sI_n - J & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Συνιδιάζοντας τώρα τις σχέσεις (5.51), (α1) και (α2) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta_M(Q(s)) &= \delta_M \left( (C(sI_n - J)^{-1} \ C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} \ T(s)) \right) \stackrel{(\alpha 1)}{=} \delta_M \left( (C(sI_n - J)^{-1} \ C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} \ D_\omega) \right) = \\ &= \delta_M \left\{ (C \ C_\omega) \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega \end{bmatrix}^{-1} + D_\omega \right\} \stackrel{(\alpha 2)}{=} \delta_M \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega \end{bmatrix} \stackrel{(2.69)}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{(\alpha 2)}{=} \delta_M \left\{ (C \ C_\omega) \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B_\omega \end{bmatrix} + D_\omega \right\} = \delta_M(T(s)) = \delta_M \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Άρα οι συνθήκες του ορισμού 4.15 ικανοποιούνται για τον πίνακα  $Q(s)$ .

(β) Έστω τώρα ο σύνθετος πολυωνυμικός πίνακας

$$L(s) = \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ -C & -C_\omega & D_\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι ο πίνακας  $L(s)$  είναι αυστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & 0 \\ -C & -C_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & I_\mu & 0 & 0 & 0 & B_\omega \\ 0 & 0 & I_p & 0 & 0 & D_\omega \\ 0 & 0 & 0 & I_\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ -C & -C_\omega & D_\omega \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

ο οποίος δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και συνεπώς και ο πίνακας  $L(s)$  δεν θα περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ . Οι McMillan συνθήκες του πίνακα  $L(s)$  είναι φανερό ότι ικανοποιούνται λόγω του ότι οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πίνακα.

Άρα από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες  $T(s)$  και  $sE - A$  είναι  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδύναμοι. □



**Συμπέρασμα 5.18** Οι πίνακες  $T(s)$  και  $sE-A$  είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι και συνεπώς έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\mathbb{C}\{s\}$ . Μπορεί κανείς επίσης να δείξει βάσει του θεωρήματος 5.9 ότι οι  $T(s)$  και  $sE-A$  έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών πρδ. ο  $sE-A$  είναι ο πίνακας  $P(s)$  μιας ισχυράς μη αναγώγιμης πραγμάτωσης στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, με μη δυναμικές μεταβλητές.  $\square$

**Συμπέρασμα 5.19** Από το θεώρημα 5.9α μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι η δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}\{s\}$  του  $T(s)$  είναι ισόμορφη με την δομή των μηδενικών του πίνακα (5.56) και συνεπώς ο πίνακας  $sE-A$  μας δίνει πληροφορίες και για την δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}\{s\}$  του πίνακα  $T(s)$ .  $\square$

**Σημείωση 5.20** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 5.14 μπορούμε να βρούμε την διάσταση του ισοδύναμου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα που θα είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p+n+\mu) \times (m+n+\mu) = (p+r) \times (m+r) = \\ &= (p + \nu(T) + \sum_{i=1}^v (q_i(T)+1)) \times (m + \nu(T) + \sum_{i=1}^v (q_i(T)+1)) = \\ &= (p + \delta_M(T) + v) \times (m + \delta_M(T) + v) \end{aligned} \quad (5.60)$$

όπου  $q_i(T) \in \mathbb{N}$  είναι οι τάξεις των αυστηρά θετικών πόλων του  $T(s)$ .  $\square$

**Σημείωση 5.21** Ο μετασχηματισμός (5.48) δεν είναι ο μόνος  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός μεταξύ των πινάκων  $T(s)$  και  $sE-A$ . Οι παρακάτω μετασχηματισμοί

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ C(sI_n - J)^{-1} & C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ -C & -C_\omega & D_\omega \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
sE - A &= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ -C(sI_n - J)^{-1} & -C_\omega(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.61)
\end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & 0 \\ -C & -C_\omega & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & B \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ -C & -C_\omega & D_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & -(sI_n - J)^{-1} B \\ 0 & I_\mu & -(I_\mu - sJ_\omega)^{-1} B_\omega \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
sE - A &= \begin{bmatrix} sI_n - J & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu - sJ_\omega & 0 \\ -C & -C_\omega & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_\mu & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & (sI_n - J)^{-1} B \\ 0 & I_\mu & (I_\mu - sJ_\omega)^{-1} B_\omega \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.62)
\end{aligned}$$

είναι επίσης  $\mathcal{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ -ισοδύναμοι μετασχηματισμοί όπως κανείς μπορεί να διαπιστώσει εξετάζοντας τις συνθήκες του ορισμού 4.15. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι στην περίπτωση που ο πίνακας  $T(s)$  είναι πολυωνυμικός οι  $\mathcal{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ -ισοδύναμοι μετασχηματισμοί (5.61) και (5.62) είναι αντιστρέψιμοι μετασχηματισμοί.  $\square$

**Παράδειγμα 5.22** Θεωρήστε τον παρακάτω ρητό πίνακα

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^5 - s^4 - s^3 + s^2 + 1}{(s-1)^2} & \frac{s^4 - s^2 - s + 2}{s-1} & \frac{s^5 - 2s^4 + 2s^2 - 2}{(s-1)^2} \\ \frac{-s^3 + s + 1}{s-1} & -s^2 - s & \frac{-s^3 + s^2 + s - 2}{s-1} \end{bmatrix} \quad (E.1)$$

ο οποίος αναλύεται ως εξής

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} & \frac{s-2}{(s-1)^2} \\ \frac{1}{s-1} & 0 & -\frac{1}{s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^3+s^2 & s^3+s^2-1 & s^3-s \\ -s^2-s & -s^2-s & -s^2+1 \end{bmatrix} = T_{\text{spr}}(s) + T_{\text{pol}}(s) \quad (\text{E.2})$$

Η αλγεβρική δομή του πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{2 \times 3}$  μπορεί κάλλιστα να βρεθεί από την Smith–McMillan μορφή στο  $\mathbb{C}$  και στο  $s=\infty$  του  $T(s)$  καθώς και από τους δεξιά ελάχιστους δείκτες του  $T(s)$ . Μπορούμε να δούμε ότι

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1/(s-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$T(s) \begin{bmatrix} 2-s-0.5s^2+s^3 \\ -1.5s+s^3-s^4 \\ 1+s-0.5s^2-s^3+s^4 \end{bmatrix} = O_{21} \quad (\text{E.3})$$

Στην περίπτωση αυτή  $n=2$ ,  $\mu=q_1+1=3+1=4$ ,  $v=1$  και  $\delta_M(T)=5$ . Εστω  $[C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  και  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}]$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση στον χώρο καταστάσεων του αυστηρά ρητού μέρους του  $T(s)$  τέτοια ώστε

$$T_{\text{spr}}(s) = C(sI_2 - J)^{-1}B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

και  $[C_{\infty} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ ,  $J_{\infty} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $B_{\infty} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}]$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του αυστηρά πολυωνυμικού μέρους του  $T(s)$ , τέτοια ώστε

$$T_{\text{pol}}(s) = C_{\infty}(I_4 - sJ_{\infty})^{-1}B_{\infty} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

Τότε ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$sE-A = \begin{bmatrix} sI_2 - J & 0 & B \\ 0 & I_4 - sJ_\omega & B_\omega \\ -C & -C_\omega & D_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (E.6)$$

έχει την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $CU\{\omega\}$  καθώς και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών με τον ρητό πίνακα  $T(s)$ . Πιο συγκεκριμένα

$$S_{sE-A}^\omega(s) = [\text{diag}[s, s, s, s, s, 1, 1, \frac{1}{s}], 0_{81}] ; S_{sE-A}^C(s) = [I_8, 0_{81}]$$

και

$$(sE-A) [0.5s+s^2, 1-s-s^2+s^3, -2-s+s^2-s^3, -2-0.5s+2s^2-s^3, -3+1.5s+s^2-s^3, \\ 2-s-0.5s^2+s^3, -1.5s+s^3-s^4, 1+s-0.5s^2-s^3+s^4]^T = 0_{81} \quad (E.7)$$

Η διάσταση του ισοδύναμου αυτού πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \delta_M(T) + v) \times (m + \delta_M(T) + v) = \\ &= (2 + 5 + 1) \times (3 + 5 + 1) = 8 \times 9 \end{aligned} \quad (E.8)$$

Έχουμε επίσης ότι ο  $CU\{\omega\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός που συνδέει τον ρητό πίνακα  $T(s)$  και τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα  $sE-A$  (από σημείωση 5.21) είναι ο παρακάτω

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc|c} I_2 & & & 0 & & & 0 \\ & 0 & & & I_4 & & 0 \\ \hline & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} & 1 & s & s^2-1 & s^3-s \\ & 0 & \frac{1}{s-1} & 0 & -1 & -s & 1-s^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccccccc} s-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \\ & = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} I_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s^5-s^4-s^3+s^2+1}{(s-1)^2} & \frac{s^4-s^2-s+2}{s-1} & \frac{s^5-2s^4+2s^2-2}{(s-1)^2} \\ 0 & \frac{-s^3+s+1}{s-1} & -s^2-s & \frac{-s^3+s^2+s-2}{s-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccccccc} s-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & s-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (E.9) \quad \square$$

### 5.3.2 Ισοδύναμη πραγμάτωση Bosgra and Van Der Weiden (1980–81).

Θεωρείστε έναν ρητό πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και έστω η Laurent ανάπτυξη αυτού του ρητού πίνακα (η οποία συγκλίνει για αρκετά μεγάλα  $|s|$ ) είναι η εξής :

$$T(s) = T_q s^q + \dots + T_1 s + T_0 + T_{-1} \frac{1}{s} + T_{-2} \frac{1}{s^2} + \dots \quad (5.63)$$

Ορίζουμε τους παρακάτω Hankel πίνακες

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \dots & T_q \\ T_3 & T_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} T_3 & T_4 & \dots & T_q & 0 \\ T_4 & T_5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_B = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_q \end{bmatrix}$$

$$\Pi_C = [T_2, T_3, \dots, T_q] \quad (5.64)$$

καθώς και τους άπειρους Hankel πίνακες

$$H_E = \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & T_{-3} & \dots \\ T_{-2} & T_{-3} & T_{-4} & \dots \\ T_{-3} & T_{-4} & T_{-5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}, \quad H_A = \begin{bmatrix} T_{-2} & T_{-3} & T_{-4} & \dots \\ T_{-3} & T_{-4} & T_{-5} & \dots \\ T_{-4} & T_{-5} & T_{-6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}, \quad H_B = \begin{bmatrix} T_{-1} \\ T_{-2} \\ T_{-3} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$H_C = [T_{-1} \ T_{-2} \ T_{-3} \ \dots] \quad (5.65)$$

με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} H_E = n$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} \Pi_E = r_E$ . Ας δηλώσουμε με  $I, J$  ( $I_C, J_B$ ) τα σύνολα των  $r_E$  ( $n$ ) δεικτών γραμμών και στηλών έτσι ώστε οι γραμμές  $I$  ( $I_C$ ) και στήλες  $J$  ( $J_B$ ) του  $\Pi_E$  ( $H_E$ ) να είναι γραμμικά ανεξάρτητες αντίστοιχα. Εστω  $T_E, T_A, T_B, T_C$  ( $\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ ) είναι υποπίνακες των πινάκων  $\Pi_E, \Pi_A, \Pi_B, \Pi_C$  ( $H_E, H_A, H_B, H_C$ ), αντίστοιχα έτσι ώστε οι πίνακες  $T_E, T_A, T_B$  ( $\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}$ ) να σχηματίζονται από τις γραμμές  $I$  ( $I_C$ ) και  $T_E, T_A, T_C$  ( $\hat{E}, \hat{A}, \hat{C}$ ) να σχηματίζονται από τις στήλες  $J$  ( $J_B$ ) (Bosgra et al. 1980, 1981, Karampetakis and Vardulakis 1992). Ορίζουμε τον  $(p+r_E+n) \times (m+r_E+n)$  πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$sE-A = \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_1 s+T_0 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

**Λήμμα 5.23** (Bosgra *et al.* 1980, 1981, Hayton 1989)

$$(\alpha) \quad T(s) = T_{\text{pol}}(s) + T_{\text{spr}}(s) = [(T_C s)(T_E-sT_A)^{-1}(T_B s)+T_1 s+T_0] + [\hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1}\hat{B}].$$

(β) Οι σύνθετοι πίνακες

$$\begin{bmatrix} sE-A \\ (0 \quad I_p) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad (sE-A \quad \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}) \quad (5.67)$$

δεν έχουν μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ .

$$(\gamma) \quad \delta_M[T_{\text{pol}}(s)] = \delta_M[T_{\text{pol}}(s) \quad T_C s(T_E-sT_A)^{-1}] = \delta_M[T_{\text{pol}}(s) \quad T_C s(T_E-sT_A)^{-1}T_B] \quad \square$$

**Θεώρημα 5.24** Ο ρητός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας  $sE-A$  της σχέσης (5.66) είναι  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ -ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Θεωρήστε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} & T_C s(T_E-sT_A)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_1 s+T_0 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.68) \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & I_{r_E} & 0 \\ \hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} & T_C s(T_E-sT_A)^{-1} & I_p & | & 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-s\hat{E} & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_0+T_1 s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} = 0 \quad (5.69)$$

(α) Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο σύνθετος ρητός πίνακας

$$Q(s) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_E} & 0 \\ \hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} & T_C s(T_E-sT_A)^{-1} & I_p & 0 & 0 & T(s) \end{array} \right] \quad (5.70)$$

δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  λόγω του ότι εμπεριέχει τον μοναδιαίο πίνακα  $I_{n+r_E+p}$  (δες απόδειξη του λήμματος 3.41). Από την παρατήρηση 2.32 έχουμε ότι οι σταθεροί όροι του  $Q(s)$  δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό του πολυωνυμικού μέρους του  $Q(s)$  και συνεπώς και του  $Q(s)$  από (2.76) και άρα

$$\begin{aligned} \delta_M(Q(s)) &= \delta_M(\hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} T_C s(T_E-sT_A)^{-1} T(s)) = \\ &\stackrel{2.76}{=} \delta_M(\hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} 0 T_{\text{spr}}(s)) + \delta_M(0 T_C s(T_E-sT_A)^{-1} T_{\text{pol}}(s)) \quad (5.71) \end{aligned}$$

Βάσει της απόδειξης του θεωρήματος 5.17 για τον McMillan βαθμό [δες (α1) και (α2)] και του λήμματος 5.23γ έχουμε ότι

$$\delta_M(\hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} 0 T_{\text{spr}}(s)) = \delta_M(T_{\text{spr}}(s)) \quad (5.72\alpha)$$

$$\delta_M(0 T_C s(T_E-sT_A)^{-1} T_{\text{pol}}(s)) = \delta_M(T_{\text{pol}}(s)) \quad (5.72\beta)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.71) και (5.72) παίρνουμε ότι

$$\delta_M(Q(s)) = \delta_M(T_{\text{spr}}(s)) + \delta_M(T_{\text{pol}}(s)) = \delta_M(T(s)) \stackrel{\text{Παρ. 2.32}}{=} \delta_M \left[ \begin{array}{ccc} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{array} \right] \quad (5.73)$$

Άρα οι συνθήκες του ορισμού 4.15 ικανοποιούνται για τον πίνακα  $Q(s)$ .

(β) Εστω τώρα ο σύνθετος πολυωνυμικός πίνακας

$$L(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}-s\hat{E} & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_0+T_1 s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Από το λήμμα 5.23β έχουμε ότι ο  $L(s)$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}\{w\}$ . Από την παρατήρηση 2.32 επίσης έχουμε ότι οι σταθεροί όροι δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα και συνεπώς  $\delta_M(L(s)) = \delta_M(sE-A)$  που μας δείχνει ότι και ο πίνακας  $L(s)$  ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού 4.15.

Αρα από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι οι πίνακες  $T(s)$  και  $sE-A$  είναι  $\mathbb{C}\{w\}$ -ισοδύναμοι. □

**Συμπέρασμα 5.25** Οι πίνακες  $T(s)$  και  $sE-A$  είναι  $\mathbb{C}\{w\}$ -ισοδύναμοι και συνεπώς έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\mathbb{C}\{w\}$ . Μπορεί κανείς επίσης να δείξει βάσει του θεωρήματος 5.9 ότι οι  $T(s)$  και  $sE-A$  έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών πρδ. ο  $sE-A$  είναι ο πίνακας  $P(s)$  (δες 5.10) μας ισχυράς μη αναγώγιμης πολυωνυμικής πραγμάτωσης του  $T(s)$ . □

**Σημείωση 5.26** Η διάσταση του ισοδύναμου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα  $sE-A$  θα είναι ίση με

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p+n+r_E) \times (m+n+r_E) \quad (5.75)$$

Έχουμε όμως ότι

$$n = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & T_{-3} & \cdots \\ T_{-2} & T_{-3} & T_{-4} & \cdots \\ T_{-3} & T_{-4} & T_{-5} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \nu(T(s)) \quad (5.76\alpha)$$



και

$$r_E = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_q \\ T_3 & T_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(5.42)}{=} \sum_{i=1}^v (q_i(T)-1) \quad (5.76\beta)$$

όπου

$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_v}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-v}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, \mathbf{0}_{p-r, m-r} \right] \quad (5.77)$$

και  $q_i(T(s)) = q_i(T_{\text{pol}}(s))$  iεν από (2.66). Η σχέση (5.75) γράφεται βάσει της (5.76) ως

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \nu(T) + \sum_{i=1}^v (q_i(T)-1)) \times (m + \nu(T) + \sum_{i=1}^v (q_i(T)-1)) = \\ &= (p + \delta_M(T) - v) \times (m + \delta_M(T) - v) \end{aligned} \quad (5.78)$$

και συνεπώς η διάσταση αυτού του ισοδύναμου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα είναι μικρότερη από αυτήν του μοντέλου της μορφής Verghese.  $\square$

**Σημείωση 5.27** Ο μετασχηματισμός (5.68) δεν είναι ο μόνος  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός μεταξύ των πινάκων  $T(s)$  και  $sE-A$ . Οι παρακάτω μετασχηματισμοί

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ \hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} & T_C s(T_E-sT_A)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_1 s + T_0 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$sE-A = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ -\hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} & -T_C s(T_E-sT_A)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

καθώς και

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & 0 \\ 0 & T_E-sT_A & 0 \\ -\hat{C} & -T_C s & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_1 s + T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & -(\hat{A}-s\hat{E})^{-1}\hat{B} \\ 0 & I_{r_E} & -(T_E-sT_A)^{-1}T_B s \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ & sE-A = \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & 0 \\ 0 & T_E-sT_A & 0 \\ -\hat{C} & -T_C s & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 & (\hat{A}-s\hat{E})^{-1}\hat{B} \\ 0 & I_{r_E} & (T_E-sT_A)^{-1}T_B s \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.80) \end{aligned}$$

είναι επίσης  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι μετασχηματισμοί όπως κανείς μπορεί να διαπιστώσει εξετάζοντας τις συνθήκες του ορισμού 4.15. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι στην περίπτωση που ο πίνακας  $T(s)$  είναι πολυωνυμικός οι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι μετασχηματισμοί (5.79) και (5.80) είναι αντιστρέψιμοι μετασχηματισμοί λόγω του ότι ο πίνακας  $T_E-sT_A$  είναι αντιστρέψιμος (Bosgra et al. 1981).  $\square$

**Σημείωση 5.28** Εάν θεωρήσουμε αντί των πινάκων  $\Pi_E, \Pi_A, \Pi_B$  και  $\Pi_C$  τους πίνακες

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q \\ T_2 & T_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_q & 0 \\ T_3 & T_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ T_q & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_B = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_q \end{bmatrix}$$

$$\Pi_C = [T_1, T_2, \dots, T_q] \quad (5.81)$$

και πάρουμε κατά τον ίδιο τρόπο τους πίνακες  $P_E, P_A, P_B$  και  $P_C$  τότε είναι εύκολο να δείξουμε κατά τον ίδιο τρόπο ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$sE - A = \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E - sT_A & T_B \\ -\hat{C} & -T_C s & T_0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος με τον ρητό πίνακα  $T(s)$ , και ο  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός που τους συνδέει είναι ο παρακάτω

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}(\hat{A} - s\hat{E})^{-1} & T_C s (T_E - sT_A)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E - sT_A & T_B \\ -\hat{C} & -T_C s & T_0 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{\hat{r}_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.83) \end{aligned}$$

όπου τώρα η καινούργια διάσταση του ισοδύναμου πίνακα  $sE - A$  θα είναι

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T)) \times (m + \delta_M(T)) \quad (5.84)$$

Στην περίπτωση τώρα που θεωρήσουμε αντί των πινάκων  $\Pi_E, \Pi_A, \Pi_B$  και  $\Pi_C$  τους πίνακες

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & \cdots & T_q \\ T_1 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_q & 0 \\ T_2 & T_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ T_q & 0 & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_B = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_q \end{bmatrix}$$

$$\Pi_C = [T_0, T_1, \dots, T_q] \quad (5.85)$$

και πάρουμε κατά τον ίδιο τρόπο τους πίνακες  $P_E, P_A, P_B$  και  $P_C$  τότε είναι εύκολο να δείξουμε κατά τον ίδιο τρόπο ότι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$sE-A = \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B \\ -\hat{C} & -T_C & 0 \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος με τον ρητό πίνακα  $T(s)$ , και ο  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός που τους συνδέει είναι ο παρακάτω

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} & T_C(T_E-sT_A)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E-sT_A & T_B \\ -\hat{C} & -T_C & 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{\hat{r}_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

όπου τώρα η καμούργια διάσταση του ισοδύναμου πίνακα  $sE-A$  θα είναι

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T) + k) \times (m + \delta_M(T) + k) \quad (5.88)$$

όπου  $k$  ο αριθμός των πόλων  $q_i \geq 0$  στο  $s=\infty$ . Ο τελευταίος αλγόριθμος κατασκευής ισοδύναμου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού μοντέλου ενός ρητού πίνακα, μπορεί κάλλιστα να εφαρμοστεί στην συνέχεια (δες κεφ. 9.3.2ε) για την περίπτωση όπου  $T(s) = A(s)^{-1}$  και  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ . Στην περίπτωση αυτή η διάσταση του  $sE-A$  θα είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \delta_M(A^{-1}) + k) \times (p + \delta_M(A^{-1}) + k) = \\ &\stackrel{(2.69)}{=} (p + \delta_M(A) + k) \times (p + \delta_M(A) + k) \end{aligned} \quad (5.89)$$

Συνοψίζοντας παρατηρούμε ότι οι διαστάσεις των μοντέλων (5.82) και (5.86) είναι μεγαλύτερες από αυτήν του μοντέλου (5.66) και γι'αυτόν τον λόγο θα προτιμούμε στο εξής, το μοντέλο (5.66).  $\square$

**Αλγόριθμος 5.29** Εστω ο ρητός πίνακας  $T(s)$  αναλύεται ως

$$T(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \frac{N_k s^k + \dots + N_1 s + N_0}{a_c s^c + \dots + a_1 s + a_0} \quad (5.90)$$

όπου  $d(s)$  είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών όλων των ρητών συναρτήσεων του ρητού πίνακα  $T(s)$  και έστω η Laurent ανάπτυξη του  $T(s)$  είναι η εξής

$$T(s) = T_\ell s^\ell + T_{\ell-1} s^{\ell-1} + \dots + T_1 s + T_0 + T_{-1} \frac{1}{s} + \dots \quad (5.91)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.90) και (5.91) παίρνουμε ότι

$$N_k s^k + \dots + N_1 s + N_0 = (a_c s^c + \dots + a_1 s + a_0) (T_\ell s^\ell + \dots + T_1 s + T_0 + T_{-1} \frac{1}{s} + \dots) \quad (5.92)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του  $s$  και στα δύο μέλη της (5.92) παίρνουμε ότι  $k=c+\ell$  και τον παρακάτω αλγόριθμο υπολογισμού των  $T_i$

**Βήμα 1<sup>0</sup>**  $T_\ell = \frac{1}{a_c} N_k$

**Βήμα 2<sup>0</sup>** For  $i=\ell$  to  $-c$  (step  $-1$ )

$$T_i = \frac{1}{a_c} \left( N_{c+i} - \sum_{k=0}^{\ell-i-1} T_{\ell-k} a_{c-(\ell-i)} \right)$$

Next  $i$

**Βήμα 3<sup>0</sup>** For  $i=-c-1$  to  $\dots$  (step  $-1$ )

$$T_{-i} = -\frac{1}{a_c} \left( a_0 T_{c-i} + a_1 T_{c-i-1} + \dots + a_{c-1} T_{-i+1} \right)$$

Next  $i$

□

**Παράδειγμα 5.30** Θεωρείστε τον ρητό πίνακα του παραδείγματος 5.22

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^5 - s^4 - s^3 + s^2 + 1}{(s-1)^2} & \frac{s^4 - s^2 - s + 2}{s-1} & \frac{s^5 - 2s^4 + 2s^2 - 2}{(s-1)^2} \\ \frac{-s^3 + s + 1}{s-1} & -s^2 - s & \frac{-s^3 + s^2 + s - 2}{s-1} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

ο οποίος αναλύεται ως εξής

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} & \frac{s-2}{(s-1)^2} \\ \frac{1}{s-1} & 0 & -\frac{1}{s-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^3 + s^2 & s^3 + s^2 - 1 & s^3 - s \\ -s^2 - s & -s^2 - s & -s^2 + 1 \end{bmatrix} = T_{\text{spr}}(s) + T_{\text{pol}}(s) \quad (\text{E.2})$$

Η αλγεβρική δομή του πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{2 \times 3}$  μπορεί κάλλιστα να βρεθεί από την Smith–McMillan μορφή στο  $\mathbb{C}$  και στο  $s=\infty$  του  $T(s)$  καθώς και από τους δεξιά ελάχιστους δείκτες του  $T(s)$ . Μπορούμε να δούμε ότι

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/s & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1/(s-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$T(s) \begin{bmatrix} 2-s-0.5s^2+s^3 \\ -1.5s+s^3-s^4 \\ 1+s-0.5s^2-s^3+s^4 \end{bmatrix} = O_{21} \quad (\text{E.3})$$

Στην περίπτωση αυτή  $\delta_M(T)=5$ ,  $k=1$ ,  $v=1$ ,  $n=\nu(T)=2$  και  $r_E = \sum_{i=1}^1 (q_i(T)-1) = (3-1) = 2$ .

Εχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} T_{\text{pol}}(s) &= T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + T_3 s^3 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^3 = \\ &= \begin{bmatrix} s^3 + s^2 & s^3 + s^2 - 1 & s^3 - s \\ -s^2 - s & -s^2 - s & -s^2 + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

και

$$\begin{aligned}
 T_{\text{spr}}(s) &= T_{-1} \frac{1}{s} + T_{-2} \frac{1}{s^2} + \dots = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{s^3} + \dots = \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{i}{s^{i+1}} \right] & \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{s^i} \right] & \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{-i+2}{s^i} \right] \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{s^i} \right] & 0 & -\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{s^i} \right] \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})
 \end{aligned}$$

Θεωρείστε τους Hankel πίνακες

$$\begin{aligned}
 \Pi_E = \begin{bmatrix} T_2 & T_3 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} T_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 \Pi_B = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} &= \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad \Pi_C = (T_2 \ T_3) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.6})
 \end{aligned}$$

Οι γραμμές 1 και 3 καθώς και οι στήλες 1 και 4 του πίνακα  $\Pi_E$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες και συνεπώς ορίζουμε τα σύνολα  $I=\{1,3\}$  και  $J=\{1,4\}$ . Σχηματίζουμε τους πίνακες  $P_E$ ,  $P_A$ ,  $P_B$  και  $P_C$  σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω

$$T_E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad T_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

Θεωρείστε τους άπειρους Hankel πίνακες

$$H_E = \begin{bmatrix} T_{-1} & T_{-2} & T_{-3} & \cdots \\ T_{-2} & T_{-3} & T_{-4} & \cdots \\ T_{-3} & T_{-4} & T_{-5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$H_A = \begin{bmatrix} T_{-2} & T_{-3} & T_{-4} & \cdots \\ T_{-3} & T_{-4} & T_{-5} & \cdots \\ T_{-4} & T_{-5} & T_{-6} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \cdots \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$H_B = \begin{bmatrix} T_{-1} \\ T_{-2} \\ T_{-3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$H_C = (T_{-1} \ T_{-2} \ T_{-3} \ \cdots) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & \cdots \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

Οι γραμμές 1 και 2 καθώς και οι στήλες 1 και 2 του πίνακα  $H_E$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες και συνεπώς ορίζουμε τα σύνολα  $I_C = \{1,2\}$  και  $J_B = \{1,2\}$ . Σχηματίζουμε τους πίνακες  $\hat{E}$ ,  $\hat{A}$ ,  $\hat{C}$  και  $\hat{B}$  σύμφωνα με την μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$sE - A = \begin{bmatrix} \hat{A} - \hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E - sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_1 s + T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1-s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-s & 1 & s & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & s & s \\ 0 & -1 & -s & -s & 0 & -1 & -s \\ -1 & 0 & s & 0 & -s & -s & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

ο οποίος θα έχει διάσταση ίση με

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \delta_M(T) - v) \times (m + \delta_M(T) - v) = \\ &= (2 + 5 - 1) \times (3 + 5 - 1) = 6 \times 7 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$



Οι πίνακες  $T(s)$  και  $sE-A$  είναι  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ -ισοδύναμοι και συνδέονται με τον μετασχηματισμό της μορφής (5.68) ή (5.79) ή (5.80). Ο μετασχηματισμός της μορφής (5.79) δίνεται παρακάτω

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ \hat{C}(\hat{A}-s\hat{E})^{-1} & T_C s(T_E^{-1}sT_A)^{-1} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E^{-1}sT_A & T_B s \\ -\hat{C} & -T_C s & T_1 s+T_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_E} & 0 \\ 0 & 0 & T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}-\hat{E}s & 0 & \hat{B} \\ 0 & T_E^{-1}sT_A & T_B s \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-s} & \frac{-1}{(1-s)^2} & s & s^2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-s} & 0 & -s & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1-s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-s & 1 & s & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & s & s \\ 0 & -1 & -s & -s & 0 & -1 & -s \\ -1 & 0 & s & 0 & -s & -s & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s^5-s^4-s^3+s^2+1}{(s-1)^2} & \frac{s^4-s^2-s+2}{s-1} & \frac{s^5-2s^4+2s^2-2}{(s-1)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-s^3+s+1}{s-1} & -s^2-s & \frac{-s^3+s^2+s-2}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1-s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-s & 1 & s & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & s & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(E.12)

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι

$$S_{sE-A}^{\mathbb{C}}(s) = (I_6 \ 0) \quad ; \quad S_{sE-A}^{\omega}(s) = \text{block diag} \left[ \left( s \ s \ s \ s \ s \ \frac{1}{s} \right) \ 0_{61} \right]$$

και

$$(sE-A) [-2s+s^3, -2+3s+2s^2-2s^3, -2s+s^2, -2s^2+2s^3, 2s-s^2-2s^3+2s^4, 2-3s+2s^3-2s^4, s^2]^T = 0 \quad (\text{E.13})$$

Ισοδύναμα πρωτοβάθμια πολυωνυμικά μοντέλα του ρητού πίνακα  $T(s)$ , αλλά μεγαλύτερων διαστάσεων θα μπορούσαμε να πάρουμε στηριζόμενοι στην σημείωση 5.28. Πιο συγκεκριμένα θεωρήστε τους πίνακες

$$sE_1-A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -s & -1 & -s & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1+s & s & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & s & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

διαστάσεων  $\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T)) \times (m + \delta_M(T)) = (2+5) \times (3+5) = 7 \times 8$  (δες κατασκευή 5.82) και του πίνακα

$$sE_2-A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1-s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & s & 1 & s & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1+s & -1+s & s & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.15})$$

διαστάσεων  $\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T) + k) \times (m + \delta_M(T) + k) = (2+5+1) \times (3+5+1) = 8 \times 9$  (δες κατασκευή 5.86), όπου  $k$  είναι το πλήθος των πόλων  $q_i \geq 0$  στο  $s = \infty$ . Οι πίνακες  $sE_1-A_1$  και

$sE_2 - A_2$  είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι με τον ρητό πίνακα  $T(s)$  και συνδέονται με τον  $T(s)$  με τους μετασχηματισμούς (5.83) και (5.87) αντίστοιχα. Όπως θα δούμε σε παρακάτω κεφάλαια οι πίνακες  $sE - A$ ,  $sE_1 - A_1$  και  $sE_2 - A_2$  είναι τέλεια ισοδύναμοι επειδή ταυτίζονται με τις μορφές Rosenbrock ισχυρά μη αναγώγιμων συστημάτων που έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς.  $\square$

### 5.3.3 Ισοδύναμη πραγμάτωση Zhang (1989).

Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Θεωρείστε μια αριστερά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$  (ή ισοδύναμα μια μη αναγώγιμη πολυωνυμική πραγμάτωση του  $T(s)$ )

$$T(s) = A(s)^{-1} B(s) \quad (5.93)$$

δηλ.  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ,  $B(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $[A(s) \ B(s)]$  δεν περιέχει πεπερασμένα μηδενικά. Εστω επίσης ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  τέτοιος ώστε εαν πάρουμε

$$U(s) [A(s) \ B(s)] = [Q(s) \ R(s)] \quad (5.94)$$

ο πίνακας  $[Q(s) \ R(s)]$  να είναι κανονικός κατά γραμμές. Προφανώς οι πίνακες  $Q(s)^{p \times p}$  και  $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  αποτελούν επίσης μια αριστερά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$  εφόσον η σχέση (5.94) είναι μια σχέση αντιστρέψιμης ισοδυναμίας που διατηρεί την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ .

**Λήμμα 5.31** (Vardulakis 1991) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = p (=m)$  είναι κανονικός κατά γραμμές (στήλες) στο  $s = \infty$ . Τότε ο  $T(s)$  δεν έχει μηδενικά στο  $s = \infty$  και οι βαθμοί των γραμμών (στηλών) του, ταυτίζονται με τους βαθμούς των πόλων του στο  $s = \infty$ .  $\square$

Ο πίνακας λοιπόν  $[Q(s) \ R(s)]$  εκτός από πεπερασμένα μηδενικά δεν θα περιέχει και μηδενικά στο  $s = \infty$  λόγω του ότι είναι κανονικός κατά γραμμές (δες λήμμα 5.31). Επίσης εαν

$$S_{[Q(s) \ R(s)]}^{\infty}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_p}, 0_{pm} \right] \quad (5.95)$$

είναι η Smith μορφή στο  $s = \infty$  του  $[Q(s) \ R(s)]$ , όπου  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_p \geq 0$  είναι οι τάξεις των πόλων στο  $s = \infty$  του  $[Q(s) \ R(s)]$  τότε οι βαθμοί των γραμμών του  $[Q(s) \ R(s)]$  θα είναι

$$\delta_{r_i}([Q(s) \ R(s)]) = q_i \quad (5.96)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τον πίνακα  $[Q(s) \ R(s)]$  ως

$$[Q(s) \ R(s)] = \text{diag}\{s^{q_1}\} [Q_0 \ R_0] + \text{diag}\{s^{q_1-1}\} [Q_1 \ R_1] + \dots + \text{diag}\{s^{q_1-q_1}\} [Q_{q_1} \ R_{q_1}] \quad (5.97)$$

Θεωρείστε τώρα τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$sE - A = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} sI_p & 0 & \dots & 0 & Q_{q_1} & & R_{q_1} \\ -I_p & sI_p & \dots & 0 & Q_{q_1-1} & & R_{q_1-1} \\ 0 & -I_p & \dots & 0 & Q_{q_1-2} & & R_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & sI_p & Q_1 & & R_1 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & \dots & -I_p & Q_0 & & R_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -I_p & & 0 \end{array} \right] \quad (5.98)$$

διαστάσεων

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + (q_1+1)p) \times (m + (q_1+1)p) \quad (5.99)$$

Παρατηρούμε ότι μερικές από τις δυνάμεις του  $s$  των συντελεστών πινάκων στην σχέση (5.97) είναι αρνητικές και οι αντίστοιχες γραμμές στους συντελεστές πίνακες είναι ίσες με μηδέν. Για τον λόγο αυτό αφαιρούμε όλες τις γραμμές και τον ίδιο αριθμό στηλών που αντιστοιχούν σε αρνητικές δυνάμεις του  $s$ , έτσι ώστε να πάρουμε τον πίνακα  $sE' - A'$ .

**Λήμμα 5.32** (Janssen P. 1988) Εστω  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και  $T(s) = Q(s)^{-1}R(s) (= R(s)Q(s)^{-1})$ ,  $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $Q(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  ( $Q(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ) είναι μια αριστερά (δεξιά) πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$ . Εάν ο πίνακας  $[Q(s) \ R(s)]$  ( $[R(s) \ Q(s)]^T$ ) δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  τότε

$$\delta_M(Q(s)^{-1}R(s)) = \sum_{i=1}^k q_i [Q \ R] = \delta_M[Q(s) \ R(s)] \quad (5.100)$$

όπου τα  $q_i [Q \ R] \geq 0$  έχουν οριστεί στην σχέση (5.95).  $\square$

Βάσει του λήμματος 5.32, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η διάσταση του καυούργιου πίνακα  $sE' - A'$  θα είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \sum_{i=1}^p (q_i([Q \ R]) + 1)) \times (m + \sum_{i=1}^p (q_i([Q \ R]) + 1)) = \\ &\stackrel{(5.100)}{=} (2p + \delta_M(T)) \times (m + p + \delta_M(T)) \end{aligned} \quad (5.101)$$

**Θεώρημα 5.33** Ο ρητός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας  $sE' - A'$  που προκύπτει από την σχέση (5.98) είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Θεωρήστε την σχέση

$$\begin{aligned} \left[ Q(s)^{-1} [\text{diag}\{s^{q_1 - q_1}, \text{diag}\{s^{q_1 - q_1 + 1}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] \ I_p \right] (sE' - A') = \\ = T(s) (0 \ 0 \ \dots \ I_m) \end{aligned} \quad (5.102)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \left[ Q(s)^{-1} [\text{diag}\{s^{q_1 - q_1}, \text{diag}\{s^{q_1 - q_1 + 1}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] \ I_p \ T(s) \right] \\ \left[ \begin{array}{cccc|ccc} sI & 0 & \dots & 0 & Q_{q_1} & & R_{q_1} \\ -I & sI & \dots & 0 & Q_{q_1 - 1} & & R_{q_1 - 1} \\ 0 & -I & \dots & 0 & Q_{q_1 - 2} & & R_{q_1 - 2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & sI & Q_1 & & R_1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & -I & Q_0 & & R_0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & -I_p & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & -I_m \end{array} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.103)$$

**α)** Ο σύνθετος πίνακας

$$M(s) = \left[ Q(s)^{-1} [\text{diag}\{s^{q_1 - q_1}, \text{diag}\{s^{q_1 - q_1 + 1}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] \ I_p \ T(s) \right] \quad (5.104)$$

δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  λόγω του μοναδιαίου πίνακα  $I_p$  (δες απόδ. λήμματος 3.41). Θεωρείστε την παρακάτω αριστερή πολυωνυμική κλασματική έκφραση του πίνακα  $M(s)$

$$M(s) = Q(s)^{-1} \left[ \text{diag}\{s^{q_1 - q_1}, \text{diag}\{s^{q_1 - q_1 + 1}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\} \right] Q(s) R(s) \right] \quad (5.105)$$

Είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι ο πίνακας

$$\left[ Q(s) \text{diag}\{s^{q_1 - q_1}, \text{diag}\{s^{q_1 - q_1 + 1}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\} \right] Q(s) R(s) \right] \quad (5.106)$$

δεν περιέχει πεπερασμένα μηδενικά λόγω του ότι ο πίνακας  $[Q(s) R(s)]$  δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά (ο μ.κ.δ. όλων των  $p$ -τάξεως οριζουσών του πίνακα  $[Q(s) R(s)]$  είναι η μονάδα και συνεπώς το ίδιο ισχύει και για τον παραπάνω πίνακα). Ο παραπάνω πίνακας είναι επίσης κανονικός κατά γραμμές λόγω του ότι ο πίνακας  $[Q(s) R(s)]$  είναι κανονικός κατά γραμμές και οι βαθμοί των γραμμών του πίνακα  $[\text{diag}\{s^{q_1 - q_1}, \text{diag}\{s^{q_1 - q_1 + 1}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}]$  δεν ξεπερνούν τους βαθμούς των γραμμών του πίνακα  $[Q(s) R(s)]$ . Άρα ο πίνακας στην σχέση (5.106) δεν περιέχει μηδενικά στο  $s = \omega$  από λήμμα 5.31. Έχουμε επίσης από το λήμμα 5.32 ότι

$$\begin{aligned} \delta_M(M(s)) &= \delta_M \left[ Q(s) \text{diag}\{s^{q_1 - q_1}, \text{diag}\{s^{q_1 - q_1 + 1}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\} \right] Q(s) R(s) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^p q_i = \delta_M(Q(s) R(s)) \stackrel{\text{λήμμα 5.32}}{=} \delta_M(Q(s)^{-1} R(s)) = \delta_M(T(s)) \end{aligned} \quad (5.107)$$

και συνεπώς ο πίνακας  $M(s)$  ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού 4.15.

**β)** Θεωρείστε τώρα τον σύνθετο πίνακα

$$N(s) = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} sI & 0 & \cdots & 0 & Q_{q_1} & R_{q_1} \\ -I & sI & \cdots & 0 & Q_{q_1-1} & R_{q_1-1} \\ 0 & -I & \ddots & 0 & Q_{q_1-2} & R_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & sI & Q_1 & R_1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & -I & Q_0 & R_0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (5.108)$$

Ο πίνακας  $N(s)$  δεν περιέχει πεπερασμένα μηδενικά λόγω του ότι περιέχει μια ορίζουσα  $(\sum_{i=1}^p q_i + p + m) \times (\sum_{i=1}^p q_i + p + m)$  ίση με  $(-1)^{(\sum_{i=1}^p q_i + p + m)}$ , *πρδ.*

$$\det \left[ \begin{array}{cccc|ccc} -I & sI & \cdots & 0 & Q_{q_1-1} & R_{q_1-1} \\ 0 & -I & \ddots & 0 & Q_{q_1-2} & R_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & sI & Q_1 & R_1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & -I & Q_0 & R_0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] = (-1)^{(\sum_{i=1}^p q_i + p + m)} \quad (5.109)$$

Ο πίνακας  $N(s)$  δεν περιέχει επίσης μηδενικά στο  $s=\infty$ , λόγω του ότι υπάρχει μια  $(\sum_{i=1}^p q_i + p + m) \times (\sum_{i=1}^p q_i + p + m)$  ορίζουσα, της οποίας ο βαθμός ταυτίζεται με τον McMillan βαθμό του πίνακα  $N(s)$  που είναι  $\delta_M(N(s)) = \sum_{i=1}^p q_i$ , *πρδ.*

$$\det \left[ \begin{array}{cccc|ccc} sI & 0 & \cdots & 0 & Q_{q_1} & R_{q_1} \\ -I & sI & \cdots & 0 & Q_{q_1-1} & R_{q_1-1} \\ 0 & -I & \ddots & 0 & Q_{q_1-2} & R_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & sI & Q_1 & R_1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] = (-1)^{p+m} s^{(\sum_{i=1}^p q_i)} \quad (5.110)$$

μια συνθήκη που εξασφαλίζει την απουσία των μηδενικών στο  $s=\infty$  ενός πολυωνυμικού πίνακα (Hayton *et al.* 1988). Οι McMillan συνθήκες του ορισμού 4.15

ισχύουν για τον πίνακα  $N(s)$ , λόγω του ότι οι σταθεροί όροι δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό (Πρόταση 2.40).

Αρα από (α) και (β) έχουμε ότι ο μετασχηματισμός (5.102) είναι ένας  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός.  $\square$

**Συμπέρασμα 5.34** Οι πίνακες  $T(s)$  και  $sE'-A'$  είναι  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ -ισοδύναμοι και συνεπώς θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ . Μπορεί επίσης κανείς να παρατηρήσει ότι ο πίνακας  $sE'-A'$  γράφεται ως

$$sE'-A' = \begin{bmatrix} s\tilde{E}-\tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{C} & 0 \end{bmatrix} := \left[ \begin{array}{cccc|ccc} sI & 0 & \cdots & 0 & Q_{q_1} & & R_{q_1} \\ -I & sI & \cdots & 0 & Q_{q_1-1} & & R_{q_1-1} \\ 0 & -I & \ddots & 0 & Q_{q_1-2} & & R_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI & Q_1 & & R_1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & -I & Q_0 & & R_0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_p & & 0 \end{array} \right] \quad (5.111)$$

Είναι εύκολο επίσης να διαπιστώσουμε από την εργασία του Zhang (1989) ότι η παραπάνω πραγμάτωση είναι ισχυρά μη αναγώγιμη και συνεπώς από το θεώρημα 5.9 οι πίνακες  $T(s)$  και  $sE'-A'$  εκτός από την ίδια μηδενική δομή θα έχουν και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών. Επίσης από το θεώρημα 5.9 θα έχουμε ότι η δομή των πόλων στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  του  $T(s)$  θα είναι ισόμορφη με την δομή των μηδενικών στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  του πίνακα  $s\tilde{E}-\tilde{A}$ .  $\square$

**Σημείωση 5.35** Ο μετασχηματισμός (5.102) δεν είναι και ο μόνος  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός μεταξύ των  $sE'-A'$  και  $T(s)$ . Ο παρακάτω μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} I & & 0 \\ Q(s)^{-1}[\text{diag}\{s^{q_1-q_1}\}, \text{diag}\{s^{q_1-q_1+1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_1}\}] & I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\tilde{E}-\tilde{A} & \tilde{B} \\ -\tilde{C} & 0 \end{bmatrix} =$$



$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ (\mathbf{sE}'-\mathbf{A}') &= \begin{bmatrix} & & & & \mathbf{I} & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ -\mathbf{Q}(s)^{-1}[\text{diag}\{s^{q_1-q_1}\}, \text{diag}\{s^{q_1-q_1+1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] & & & & & & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.112)$$

όπως μπορεί εύκολα να δει κανείς είναι επίσης ένας  $\mathcal{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός. Επίσης η ισχυρά μη αναγώγιμη πολυωνυμική πραγμάτωση  $\{Q(s) \quad R(s)\}$  πρδ.  $\mathbf{T}(s)=Q(s)^{-1}R(s)$  και  $[Q(s) \quad R(s)]$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ , και η επίσης ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $\{\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}\}$  της σχέσης (5.111) συνδέονται με τον ακόλουθο πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\text{diag}\{s^{q_1-q_1}\} \quad \text{diag}\{s^{q_1-q_1+1}\} \quad \dots \quad \text{diag}\{s^{q_i}\}] & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}} \\ -\tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(s) & \mathbf{R}(s) \\ -\mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.113)$$

Όπως θα αποδείξουμε και σε παρακάτω κεφάλαια όλες οι ισχυρά μη αναγώγιμες πολυωνυμικές πραγματώσεις ενός ρητού πίνακα συνδέονται μεταξύ τους με έναν πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό. □

**Παράδειγμα 5.36** Θεωρείστε τον ρητό πίνακα του παραδείγματος 5.22

$$\mathbf{T}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^5-s^4-s^3+s^2+1}{(s-1)^2} & \frac{s^4-s^2-s+2}{s-1} & \frac{s^5-2s^4+2s^2-2}{(s-1)^2} \\ \frac{-s^3+s+1}{s-1} & -s^2-s & \frac{-s^3+s^2+s-2}{s-1} \end{bmatrix} \quad (E.1)$$

ο οποίος αναλύεται ως εξής

$$T(s) = Q(s)^{-1}R(s) = \begin{bmatrix} s-1 & s^2-s-1 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s^2+2s & s^2+2 & s^2-s \\ -s^3+s+1 & -s^3+s & -s^3+s^2+s-2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

όπου ο πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{aligned} [Q(s) \ R(s)] &= \left[ \begin{array}{cc|ccc} s-1 & s^2-s-1 & s^2+2s & s^2+2 & s^2-s \\ 0 & s-1 & -s^3+s+1 & -s^3+s & -s^3+s^2+s-2 \end{array} \right] = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^3 \end{bmatrix}}_{[Q_0 \ R_0]} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{[Q_1 \ R_1]} + \underbrace{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}}_{[Q_2 \ R_2]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[Q_3 \ R_3]} + \\ &\quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}}_{[Q_2 \ R_2]} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{[Q_3 \ R_3]} + \underbrace{\begin{bmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[Q_3 \ R_3]} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{[Q_3 \ R_3]} \quad (\text{E.3}) \end{aligned}$$

δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\infty\}$  και είναι κανονικός κατά γραμμές. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τον πίνακα

$$sE-A = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} sI_2 & 0 & 0 & Q_3 & R_3 \\ -I_2 & sI_2 & 0 & Q_2 & R_2 \\ 0 & -I_2 & sI_2 & Q_1 & R_1 \\ 0 & 0 & -I_2 & Q_0 & R_0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_2 & 0 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{ccccccc|ccc} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{E.4})$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα  $sE-A$  αντιστοιχεί σε αρνητική δύναμη του  $s$  πρδ.  $s^{-1}$ , και γ'αυτόν τον λόγο αφαιρούμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη του πίνακα  $sE-A$  για να πάρουμε τον πίνακα

$$sE' - A' = \left[ \begin{array}{cccc|ccc|ccc} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & s & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{1}{0} & \frac{0}{-1} & -\frac{0}{0} & -\frac{1}{0} & -\frac{1}{0} & -\frac{1}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (E.5)$$

διαστάσεων

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (2p + \delta_M(T)) \times (m + p + \delta_M(T)) = (2 \cdot 2 + 5) \times (3 + 2 + 5) = 9 \times 10 \quad (E.6)$$

Ο  $\mathcal{C}\{s\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός που ενώνει τον πίνακα  $T(s)$  και τον πίνακα  $sE' - A'$  είναι ο εξής

$$\begin{aligned} & \left[ Q(s)^{-1} [\text{diag}\{s^{q_i - q_{i1}}\}, \text{diag}\{s^{q_i - q_{i1} + 1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] I_p \right] (sE' - A') = \\ & = T(s) (0 \ 0 \ \dots \ I_m) \Leftrightarrow \\ & \left[ \begin{array}{cccc|ccc|cc} \frac{-s^2 + s + 1}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} & \frac{-s^3 + s^2 + s}{(s-1)^2} & \frac{s}{s-1} & \frac{-s^4 + s^3 + s}{(s-1)^2} & \frac{s^2}{s-1} & \frac{-s^5 + s^4 + s^3}{(s-1)^2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 0 & \frac{s}{s-1} & 0 & \frac{s^2}{s-1} & 0 & \frac{s^3}{s-1} & 0 & 1 \end{array} \right] \times \\ & \times \left[ \begin{array}{cccc|ccc|ccc} s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & s & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{0}{0} & -\frac{1}{0} & \frac{0}{1} & -\frac{0}{0} & -\frac{1}{0} & -\frac{1}{0} & -\frac{1}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \\ & \left[ \begin{array}{cc|c} \frac{s^5 - s^4 - s^3 + s^2 + 1}{(s-1)^2} & \frac{s^4 - s^2 - s + 2}{s-1} & \frac{s^5 - 2s^4 + 2s^2 - 2}{(s-1)^2} \\ \frac{-s^3 + s + 1}{s-1} & -s^2 - s & \frac{-s^3 + s^2 + s - 2}{s-1} \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{c} O_{37} \\ I_3 \end{array} \right] \quad (E.7) \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η μηδενική δομή στο  $\mathcal{C}\{s\}$  του πίνακα  $sE' - A'$  ταυτίζεται με την αντίστοιχη μηδενική δομή στο  $\mathcal{C}\{s\}$  του πίνακα  $T(s)$  καθώς και ότι οι

δύο πίνακες έχουν τους ίδιους δεξιά ελάχιστους δείκτες. Θα μπορούσαμε επίσης κατά ανάλογο τρόπο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε να πάρουμε έναν άλλο  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμο πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα  $sE-A$  του  $T(s)$  από μια δεξιά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση  $T(s)=R(s)Q(s)^{-1}$  με τις κατάλληλες ιδιότητες. Η δε διάσταση του καινούργιου ισοδύναμου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα  $sE-A$  θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \sum_{i=1}^m (q_i [R \ Q]^T + 1)) \times (m + \sum_{i=1}^m (q_i [R \ Q]^T + 1)) = \\ &= (p + m + \delta_M(T)) \times (2m + \delta_M(T)) \end{aligned} \quad (E.8) \quad \square$$

### 5.3.4 Ισοδύναμη πραγμάτωση Tan & Vandewall (1988).

Εστω ένας ρητός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ . Θεωρείστε μια δεξιά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$  (ή ισοδύναμα μια μη αναγώγιμη πολυωνυμική πραγμάτωση του  $T(s)$ )

$$T(s) = R(s) Q(s)^{-1} \quad (5.114)$$

τέτοια ώστε ο πίνακας  $[Q(s)^T \ R(s)^T]^T$  να είναι κανονικός κατά στήλες. Εστω επίσης

$$S^{\omega} [Q(s)^T \ R(s)^T]^T (s) = \begin{bmatrix} \text{diag}[s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_m}] \\ 0_{pm} \end{bmatrix} \quad (5.115)$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$S^T(s) = \begin{bmatrix} s^{q_1} & s^{q_1-1} & \dots & s & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{q_2} & s^{q_2-1} & \dots & s & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{q_m} & s^{q_m-1} & \dots & s & 1 \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

και γράφουμε τους πίνακες  $Q(s)$  και  $R(s)$  ως εξής

$$\begin{aligned} Q(s) &= Q_c S(s) \\ R(s) &= R_c S(s) \end{aligned} \quad (5.117)$$

όπου  $Q_c$  και  $R_c$  είναι σταθεροί πίνακες. Ακολουθώς σχηματίζουμε μια στοιχειώδη πραγμάτωση (core realization) της μορφής

$$E_c s - A_c = \text{block diag}\{E_{c1}s - A_{c1}, E_{c2}s - A_{c2}, \dots, E_{cm}s - A_{cm}\} \quad (5.118)$$

όπου

$$E_{ci}s - A_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(q_i+1) \times (q_i+1)} \quad (5.119)$$

και

$$B_c^T = \text{block diag}[B_1, B_2, \dots, B_m] \quad B_i = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times (q_i+1)} \quad (5.120)$$

$$C_c = I_n, \quad n = \sum_{i=1}^m q_i + m \quad (5.121)$$

Τελικά ορίζουμε την παρακάτω πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$E = E_c, \quad A = A_c + B_c Q_c, \quad B = B_c, \quad C = R_c C_c = R_c \quad (5.122)$$

Θεωρείστε τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$s\tilde{E} - \tilde{A} = \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

διαστάσεων

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \sum_{i=1}^m (q_i([Q^T \ R^T]^T) + 1)) \times (m + \sum_{i=1}^m (q_i([Q^T \ R^T]^T) + 1)) \stackrel{(5.100)}{=} \\ &= (p + m + \delta_M(T)) \times (2m + \delta_M(T)) \end{aligned} \quad (5.124)$$

**Θεώρημα 5.37** Ο πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  και ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας  $s\tilde{E} - \tilde{A}$  είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Θεωρείστε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -S(s)Q(s)^{-1} \\ I & I \end{bmatrix} \quad (5.125)$$

ή ισοδύναμα

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} B & 0 & sE-A & B \\ 0 & I & -C & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & T(s) \\ \hline 0 & S(s)Q(s)^{-1} \\ -I & -I \end{array} \right] = 0 \quad (5.126)$$

(α) Ο σύνθετος πίνακας

$$M(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} B & 0 & sE-A & B \\ 0 & I & -C & 0 \end{array} \right] \quad (5.127)$$

είναι ανστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & sE_c-A_c & B_c \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} B & 0 & sE-A & B \\ 0 & I & -C & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & R_c & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ -I & 0 & Q_c & I \end{array} \right] \quad (5.128)$$

ο οποίος είναι φανερό από την δομή του (δες (5.119) και (5.120)) ότι δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{U}\{\infty\}$ . Οι McMillan συνθήκες επίσης ισχύουν λόγω του ότι οι σταθεροί όροι δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα (πρόταση 2.40).

(β) Ο σύνθετος πίνακας

$$N(s) = \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & T(s) \\ \hline 0 & S(s)Q(s)^{-1} \\ -I & -I \end{array} \right] \quad (5.129)$$

είναι ανστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$N'(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(s) \\ 0 & S(s)Q(s)^{-1} \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(s) \\ 0 & S(s)Q(s)^{-1} \\ -I & -I \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η πολυωνυμική κλασματική έκφραση

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ S(s)Q(s)^{-1} \\ -I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ S(s) \\ -Q(s) \end{bmatrix} Q(s)^{-1} \quad (5.131)$$

είναι προφανώς δεξιά πρώτη λόγω του ότι ο πίνακας  $[Q(s)^T \ R(s)^T]^T$  δεν περιέχει πεπερασμένα μηδενικά. Επίσης λόγω της ειδικής μορφής του πίνακα  $S(s)$  και των σχέσεων (5.117) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας  $[R(s)^T \ -S(s)^T \ Q(s)^T \ Q(s)^T]^T$  είναι καιονικός κατά στήλες και συνεπώς δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$ . Άρα πρώτο βασικό συμπέρασμα είναι ότι ο πίνακας της σχέσεως (5.130) ή ισοδύναμα (5.129) δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\infty\}$ . Ένα δεύτερο συμπέρασμα προέρχεται από το λήμμα 5.32 και το γεγονός ότι ο πίνακας  $[R(s)^T \ -S(s)^T \ Q(s)^T \ Q(s)^T]^T$  είναι καιονικός κατά στήλες και είναι ότι

$$\begin{aligned} \delta_M \begin{bmatrix} T(s) \\ S(s)Q(s)^{-1} \\ -I \end{bmatrix} &= \delta_M (R(s)^T \ -S(s)^T \ Q(s)^T \ Q(s)^T)^T = \\ &= \sum_{i=1}^m q_i (Q^T \ R^T)^T = \delta_M (R(s)Q(s)^{-1}) = \delta_M (T(s)) \end{aligned} \quad (5.132)$$

Βάσει της σχέσεως (5.132) μπορεί κανείς τώρα να διαπιστώσει ότι

$$\delta_M(N(s)) \stackrel{(5.130)}{=} \delta_M(N'(s)) \stackrel{\text{λημμα 2.40}}{=} \delta_M \begin{bmatrix} T(s) \\ S(s)Q(s)^{-1} \\ -I \end{bmatrix} =$$

$$\stackrel{(5.132)}{=} \delta_M(T(s)) \stackrel{\text{λημμ}\alpha\ 2.40}{=} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} \quad (5.133)$$

που αποδεικνύει ότι ο πίνακας  $N(s)$  ικανοποιεί την McMillan συνθήκη του ορισμού 4.15.

Από (α) και (β) διαπιστώνουμε ότι ο μετασχηματισμός (5.125) είναι ένας  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος μετασχηματισμός.  $\square$

**Σημείωση 5.38** Οι πίνακες  $T(s)$  και  $s\tilde{E}-\tilde{A}$  είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι και συνεπώς θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\mathbb{C}\{s\}$ . Μπορούμε να κάνουμε επίσης την εξής παρατήρηση εδώ, χωρίς απόδειξη. Ο παρακάτω μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(s) & I \\ -R(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.132)$$

είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός που συνδέει τις δύο πολυωνυμικές πραγματώσεις του πίνακα  $T(s)$ . Όπως θα δούμε και παρακάτω, μετασχηματισμοί της μορφής αυτής έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά της πραγμάτωσης αυτής. Στην περίπτωση αυτή εφόσον η πραγμάτωση  $\{Q(s), R(s)\}$  είναι ισχυρά μη αναγώγιμη και η  $\{E, A, B, C\}$  θα είναι ισχυρά μη αναγώγιμη και συνεπώς οι πίνακες  $T(s)$  και  $s\tilde{E}-\tilde{A}$  θα έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες από το θεώρημα 5.9. Επίσης η δομή των πόλων στο  $\mathbb{C}\{s\}$  του πίνακα  $T(s)$  θα ταυτίζεται με την δομή των μηδενικών  $\mathbb{C}\{s\}$  του πίνακα  $sE-A$  σύμφωνα με το ίδιο θεώρημα.  $\square$

**Παράδειγμα 5.39** Θεωρείστε τον ρητό πίνακα του παραδείγματος 5.22

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^5-s^4-s^3+s^2+1}{(s-1)^2} & \frac{s^4-s^2-s+2}{s-1} & \frac{s^5-2s^4+2s^2-2}{(s-1)^2} \\ \frac{-s^3+s+1}{s-1} & -s^2-s & \frac{-s^3+s^2+s-2}{s-1} \end{bmatrix} \quad (E.1)$$



ο οποίος αναλύεται ως εξής

$$T(s) = R(s)Q(s)^{-1} = \begin{bmatrix} s^2-s & -s^2-2s+2 & 2s+2 \\ -s+1 & s+2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & 0 & s \\ -s^2+s & s-2 & -2s+1 \\ s^2-s & -s+1 & s \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{E.2})$$

όπου ο πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} R(s) \\ Q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2-s & -s^2-2s+2 & 2s+2 \\ -s+1 & s+2 & 0 \\ -s^2+s & s-2 & -2s+1 \\ s^2-s & -s+1 & s \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά και είναι καινονικός κατά στήλες με συνέπεια να μην έχει ούτε μηδενικά στο  $s=\infty$ . Εστω τώρα

$$S^T(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} s^2 & s & 1 & 0 \\ \hline & s^2 & s & 1 \\ 0 & & & s \end{array} \right] \quad (\text{E.4})$$

Οι πίνακες  $Q(s)$  και  $R(s)$  γράφονται πιο αναλυτικά ως εξής

$$R(s) = R_c S(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} S(s) \quad (\text{E.5})$$

και

$$Q(s) = Q_c S(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} S(s) \quad (\text{E.6})$$

Ορίζουμε τώρα την στοιχειώδη πραγμάτωση (core realization)

$$E_c s - A_c = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ -1 & s & 0 & & & \\ 0 & -1 & s & & & \\ \hline & & & \bar{0} & \bar{0} & 0 \\ & & & -1 & s & 0 \\ & 0 & & 0 & -1 & s \\ \hline & & & & & \bar{0} & \bar{0} \\ & & & & & -1 & s \end{array} \right] \quad B_c = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ \hline & & & & & \bar{1} \\ 0 & & & & & 0 \end{array} \right] \quad C_c = I_8 \quad (E.7)$$

από την οποία παίρνουμε βάσει της σχέσεως (5.122)

$$sE - A = sE_c - A_c - B_c Q_c = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & s & 0 & & & & & 0 \\ 0 & -1 & s & & & & & 0 \\ \hline \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\ 0 & & & -1 & s & 0 & & 0 \\ & & & 0 & -1 & s & & \\ \hline \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ & 0 & & 0 & 0 & & -1 & s \end{array} \right] \quad (E.8\alpha)$$

και

$$B = B_c = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ \hline 0 & & & & & \bar{1} \\ & & & & & 0 \end{array} \right] \quad C = R_c C_c = \left[ \begin{array}{cccccccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (E.8\beta)$$

Άρα ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$s\tilde{E} - \tilde{A} = \left[ \begin{array}{cc} sE - A & B \\ -C & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (E.9)$$

διαστάσεων

$$\begin{aligned}\lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + m + \delta_M(T)) \times (2m + \delta_M(T)) = \\ &= (2 + 3 + 5) \times (2 \cdot 3 + 5) = 10 \times 11\end{aligned}\quad (\text{E.10})$$

θα είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμος με τον ρητό πίνακα  $T(s)$  κάτω από τον  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -S(s)Q(s)^{-1} \\ I & I \end{bmatrix}\quad (\text{E.11})$$

Μπορούμε εδώ να τολήσουμε ότι ανάλογη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων θα μπορούσαμε να έχουμε εάν πάρουμε μια αριστερά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$  και ακολουθήσουμε έναν αντίστοιχο αλγόριθμο. Η μόνη διαφορά θα είναι ότι η διάσταση του καινούργιου πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα  $sE - A$  θα είναι ίση με

$$\begin{aligned}\lambda_1 \times \lambda_2 &= (p + \sum_{i=1}^p (q_i + 1)) \times (m + \sum_{i=1}^p (q_i + 1)) = \\ &= (2p + \delta_M(T)) \times (m + p + \delta_M(T))\end{aligned}\quad (\text{E.12}) \quad \square$$

### 5.3.5 Συγκρίσεις ισοδύναμων πραγματώσεων.

Θα θέλαμε να αναφέρουμε ότι οι πραγματώσεις ρητών πινάκων καθώς και οι ισοδύναμοι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες ενός ρητού πίνακα που αναφέραμε παραπάνω, δεν υπάρχουν σε αυτήν την μορφή στην παραπάνω βιβλιογραφία αλλά προέρχονται από επεξεργασία στοιχείων της βιβλιογραφίας από τον συγγραφέα. Τα μοντέλα που αναφέραμε παραπάνω δεν είναι και τα μόνα μοντέλα που υπάρχουν. Κάλλιστα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε ορισμένες πηγές όπως (Aplevich 1981, Conte & Perdon 1982, M.A.Christodoulou 1988, Kuijper & Shumacher 1990, 1992 e.t.c.), βάσει των οποίων θα μπορούσαμε να έχουμε ανάλογα αποτελέσματα. Σκοπός μας ήταν να παρουσιάσουμε την μετάβαση από έναν ρητό πίνακα σε ένα  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμο πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα, στηριζόμενοι στα πιο γνωστά μοντέλα στην βιβλιογραφία. Παρακάτω

δίνουμε μια σύγκριση των διαστάσεων των ισοδύναμων αυτών μοντέλων.

Εστω ένας ρητός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} T(s) = r$ , του οποίου η Smith μορφή στο  $s = \infty$  είναι η παρακάτω

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_v}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-v}, \frac{1}{\hat{q}_{k+1}}, \dots, \frac{1}{\hat{q}_r}, \mathbf{0}_{p-r \times m-r} \right] \quad (5.135)$$

Τότε οι διαστάσεις των αντιστοίχων  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμων πρωτοβάθμιων πολυωνυμικών μοντέλων που προκύπτουν από τα κεφάλαια (5.3.1–5.3.4) είναι οι εξής

#### Μοντέλο Verghese (1978)

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T) + v) \times (m + \delta_M(T) + v)$$

#### Μοντέλο Bosgra & Van Der Weiden (1980, 1981)

Μοντέλο 1 (δες 5.66)

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T) - v) \times (m + \delta_M(T) - v)$$

Μοντέλο 2 (δες 5.82)

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T)) \times (m + \delta_M(T))$$

Μοντέλο 3 (δες 5.86)

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + \delta_M(T) + k) \times (m + \delta_M(T) + k)$$

#### Μοντέλο Zhang (1989)

Από αριστερή Π.Κ.Ε.

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (2p + \delta_M(T)) \times (m + p + \delta_M(T))$$

Από δεξιά Π.Κ.Ε.

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + m + \delta_M(T)) \times (2m + \delta_M(T))$$

**Μοντέλο Tan & Vandewall (1988)**

Από αριστερή Π.Κ.Ε.

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (2p + \delta_M(T)) \times (m + p + \delta_M(T))$$

Από δεξιά Π.Κ.Ε.

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = (p + m + \delta_M(T)) \times (2m + \delta_M(T))$$

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι το μοντέλο 1 της μορφής Bosgra & Van Der Weiden (1980, 1981) είναι αυτό με την μικρότερη διάσταση. Εστω τώρα ότι

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} \left[ \frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)}, 0_{p-r \times m-r} \right] \quad (5.136)$$

όπου  $\deg \epsilon_i(s) = n_i$ ,  $i \in \mathbb{I}$ . Θεωρητικά τώρα ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας  $sE - A$  με την μικρότερη διάσταση, που θα ήταν ισοδύναμος με τον  $T(s)$  δηλ. θα είχε την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και τους ίδιους δεξιά και αριστερά ελάχιστους δείκτες (ή με άλλη ονομασία τους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών αντίστοιχα), θα έπρεπε να έχει διάσταση ίση με

$$\begin{aligned} \lambda_1 \times \lambda_2 &= \left( \sum_{i=1}^r n_i + \sum_{i=k+1}^r (\hat{q}_i + 1) + \sum_{i=r+1}^m \epsilon_i + \sum_{i=r+1}^p (\eta_i + 1) \right) \times \\ &\times \left( \sum_{i=1}^r n_i + \sum_{i=k+1}^r (\hat{q}_i + 1) + \sum_{i=r+1}^m (\epsilon_i + 1) + \sum_{i=r+1}^p \eta_i \right) = \\ &= (p + \delta_M(T) - k) \times (m + \delta_M(T) - k) \end{aligned} \quad (5.137)$$

όπου  $\epsilon_i$  και  $\eta_i$  είναι οι ελάχιστοι δείκτες στηλών και γραμμών αντίστοιχα και από Verghese (1979)

$$\delta_M(T) = \sum_{i=1}^r n_i + \sum_{i=k+1}^r \hat{q}_i + \sum_{i=r+1}^m \epsilon_i + \sum_{i=r+1}^p \eta_i \quad (5.138)$$

Στην περίπτωση λοιπόν που ο πίνακας  $T(s)$  δεν διαθέτει πόλους στο  $s=\infty$  μηδενικής τάξης πρδ.  $q_i=0$  ή ισοδύναμα  $k=v$ , τότε το μοντέλο της μορφής Bosgra & Van Der Weiden είναι και το ελάχιστο που μπορούμε να πάρουμε.

#### 5.4 Η Kronecker κανονική μορφή ρητών πινάκων.

Στο κεφάλαιο αυτό ερχόμαστε να δώσουμε μια γενίκευση της μορφής Kronecker (θεώρημα 2.43) για ρητούς πίνακες. Πιο συγκεκριμένα έστω

$$S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} \left[ \frac{a_1(s)}{b_1(s)}, \frac{a_2(s)}{b_2(s)}, \dots, \frac{a_r(s)}{b_r(s)}, \mathbf{0}_{p-r \times m-r} \right] \quad (5.139)$$

όπου

$$a_i(s) = (s-\lambda_1)^{\sigma_{i1}} (s-\lambda_2)^{\sigma_{i2}} \dots (s-\lambda_f)^{\sigma_{if}} \quad i \in \mathbb{r} \quad (5.140)$$

και

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_v}, \underbrace{1, \dots, 1}_{k=v}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, \mathbf{0}_{p-r \times m-r} \right] \quad (5.141)$$

Εστω επίσης  $\varepsilon_{r+1}=\varepsilon_{r+2}=\dots=\varepsilon_{r+g}=0 < \varepsilon_{r+g+1} \leq \varepsilon_{r+g+2} \leq \dots \leq \varepsilon_m$  και  $\eta_{r+1}=\eta_{r+2}=\dots=\eta_{r+h}=0 < \eta_{r+h+1} \leq \eta_{r+h+2} \leq \dots \leq \eta_p$  είναι αντίστοιχα οι ελάχιστοι δείκτες στηλών και γραμμών του  $T(s)$ .

**Θεώρημα 5.40** Κάθε ρητός πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  είναι  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\infty\}$ -ισοδύναμος με μια κανονική μορφή ενός πρωτοβάθμιου πολυωνυμικού πίνακα πρώτου βαθμού, την λεγόμενη **Kronecker κανονική μορφή** (Kronecker canonical form) η οποία είναι η εξής :

$$M(s) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T(s) \end{bmatrix} = \text{block diag} [0_{h,g}, \mathbf{I}, L_{\varepsilon}(s), L_{\eta}(s), s\mathbf{I}_n + \mathbf{J}, \mathbf{I}_{\mu} + s\mathbf{J}_{\infty}] N(s) \quad (5.142)$$

όπου

$$1) \quad \mathbf{J} = \text{block diag} [\mathbf{J}_{11}, \mathbf{J}_{12}, \dots, \mathbf{J}_{df}] \quad (5.143)$$

$$\mathbf{J}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_{ij} \times \sigma_{ij}} \quad i \in \mathbb{r} \text{ και } j \in \mathbb{f} \quad (5.144)$$

$$2) \quad J_{\omega} = \text{block diag}[J_{\omega_1}, J_{\omega_2}, \dots, J_{\omega_{r-k}}] \quad (5.145)$$

$$J_{\omega_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{0} & \dot{0} & 0 & \dots & \dot{1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\hat{q}_{\omega_i+1}) \times (\hat{q}_{\omega_i+1})} \quad i=k+1, \dots, r \quad (5.146)$$

$$3) \quad L_{\epsilon}(s) = \text{block diag}[L_{\epsilon_{r+g+1}}(s), L_{\epsilon_{r+g+2}}(s), \dots, L_{\epsilon_m}(s)] \quad (5.147)$$

$$L_{\epsilon_i}(s) = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{\epsilon_i \times (\epsilon_i+1)} \quad i=r+1, \dots, m \quad (5.148)$$

$$4) \quad L_{\eta}(s) = \text{block diag}[L_{\eta_{r+h+1}}(s), L_{\eta_{r+h+2}}(s), \dots, L_{\eta_p}(s)] \quad (5.149)$$

$$L_{\eta_i}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & s & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(\eta_i+1) \times \eta_i} \quad i=r+1, \dots, p \quad (5.150)$$

**Απόδειξη** Οι  $\mathbb{C}\{\omega\}$ -ισοδύναμες σχέσεις (5.48), (5.68), (5.102), (5.125) μας δείχνουν ότι πάντα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε

$$M'(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} = (sE - A) N'(s) \quad (5.151)$$

όπου ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας  $sE - A$  θα περιέχει την μηδενική δομή του  $T(s)$  στην περιοχή  $\mathbb{C}\{\omega\}$  καθώς και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών. Από θεώρημα 2.43 έχουμε επίσης ότι υπάρχουν σταθεροί και αντιστρέψιμοι πίνακες  $V$  και  $U$  τέτοιοι ώστε

$$V (sE-A) U = \text{block diag} [0_{h,g}, I, L_\epsilon(s), L_\eta(s), sI_n + J, I_\mu + sJ_\omega] \quad (5.152)$$

Ο συνδιασμός των (5.151) και (5.152) καθώς και το γεγονός ότι πράξεις αντιστρέψιμης ισοδυναμίας δεν μεταβάλλουν την  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδυναμία μας δίνει την  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδυναμία (5.142) όπου  $M(s) = VM'(s)$  και  $N(s) = U^{-1}N'(s)$ , που αποδεικνύει και το θεώρημα μας.  $\square$

Ας σημειωθεί ότι στην περίπτωση τετράγωνων και αντιστρέψιμων ρητών πινάκων δεν έχουμε στην κανονική μορφή εμφάνιση των πινάκων  $\{0_{h,g}, L_\epsilon(s), L_\eta(s)\}$  και η κανονική αυτή μορφή θα ονομάζεται **Weierstrass κανονική μορφή** (*Weierstrass canonical form*).

**Παρατήρηση 5.41** Για κάθε ρητό πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  Υπάρχουν πάντα τετράγωνοι και με ορίζουσα διάφορη του μηδενός ρητοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε

$$\text{block diag} [0_{h,g}, I, L_\epsilon(s), L_\eta(s), sI_n + J, I_\mu + sJ_\omega] = M(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} N(s) \quad (5.153)$$

Στην περίπτωση μάλιστα που ο πίνακας  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  τότε οι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  μπορούν να παρθούν ως αντιστρέψιμοι (*unimodular matrices*).

**Απόδειξη** Η απόδειξη είναι συνέπεια των σχέσεων (5.61) και (5.62) (καθώς (5.79) και (5.80)) σε συνδιασμό με την αντιστρέψιμη ισοδυναμία (5.152).  $\square$

**Παράδειγμα 5.42** Θεωρήστε τον πολυωνυμικό πίνακα

$$\begin{aligned} T(s) &= \begin{bmatrix} s^3 + s^2 & s^3 + s^2 - 1 & s^3 - s \\ -s^2 - s & -s^2 - s & -s^2 + 1 \end{bmatrix} = T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + T_3 s^3 = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} s^3 \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

με την εξής αλγεβρική δομή



$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad S_{T(s)}^{\mathcal{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \quad T(s) \begin{bmatrix} 1-s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = 0_{21} \quad (\text{E.2})$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Bosgra & Van Der Weiden σχηματίζουμε τους Hankel πίνακες

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} T_2 & T_3 \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} T_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Pi_B = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{και} \quad \Pi_C = [T_2 \ T_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.3})$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι  $r_E := \text{rank}_{\mathbb{R}} \Pi_E = 2$  και εάν λοιπόν διαλέξουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα γραμμές  $\{1,2\}$  και στήλες  $\{3,4\}$  του πίνακα  $\Pi_E$  παίρνουμε

$$T_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad T_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

και έτσι ο πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

$$T_F(s) = \begin{bmatrix} T_E - sT_A & -T_B s \\ T_C s & T_1 s + T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & 1-s & -s & 0 \\ -1 & 0 & s & s \\ 0 & s & 0 & -1-s \\ -s & 0 & -s & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

έχει την ίδια αλγεβρική δομή με τον πίνακα  $T(s)$ .

$$S_{T_F(s)}^{\mathcal{C}}(s) = [\text{diag}[1,1,1,(s+1)] \mid 0_{4 \times 1}]; \quad S_{T_F(s)}^{\omega}(s) = [\text{diag}[s,s,s,\frac{1}{s}] \mid 0_{4 \times 1}] \\ T_F(s) [-s, -s, 1-s, 0, s]^T = 0_{4 \times 1} \quad (\text{E.6})$$

Σύμφωνα με την σχέση (5.79) έχουμε ότι οι πίνακες  $T_F(s)$  και  $T(s)$  συνδέονται με τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline -s & s^2 \\ 0 & -s \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccccc} -s & 1 & -s & -s & 0 \\ -1 & 0 & s & s & s \\ 0 & s & 0 & -1 & -s \\ -s & 0 & -s & -s & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & \begin{array}{ccc} s^3+s^2 & s^3+s^2-1 & s^3-s \\ -s^2-s & -s^2-s & -s^2+1 \end{array} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} -s & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline O_{3 \times 2} & I_3 \end{array} \right] \begin{array}{ccc} -s & -s & 0 \\ s & s & -s \\ s & s & -s \end{array} \quad (E.7)$$

ή ισοδύναμα υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε

$$\left[ \begin{array}{ccccc} -s & 1 & -s & -s & 0 \\ -1 & 0 & s & s & s \\ 0 & s & 0 & -1 & -s \\ -s & 0 & -s & -s & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline s & -s^2 \\ 0 & s \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & \begin{array}{ccc} s^3+s^2 & s^3+s^2-1 & s^3-s \\ -s^2-s & -s^2-s & -s^2+1 \end{array} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} -s & 1 \\ -1 & 0 \\ \hline O_{3 \times 2} & I_3 \end{array} \right] \begin{array}{ccc} -s & -s & 0 \\ s & s & -s \\ s & s & -s \end{array} \quad (E.8)$$

Εχουμε επίσης ότι υπάρχουν τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι πίνακες  $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  και  $N \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  τέτοιοι ώστε

$$s\tilde{E} - \tilde{A} = M T_F(s) N \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} s+1 & 0 \\ \hline 1 & -s \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 \\ & -1 & -s \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccccc} -s & 1 & -s & -s & 0 \\ -1 & 0 & s & s & s \\ 0 & s & 0 & -1 & -s \\ -s & 0 & -s & -s & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (E.9)$$

και έτσι εάν συνδιάσουμε τις σχέσεις (E.8) και (E.9) παίρνουμε την ακόλουθη  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμη Kronecker κανονική μορφή του πίνακα  $T(s)$  :

$$\left[ \begin{array}{c|c} s+1 & 0 \\ \hline 1 & -s \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 \\ & -1 & -s \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & s+1 & 0 & 1 \\ s & -s^2 & 1 & 0 \\ -1 & s & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & \begin{array}{ccc} s^3+s^2 & s^3+s^2-1 & s^3-s \\ -s^2-s & -s^2-s & -s^2+1 \end{array} \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & s \\ s+1 & 0 & -1 & 1 & -s \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (E.10) \quad \square$$

Εστω  $\mathcal{P}(p,m)$  το σύνολο των  $(r+p) \times (r+m)$  ρητών πινάκων όπου  $r \geq \max(-p, -m)$ . Εστω επίσης  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}(p,m)$  και είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι. Θα συμβολίζουμε την  $\mathbb{C}\{s\}$ -σχέση ισοδυναμίας αυτών των πινάκων ως εξής

$$P_1(s) \underset{\mathbb{C}\{s\}}{\sim} P_2(s) \quad (5.154)$$

Εστω επίσης

$$g : \mathcal{P}(p,m) \longrightarrow \mathcal{P}(p,m) : g(P(s)) = sE-A \quad (5.155)$$

όπου  $sE-A$  είναι η στάνταρ μορφή Kronecker του πίνακα  $P(s)$ . Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η απεικόνιση  $g$  ικανοποιεί την παρακάτω σχέση :

$$P(s) \underset{\sim}{\sim}^{\mathbb{C}U\{\omega\}} g(P(s)) \quad (5.156)$$

Παρόλα αυτά δεν ξέρουμε εάν η απεικόνιση  $g$  ικανοποιεί την σχέση :

$$P_1(s) \underset{\sim}{\sim}^{\mathbb{C}U\{\omega\}} P_2(s) \Leftrightarrow g(P_1(s)) \underset{\sim}{\sim}^{\mathbb{C}U\{\omega\}} g(P_2(s)) \quad (5.157)$$

ή ισοδύναμα δεν ξέρουμε εάν η  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτη δεξιά και αριστερή μηδενική δομή ρητών πινάκων. Το αντίστροφο της σχέσεως (5.157) αποδεικνύεται στο παράρτημα 1 παρόλα αυτά το ευθύ μέρος της σχέσεως (5.157) παραμένει ανοικτό για περαιτέρω έρευνα. Συνεπώς σύμφωνα με την ενότητα 2.2.5.2 η απεικόνιση  $g$  δεν είναι σίγουρο εάν είναι κανονική απεικόνιση και άρα και η μορφή Kronecker που αναφέραμε στο θεώρημα 5.40 δεν είναι σίγουρο εάν είναι μια κανονική μορφή. Παρόλα αυτά δίνουμε αυτήν την ονομασία στον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα της σχέσεως (5.142) λόγω του ότι η Kronecker μορφή του θεωρήματος 5.40 εμπεριέχει όλες τις πληροφορίες που αφορούν την μηδενική δομή ενός ρητού πίνακα στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  καθώς και την δεξιά και αριστερή μηδενική δομή του.

## 5.5 Περίληψη

Στο κεφάλαιο αυτό δώσαμε μια πλήρη εικόνα της πραγματώσεως στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων ενός ρητού πίνακα. Ορίσαμε την ελάχιστη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων ενός ρητού πίνακα και δείξαμε ότι είναι ή ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων η οποία δεν περιέχει μη δυναμικές μεταβλητές. Στην συνέχεια προτείναμε ορισμένα μοντέλα πραγματώσεως στον χώρο των καταστάσεων ενός ρητού πίνακα, βάσει των οποίων βρήκαμε  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδύναμους πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες ενός ρητού πίνακα. Αποτέλεσμα όλων των παραπάνω ήταν ο προσδιορισμός μιας  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδύναμης μορφής Kronecker για την γενική μορφή των ρητών πινάκων. Σημαντική εφαρμογή των  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ -ισοδύναμων αυτών μοντέλων

όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια είναι η κατασκευή πλήρως ισοδύναμων πολυωνομικών περιγραφών συστημάτων στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, γενικών πολυωνομικών περιγραφών συστημάτων.

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (I)., *J.Austral.Math.Soc.Ser. B*, **27**, 194–222.
- [A2] Applevich J.D., 1981, Time–domain input–output representations of linear systems. *Automatica*, **17**, 509–522.
- [B1] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1980, Input–output invariants for linear multivariable systems., *IEEE Trans. Auto. Control*, **25**, 20–36.
- [B2] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations in generalized state–space form for polynomial system matrices, and the definition of poles, zeros and decoupling zeros at infinity, *Int.J.Control*, **33**, 393–411.
- [C1] Christodoulou M.A., 1988, Realizations for generalized state–space singular systems., *Control and Dynamic Systems*, 251–306.
- [C2] Conte G. and Perdon A.M., 1982, Generalized state–space realizations for non–proper rational transfer functions., *Syst. Contr. Lett.*, **1**, 270–276.
- [C3] Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (II)., *J.Austral.Math.Soc.Ser. B*, **27**, 223–237.
- [C4] Cullen D.J., 1986, State–space realizations at infinity. *Int.J.Control*, **43**, 1075–1088.
- [C5] Cullen D.J., 1987, Underlying algebraic framework of equivalence relations on linear systems., *Int.J.Control*, **45**, 1415–1425.
- [G1] Gantmacher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*. New York : Chelsea.
- [G2] Grimm Jose, 1988, Realization and canonicity for implicit systems., *SIAM J. Control and Optimiz.*, **26**, 1331–1347.
- [H1] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications., *Int. J. Control*, **47**, 53–64.

- [H2] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1989, On matrix pencil equivalents of a general polynomial matrix., *Int.J.Control*, **49**, 1797–1987.
- [H3] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1990, Infinite frequency structure-preserving transformations for general polynomial system matrices., *Int. J. Control*, **52**, 1–14.
- [J1] Janssen P.H., 1988, General results on the McMillan degree and the Kronecker indices of ARMA and MFD models., *Int.J.Control*, **48**, 591–608.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall.
- [K2] Karampetakis N.P., A.C.Pugh, A.I.Vardulakis and G.E.Hayton, 1992, Minimal realizations and equivalent generalized state–space system matrices of a Rosenbrock system matrix., presented to SINS'92 and submitted to *Int.J.Control*.
- [K3] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1991, Polynomial matrices and equivalent singular pencils., presented in *Workshop on Singular Systems* organized by N.Karcanias, City University, December 1991.
- [K4] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1992, Matrix fractions and full system equivalence, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **9**, 147–160.
- [K5] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1992, Generalized state–space system matrix equivalents of a Rosenbrock system matrix., submitted to *IMA Journal of Mathematical Control and Information*.
- [K6] Kronecker L., 1890, *Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen.*, S.–B. Akad., Berlin 763–76.
- [K7] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1990, Realization of autoregressive equations in pencil and descriptor form., *SIAM J.Cont. Optimiz.*, **28**, 1162–1189.
- [K8] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1990b, Realization and partial fractions., *Report BS–R9032*, CWI, Amsterdam, to appear in *Linear Algebra and its Applications*.
- [K9] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1991, Minimality of descriptor representations under external equivalence., *Automatica*, **27**, 985–995.
- [K10] Kuijper M., 1992, First–order representations of linear systems., Ph.D.Thesis, Centre for Mathematics and Computer Science., Amsterdam, Netherlands.

- [M1] MacDuffe C.C., 1946, *The Theory of Matrices.*, Chelsea Publishing Co., New York.
- [M2] McMillan B., 1952, Introduction to formal realization theory., *Bell Syst. Tech. J.*, **31**, 217–279, 541–600.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State space and multivariable theory.*, Nelson, London.
- [T1] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1988, A singular system realization for arbitrary matrix fraction descriptions., *ISCAS'88*, 615–618.
- [V1] Van Der Weiden A.J.J., 1983, *The use of structural properties in linear multivariable control system design.*, Ph.D.Thesis, Department of Electrical Engineering, Delft University of Technology, Netherlands.
- [V2] Vardulakis A.I.G., 1991a, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods.* Nelson–Wiley, London.
- [V3] Vardulakis A.I.G., 1991b, On the transformation of a polynomial matrix model of a linear multivariable system to generalized state space form., *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control 1991*, Brighton, England.
- [V4] Verghese G.C., 1978, *Infinity frequency behavior in generalized dynamical systems.*, Ph.D.Thesis, Stanford University, Stanford, CA.
- [V5] Verghese G.C., Van Dooren P. and Kailath T., 1979, Properties of the system matrix of a generalized state–space system., *Int.J.Control.*, **30**, 235–243.
- [W1] Wimmer H.K., 1979, A Jordan factorization theorem for polynomial matrices., *Proceedings of the American Mathematical Society.*, **75**, 201–206.
- [W2] Wimmer H.K., 1981, The structure of nonsingular polynomial matrices., *Math. Systems Theory*, **14**, 367–379.
- [W3] Wolovich W.A. and Guidorzi R., 1977, A general algorithm for determining state–space representations., *Automatica*, **13**, 295–299.
- [W4] Wolovich W.A., 1973, Determination of state–space representations for linear multivariable systems., *Automatica*, **9**, 97–106.
- [Z1] Zhang S–Y, 1989, Polynomial matrix linearization and strongly irreducible realization for singular systems., *Int.J.Control*, **49**, 471–479.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 6

### ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΟΙ ΛΥΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- 6.1 Εισαγωγή.
- 6.2 Πεπερασμένες λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  πολυωνυμικών πινάκων.
- 6.3 Κρουστικές λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην μηδενική δομή στο  $s=\infty$  πολυωνυμικών πινάκων.
- 6.4 Κρουστικές λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην δεξιά μηδενική δομή πολυωνυμικών πινάκων.
- 6.5 Ο ρόλος της αριστερής μηδενικής δομής πολυωνυμικών πινάκων στην ύπαρξη λύσεων μιας ιδιόμορφης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με συντελεστές πίνακες.
- 6.6 Ο παραμετρικός χώρος λύσεων μιας ιδιόμορφης ομογενούς εξίσωσης με συντελεστές πίνακες.
- 6.7 Περίληψη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 6.1 Εισαγωγή

Θεωρείστε μια γραμμική ομογενή διαφορική εξίσωση με συντελεστές πίνακες της μορφής

$$A(\rho) \beta(t) = 0 \quad (6.1)$$

όπου  $\rho = d/dt$  είναι ο διαφορικός τελεστής,  $A(\rho) = A_0 + A_1 \rho + \dots + A_k \rho^k \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r$  και  $\beta(t) : (0-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ακολουθώντας την ορολογία του Willems (1986) θα καλούμε το σύνολο των εξισώσεων (6.1) ως **αναδρομική παράσταση** (AutoRegressive representation ή AR representation) του  $B$ , όπου  $B$  είναι το σύνολο λύσεων της (6.1) πρδ.

$$B := \{ \beta(t) : (0-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \text{η σχέση (6.1) ικανοποιείται } \forall t \in (0-, +\infty) \}$$

Στην περίπτωση που  $p=m=r$  τότε ο  $A(\rho)$  είναι τετράγωνος με ορίζουσα διάφορη του μηδενός (καιονικός) και η (6.1) είναι μια γνωστή παράσταση η οποία έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς, μεταξύ των οποίων οι Gantmacher 1959, Gohberg 1982, Verghese 1978, Vardulakis 1991, κ.α. . Αποδείχθηκε ότι ο χώρος λύσεων της (6.1) χωρίζεται σε έναν ομαλό και έναν κρουστικό χώρο λύσεων οι οποίοι συνδέονται αντίστοιχα με την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  και στο  $s=\infty$  του πίνακα  $A(s)$ . Ενα πλήθος από συγκεκριμένες συνθήκες που συνδέονται με την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και οι οποίες θα πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε το σύστημα (6.1) να παρουσιάζει ομαλή ή κρουστική συμπεριφορά έχει επίσης προσδιορισθεί (Vardulakis & Fragulis 1989, Vardulakis 1991). Ενα σημαντικό επίσης αποτέλεσμα είναι ότι η διάσταση του ομαλού χώρου λύσεων της (6.1) είναι ίση με το άθροισμα των πεπερασμένων μηδενικών του  $A(\rho)$  (Gohberg et al. 1982) ενώ η διάσταση του κρουστικού χώρου λύσεων της (6.1) είναι ίση με το άθροισμα των μηδενικών στο  $s=\infty$  του  $A(\rho)$  (Verghese & Kailath 1979, Vardulakis & Fragulis 1989).

Στην Γραμμική Θεωρία Συστημάτων χρειαζόμαστε πολλές φορές περιγραφές γραμμικών δυναμικών συστημάτων όπου δεν γίνεται διαχώριση μεταξύ εισόδων και εξόδων του συστήματος πρδ. διασύνδεση συστημάτων (interconnection of systems).



Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο (6.1) είναι πολύ χρήσιμο (Blomberg 1983, Willems 1986, 1991, Kuijper 1992). Παρόλα αυτά η εύρεση του χώρου λύσεων  $B$  του συστήματος (6.1) παραμένει ένα ανοικτό πρόβλημα το οποίο διατυπώθηκε και από τον Willems (1991). Σ' αυτό το κεφάλαιο λοιπόν δίνουμε μια λύση στο παραπάνω πρόβλημα με την εύρεση του χώρου λύσεων του συστήματος (6.1). Πιο αναλυτικά στις ενότητες 6.2 και 6.3 ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο με τον Vardulakis (1991) δίνουμε ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος (6.1) που οφείλονται στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{w\}$  του  $A(\rho)$ . Η υπόθεση μας ότι  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r$  πρδ. ο  $A(\rho)$  είναι ιδιόμορφος, (όπου όχι κατ'ανάγκη  $p = m = r$ ), εφοδιάζει τον πολυωνυμικό πίνακα  $A(\rho)$  με επιπλέον χαρακτηριστικά πρδ. του δεξιού και αριστερά μηδενικού χώρου του  $A(\rho)$ . Ο ρόλος του δεξιού μηδενικού χώρου όπως θα δούμε στην ενότητα 6.4 είναι να εφοδιάσει το σύστημα μας με παραπάνω ανεξάρτητες λύσεις ενώ ο ρόλος του αριστερά μηδενικού χώρου (ενότητα 6.5) είναι να εφοδιάσει το σύστημα μας με συγκεκριμένες ανεξάρτητες συνθήκες μεταξύ των αρχικών μας συνθηκών  $\beta(0-), \beta^{(1)}(0-), \dots, \beta^{(k-1)}(0-)$  που θα πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε το σύστημα (6.1) να έχει λύση. Τελικά στην ενότητα 6.6 παρουσιάζουμε τον χώρο λύσεων του (6.1) σε συνδιασμό με τα χαρακτηριστικά αναλλοίωτα του πολυωνυμικού πίνακα  $A(\rho)$ . Θα δειχθεί επίσης ότι σε αντίθεση με τις καινουργικές αναδρομικές παραστάσεις του  $B$  πρδ. ο πίνακας  $A(\rho)$  είναι καινούργιος, όπου κάθε στοιχείο του χώρου λύσεων είναι συγκεκριμένο, στις ιδιόμορφες αναδρομικές παραστάσεις πρδ. ο  $A(\rho)$  είναι ιδιόμορφος, τα στοιχεία του χώρου λύσεων είναι κλάσεις ισοδυναμίας.

**6.2 Πεπερασμένες λύσεις ιδίμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  πολυωνυμικών πινάκων.**

Εστω η γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) όπου  $\beta(t) : (0-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  πρδ. ένα  $m$ -διάστατο διάνυσμα που περιέχει ως στοιχεία συναρτήσεις και το οποίο αναζητούμε. Υποθέτουμε ότι το  $\beta(t)$  ανήκει στον χώρο των απείρως συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων, έτσι ώστε  $\beta^{(q)}(0-) = \beta^{(q)}(0+) = \beta^{(q)}(0)$  με  $q=0,1,2,\dots$  και όπου  $\beta^{(q)}(t)$  δηλώνει την παράγωγο τάξης  $q$  ως προς  $t$  του  $\beta(t)$ . Εστω :

$$A(\rho) = A_k \rho^k + A_{k-1} \rho^{k-1} + \dots + A_1 \rho + A_0 \quad (6.2)$$

όπου  $A_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $i=0,1,\dots,k$  και έστω  $\beta(0-), \beta^{(1)}(0-), \dots, \beta^{(k-1)}(0-)$  είναι οι "αρχικές τιμές" του διανύσματος  $\beta(t)$  και των παραγώγων του τάξης  $1,2,\dots,k-1$  στο σημείο  $t=0-$ .

Εστω  $\lambda_0$  είναι ένα πεπερασμένο μηδενικό του  $A(\rho)$  πρδ.  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\lambda_0) < r$ . Τότε έχουμε

**Πρόταση 6.1** Εστω

$$\beta(t) = \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \frac{t^1}{1!} \beta_{\mu-1} + \beta_\mu \right] e^{\lambda_0 t} \quad (6.3)$$

όπου  $\beta_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $i=0,1,\dots,\mu$  και  $\beta_0 \neq 0$ . Τότε η  $\beta(t)$  ικανοποιεί την ιδίμορφη ομογενή διαφορική εξίσωση (6.1) εαν και μόνο εαν οι επόμενες εξισώσεις ικανοποιούνται :

(i) εαν  $\mu \leq k$

$$A(\lambda_0) \beta_0 = 0$$

$$A^{(1)}(\lambda_0) \beta_0 + A(\lambda_0) \beta_1 = 0$$

.....

$$\frac{1}{\mu!} A^{(\mu)}(\lambda_0) \beta_0 + \frac{1}{(\mu-1)!} A^{(\mu-1)}(\lambda_0) \beta_1 + \dots + A(\lambda_0) \beta_\mu = 0 \quad (6.4)$$

(ii) εαν  $\mu \geq k$

$$A(\lambda_0) \beta_0 = 0$$

$$A^{(1)}(\lambda_0) \beta_0 + A(\lambda_0) \beta_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
& \dots\dots\dots \\
& \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0) \beta_0 + \frac{1}{(k-1)!} A^{(k-1)}(\lambda_0) \beta_1 + \dots + A(\lambda_0) \beta_k = 0 \\
& \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0) \beta_1 + \frac{1}{(k-1)!} A^{(k-1)}(\lambda_0) \beta_2 + \dots + A(\lambda_0) \beta_{k+1} = 0 \\
& \dots\dots\dots \\
& \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0) \beta_{\mu-k} + \frac{1}{(k-1)!} A^{(k-1)}(\lambda_0) \beta_{\mu-k+1} + \dots + A(\lambda_0) \beta_{\mu} = 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

*Απόδειξη* Εστω η παρακάτω σειρά Taylor του πολυωνυμικού πίνακα  $A(\rho)$  γύρω από το σημείο  $\lambda_0$  :

$$A(\rho) = A(\lambda_0) + \frac{1}{1!} A^{(1)}(\lambda_0) [\rho I_m - \lambda_0 I_m] + \dots + \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0) [\rho I_m - \lambda_0 I_m]^k \tag{6.6}$$

Εαν πολλαπλασιάσουμε την σχέση (6.6) από δεξιά με το διάνυσμα  $\beta(t) \in \mathbb{R}^m$  παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned}
A(\rho)\beta(t) &= A(\lambda_0)\beta(t) + \frac{1}{1!} A^{(1)}(\lambda_0) [\rho I_m - \lambda_0 I_m]\beta(t) + \dots + \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0) [\rho I_m - \lambda_0 I_m]^k \beta(t) = \\
&= A(\lambda_0) \left[ \frac{t^\mu}{\mu!} \beta_0 + \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_1 + \dots + \frac{t^1}{1!} \beta_{\mu-1} + \beta_{\mu} \right] e^{\lambda_0 t} + \\
&+ \frac{1}{1!} A^{(1)}(\lambda_0) \left[ \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \beta_0 + \dots + \frac{t^1}{1!} \beta_{\mu-2} + \beta_{\mu-1} \right] e^{\lambda_0 t} + \\
&+ \dots\dots\dots \\
&+ \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda_0) \left[ \frac{t^{\mu-k}}{(\mu-k)!} \beta_0 + \dots + \frac{t^1}{1!} \beta_{\mu-k-1} + \beta_{\mu-k} \right] e^{\lambda_0 t} = 0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Η τελευταία έκφραση είναι ίση με μηδέν εαν και μόνο εαν οι συντελεστές των  $t^\mu e^{\lambda_0 t}$ ,  $t^{\mu-1} e^{\lambda_0 t}$ , ...,  $e^{\lambda_0 t}$  είναι ίσοι με μηδέν ή ισοδύναμα εαν και μόνο εαν οι συνθήκες (6.4) ή (6.5) ικανοποιούνται. □

**Ορισμός 6.2** Η ακολουθία

$$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu \quad (6.8)$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (6.4) ή (6.5) είναι γνωστή ως **Jordan αλυσίδα** (*Jordan chain*) μήκους  $\mu+1$  που αντιστοιχεί στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$ . Το διάνυσμα  $\beta_0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $\beta_0 \neq 0$  είναι γνωστό ως **ιδιόδιάνυσμα** (*eigenvector*) που αντιστοιχεί στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$ . Τα διανύσματα  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$  ονομάζονται **γενικευμένα ιδιόδιανύσματα** (*generalized eigenvectors*) που αντιστοιχούν στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$ . Ένα διάνυσμα  $\beta(t)$  όπως αυτό της σχέσης (6.3) ονομάζεται **λύση** (*solution*) της ιδιόμορφης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (6.1).  $\square$

Είναι φανερό ότι εάν για  $\mu > 0$ ,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu$  είναι μια αλυσίδα Jordan τότε από τις σχέσεις (6.4) και (6.5) διαπιστώνουμε ότι οι ακολουθίες :

$$\begin{aligned} & \beta_0 \\ & \beta_0, \beta_1 \\ & \dots \dots \dots \\ & \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{\mu-1} \end{aligned} \quad (6.9)$$

είναι επίσης αλυσίδες Jordan μήκους  $1, 2, \dots, \mu$  αντίστοιχα, που αντιστοιχούν στο μηδενικό  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$  και συνεπώς τα διανύσματα  $\beta_j(t)$ ,  $j=0, 1, \dots, \mu$  που ορίζονται από την σχέση :

$$\beta_j(t) = [\rho I_m - \lambda_0 I_m]^j \beta(t) \quad j=0, 1, \dots, \mu \quad (6.10)$$

είναι επίσης λύσεις της (6.1). Οι εξισώσεις της μορφής (6.10) μπορούν να γραφούν σε μορφή πινάκων ως :

$$[\beta_\mu(t), \beta_{\mu-1}(t), \dots, \beta_0(t)] = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu] \begin{bmatrix} 1 & \frac{t!}{1} & \dots & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} & \frac{t^\mu}{\mu!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{\mu-2}}{(\mu-2)!} & \frac{t^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow$$

$$\Psi(t) = C e^{Jt} \quad (6.11)$$

όπου

$$C = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu], J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\mu+1) \times (\mu+1)} \text{ και } \Psi(t) = [\beta_\mu(t), \beta_{\mu-1}(t), \dots, \beta_0(t)] \quad (6.12)$$

**Λήμμα 6.3** (C.T. Chen 1984, A.I.Vardoulakis 1991) Θεωρείστε το σύνολο  $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$  από διανύσματα με στοιχεία συναρτήσεις  $f_i(t): [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^m$  και υποθέστε ότι έχουν συνεχείς παραγώγους έως και την  $(n-1)$  τάξη στο διάστημα  $[t_1, t_2]$ . Εστω  $F(t) := [f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  με  $f_i(t)$  την  $i$  στήλη του και  $F^{(i)}(t)$  την  $i$ -παραγώγο του  $F(t)$ . Τότε εάν για κάποιο  $t_0 \in [t_1, t_2]$

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F^{(1)}(t_0) \\ \vdots \\ F^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = n \quad (6.13)$$

οι συναρτήσεις  $f_i(t)$ ,  $i \in n$  είναι  $\mathbb{C}$ -γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα  $[t_1, t_2]$ .  $\square$

**Πρόταση 6.4** Τα διανύσματα  $\beta_j(t)$   $j=0,1,\dots,\mu$  με  $\beta_0 \neq 0$  που ορίζονται στην σχέση (6.12) είναι  $\mathbb{C}$ -γραμμικά ανεξάρτητα στο διάστημα  $[0, t_2]$  με  $t_2 > 0$ .

**Απόδειξη** Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι :

$$Q_{\mu+1} = \begin{bmatrix} \Psi(0^-) \\ \Psi^{(1)}(0^-) \\ \vdots \\ \Psi^{(\mu)}(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CJ \\ \vdots \\ CJ^\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \lambda_0 I_m & I_m & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_0^\mu I_m & \frac{\mu!}{(\mu-1)!1!} \lambda_0^{\mu-1} I_m & \dots & \dots & \dots & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 \dots & \beta_\mu \\ 0 & \beta_0 \dots & \beta_{\mu-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & \beta_0 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$m(\mu+1) \times m(\mu+1) \quad m(\mu+1) \times (\mu+1)$

και συνεπώς

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} Q_{\mu+1} = \mu+1 \quad (6.15)$$

Από το λήμμα 6.3 έχουμε λοιπόν ότι τα διανύσματα  $\beta_j(t)$   $j=0,1,\dots,\mu$  με  $\beta_0 \neq 0$  που ορίζονται στην σχέση (6.10) είναι  $\mathbb{C}$ -γραμμικά ανεξάρτητα στο διάστημα  $[0, t_2]$  με  $t_2 > 0^-$ .  $\square$

**Πρόταση 6.5** (A.I.Vardulakis 1991) Ο χώρος  $X^{\mathbb{C}}$  των λύσεων της ιδίμορφης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (6.1) που παράγεται από διανυσματικές συναρτήσεις της μορφής (6.3), που οφείλονται αποκλειστικά στην μηδενική δομή του  $A(\rho)$  στο  $\mathbb{C}$ , αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο πάνω στο  $\mathbb{R}$ .

**Απόδειξη** Αυτό συμπεραίνεται από το γεγονός ότι εάν  $\beta_1(t)$  και  $\beta_2(t)$  είναι δύο λύσεις της (6.1) τότε από την γραμμικότητα του  $A(\rho)$  έχω ότι  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ :

$$A(\rho) [\alpha_1 \beta_1(t) + \alpha_2 \beta_2(t)] = 0 \quad (6.16)$$

Εξετάζουμε τώρα πως ορίζεται ο χώρος  $X^{\mathbb{C}}$  καθώς και ποιά είναι η διάσταση του. Ας υποθέσουμε ότι ο πολυωνυμικός πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  έχει  $l$  διαφορετικά μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$  όπου για να μην υπάρχει δυσκολία έκφρασης υποθέτουμε ότι  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \ell$  και έστω

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{block diag} [1, 1, \dots, 1, f_z(s), f_{z+1}(s), \dots, f_r(s), 0_{p-r, m-r}] \quad (6.17)$$

με  $1 \leq z \leq r$  είναι η Smith μορφή του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C}$  όπου  $f_i(s) \in \mathbb{R}[s]$  είναι τα αναλλοίωτα πολυώνυμα του  $A(s)$  και  $f_i(s)/f_{i+1}(s)$   $i=z, z+1, \dots, r-1$ . Ας υποθέσουμε ότι κάθε αναλλοίωτο πολυώνυμο  $f_z(s), f_{z+1}(s), \dots, f_r(s)$  αναλύεται ως γινόμενο πρώτων μεταξύ τους πολυωνύμων στο  $\mathbb{R}$ , έστω

$$\begin{aligned} f_k(s) &= (s-\lambda_1)^{\sigma_{1z}} (s-\lambda_2)^{\sigma_{2z}} \dots (s-\lambda_\ell)^{\sigma_{\ell z}} \\ f_{k+1}(s) &= (s-\lambda_1)^{\sigma_{1z+1}} (s-\lambda_2)^{\sigma_{2z+1}} \dots (s-\lambda_\ell)^{\sigma_{\ell z+1}} \\ &\dots \dots \dots \\ f_r(s) &= (s-\lambda_1)^{\sigma_{1r}} (s-\lambda_2)^{\sigma_{2r}} \dots (s-\lambda_\ell)^{\sigma_{\ell r}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

όπου

$$0 \leq \sigma_{iz} \leq \sigma_{iz+1} \leq \dots \leq \sigma_{ir} \quad i \in \ell \tag{6.19}$$

είναι οι πολλαπλότητες των μηδενικών  $\lambda_i, i \in \ell$ . Οι σχέσεις (6.18) γράφονται επίσης ως :

$$\begin{aligned} f_z(s) &= (s-\lambda_i)^{\sigma_{iz}} \hat{f}_z(s) \\ f_{z+1}(s) &= (s-\lambda_i)^{\sigma_{iz+1}} \hat{f}_{z+1}(s) \\ &\dots\dots\dots \\ f_r(s) &= (s-\lambda_i)^{\sigma_{ir}} \hat{f}_r(s) \end{aligned} \tag{6.20}$$

όπου  $\hat{f}_z(\lambda_i) \neq 0, \hat{f}_{z+1}(\lambda_i) \neq 0, \dots, \hat{f}_r(\lambda_i) \neq 0$ . Εστω  $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  και  $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  είναι αντιστρέψιμοι πίνακες (unimodular matrices) οι οποίοι αναγάγουν του πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  στην Smith μορφή  $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$

$$U_L(s) A(s) U_R(s) = S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) \tag{6.21}$$

ή ισοδύναμα

$$A(s) U_R(s) = U_L(s)^{-1} S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) \tag{6.22}$$

Εστω  $u_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$  και  $v_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times 1}$  με  $j \in r$  είναι οι πρώτες  $r$  στήλες των  $U_R(s)$  και  $U_L(s)^{-1}$  αντίστοιχα. Τότε από τις σχέσεις (6.17) και (6.22) έχουμε ότι :

$$A(s) u_j(s) = v_j(s) f_j(s) \quad j=z, z+1, \dots, r \tag{6.23}$$

και μπορούμε να θέσουμε την παρακάτω :

**Πρόταση 6.6** Εστω  $u_j^{(q)}(s) = (d^q/ds^q)u_j(s)$ ,  $q=0,1,\dots,(\sigma_{ij}-1)$ . Εστω επίσης :

$$\beta_{jq}^i := \frac{1}{q!} u_j^{(q)}(\lambda_i) \quad i \in \ell \text{ και } j=z, z+1, \dots, r \tag{6.24}$$

Τότε για κάθε  $i \in \ell$  και  $j=z, z+1, \dots, r$  τα διανύσματα :

$$\beta_{j0}^i, \beta_{j1}^i, \dots, \beta_{j(\sigma_{ij}-1)}^i \tag{6.25}$$

δημιουργούν μια αλυσίδα Jordan που αντιστοιχεί στο μηδενικό  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  του  $A(s)$  με μήκος  $\sigma_{ij}$ .

**Απόδειξη** Δες απόδειξη (A.I.Vardulakis 1991) (είναι οι ίδιες). □

Ορίζουμε τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις :

$$\beta_{jq}^i(t) := \left[ \frac{t^{\sigma_{ij}-1-q}}{(\sigma_{ij}-1-q)!} \beta_{j0}^i + \frac{t^{\sigma_{ij}-2-q}}{(\sigma_{ij}-2-q)!} \beta_{j1}^i + \cdots + \frac{t}{1!} \beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i + \beta_{j(\sigma_{ij}-1-q)}^i \right] e^{\lambda_i t}$$

$$i \in \ell ; j = z, z+1, \dots, r ; q = 0, 1, \dots, \sigma_{ij}-1 \quad (6.26)$$

Εστω

$$\Psi_{ij}(t) := [\beta_{j(\sigma_{ij}-1)}^i(t), \beta_{j(\sigma_{ij}-2)}^i(t), \dots, \beta_{j1}^i(t), \beta_{j0}^i(t)] : (0-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{\sigma_{ij} \times \sigma_{ij}} \quad (6.27)$$

$$C_{ij} := [\beta_{j0}^i, \beta_{j1}^i, \dots, \beta_{j(\sigma_{ij}-2)}^i, \beta_{j(\sigma_{ij}-1)}^i] \in \mathbb{R}^{r \times \sigma_{ij}} \quad (6.28)$$

$i \in \ell, j = z, z+1, \dots, r$  και

$$J_{ij} := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\sigma_{ij} \times \sigma_{ij}} \quad \begin{array}{l} i \in \ell \\ j = z, z+1, \dots, r \end{array} \quad (6.29)$$

$$\Psi_i(t) := [\Psi_{iz}(t), \Psi_{i,z+1}(t), \dots, \Psi_{ir}(t)] : (0-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{m_i \times m_i} \quad i \in \ell \quad (6.30)$$

$$C_i := [C_{iz}, C_{i,z+1}, \dots, C_{ir}] \in \mathbb{R}^{r \times m_i} \quad i \in \ell \quad (6.31)$$

$$J_i := \text{block diag}[J_{iz}, J_{i,z+1}, \dots, J_{ir}] \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i} \quad i \in \ell \quad (6.32)$$

όπου  $m_i = \sigma_{iz} + \sigma_{iz+1} + \cdots + \sigma_{ir}, i \in \ell$ .

Τελικά έστω :

$$\Psi(t) := [\Psi_1(t), \Psi_2(t), \dots, \Psi_\ell(t)] : (0-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad i \in \ell \quad (6.33)$$

$$C := [C_1, C_2, \dots, C_\ell] \in \mathbb{R}^{r \times n} \quad (6.34)$$



$$J := \text{block diag}[J_1, J_2, \dots, J_\ell] \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (6.35)$$

όπου

$$n := m_1 + m_2 + \dots + m_\ell = \deg \left[ \prod_{j=1}^r f_j(s) \right] = \deg[S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)] \quad (6.36)$$

**Ορισμός 6.7** Ορίζουμε ως  $X^{\mathbb{C}}$  τον χώρο λύσεων της (6.1) που παράγεται από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις :

$$X^{\mathbb{C}} := \langle \beta_{z_0}^1(t), \beta_{z_1}^1(t), \dots, \beta_{z_{\sigma_{1z}-1}}^1(t), \dots, \beta_{r\sigma_{\ell r}-1}^{\ell}(t) \rangle \subseteq B \quad (6.37)$$

ή ισοδύναμα

$$X^{\mathbb{C}} := \langle \Psi(t) \rangle = \langle C e^{Jt} \rangle \quad (6.38)$$

Ο χώρος αυτός είναι ένας διανυσματικός χώρος λόγω της γραμμικότητας της απεικόνισης (6.1) και οφείλεται αποκλειστικά στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πίνακα  $A(\rho)$ .  $\square$

**Σημείωση 6.8** Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που ο πίνακας  $A(s)$  είναι κανονικός πρδ. τετράγωνος με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, η διάσταση του χώρου λύσεων  $X^{\mathbb{C}}$  είναι ίση με τον βαθμό της ορίζουσας του  $A(s)$ , ενώ στην περίπτωση που ο  $A(s)$  είναι ιδιόμορφος πρδ. όχι τετράγωνος ή τετράγωνος με ορίζουσα ίση με μηδέν, τότε η διάσταση του χώρου λύσεων  $X^{\mathbb{C}}$  είναι ίση με τον βαθμό του μέγιστου κοινού διαιρέτη όλων των μεγίστης τάξης μη μηδενικών ελλάσσων οριζουσών του.  $\square$

**Παράδειγμα 6.9** Θεωρείστε την παρακάτω ιδιόμορφη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$A(\rho) \beta(t) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho & \rho^4 & \rho^2 + \rho \\ 1 & \rho^3 & \rho + 1 \\ 0 & \rho + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1} \quad (E.1)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $U_L(s)$  και  $U_R(s)$  τέτοιοι ώστε

$$U_L(s) A(s) U_R(s) = S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & s^4 & s^2+s \\ 1 & s^3 & s+1 \\ 0 & s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s^3 & -1-s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} s & s^4 & s^2+s \\ 1 & s^3 & s+1 \\ 0 & s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s^3 & -1-s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς  $r=2=z$ ,  $\lambda_1=-1$  και  $\sigma_{12}=1$ . Ορίζουμε

$$\beta_{20}^1 = \frac{1}{0!} u_2(-1) = \begin{bmatrix} -s^3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{s=-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο χώρος λύσεων  $X^{\mathbb{C}}$  της (E.1) που οφείλεται στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{3 \times 3}$  θα έχει διάσταση ένα, όσος και ο βαθμός του μέγιστου κοινού διαιρέτη όλων των μεγίστης τάξης μη μηδενικών ελλάσσωνων οριζουσών του  $A(s)$   $\{n = \deg(s+1)\}$  και θα είναι ο εξής :

$$X^{\mathbb{C}} := \langle w_{20}^1(t) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \right\rangle =: \langle C J^t \rangle \quad (\text{E.2})$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εκτός της (E.2) και οι παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις :

$$\beta_1(t) = \left\{ t \begin{bmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} e^{\lambda t} \quad (\text{E.3})$$

και

$$\beta_2(t) = \begin{bmatrix} -1-\lambda \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t} \quad (\text{E.4})$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  (αυθαίρετο) είναι επίσης ομαλές λύσεις της (E.1) και συνεπώς η βάση που δημιουργείται από την (E.2) δεν αποτελεί μια βάση όλων των ομαλών λύσεων της (E.1). Αυτός είναι ο λόγος που αναφερόμαστε στην  $\Psi(t)$  ως βάση του διανυσματικού χώρου λύσεων  $X^{\mathbb{C}} \subseteq \mathcal{B}$  της (6.1) που οφείλεται αποκλειστικά στα πεπερασμένα μηδενικά της  $A(s)$ . Αναφέρουμε απλώς ότι οι λύσεις της μορφής (E.3) και (E.4) οφείλονται στην δεξιά μηδενική δομή του  $A(\rho)$  και θα μελετηθούν στο κεφάλαιο 6.6.  $\square$

**Ορισμός 6.10** Ο  $m \times n$  πίνακας με τιμές συναρτήσεων :

$$\Psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)] = C e^{Jt} \quad (6.38)$$

οινομάζεται ο **πίνακας βάσης** (*basis matrix*) του χώρου λύσεων  $X^{\mathbb{C}}$  του ιδιόμορφου γραμμικού συστήματος (6.1). Οι πίνακες που ορίστηκαν στην (6.34) και (6.35) :

$$C \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ και } J \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (6.39)$$

οινομάζονται **ζεύγος Jordan** του  $A(s)$  (*Jordan pair of A(s)*) οφειλόμενο στα πεπερασμένα μηδενικά του  $A(s)$ . Ο αριθμός  $n := \{\text{βαθμός του μέγιστου κοινού διαιρέτη όλων των μεγίστης τάξης ελλάσσωνων οριζουσών}\}$  ονομάζεται **τάξη** (*order*) της (6.1). Από την παραπάνω ανάλυση μπορούμε να δούμε ότι :

$$\boxed{\dim X^{\mathbb{C}} = n := \text{συνολικό άθροισμα των μηδενικών του } A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}} \quad (6.40) \quad \square$$

**Πρόταση 6.11** Οι πίνακες  $C$  και  $J$  στις σχέσεις (6.34) και (6.35) ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

$$A_k C J^k + A_{k-1} C J^{k-1} + \dots + A_1 C J + A_0 C = 0_{pn} \quad (6.41)$$

και

$$Q_k = \begin{bmatrix} C \\ CJ \\ \vdots \\ CJ^{k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mk \times n} \quad \text{rank}_{\mathbb{R}} Q_k = n \quad (6.42)$$

**Απόδειξη** Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των διανυσματικών συναρτήσεων που ανήκουν στον πίνακα  $\Psi(t) = C e^{Jt}$  ικανοποιούν την ιδιόμορφη ομογενή εξίσωση (6.1). Εάν συνεπώς θέσουμε

$\beta(t) = Ce^{Jt}$  στην σχέση (6.1) και πάρουμε  $t=0$  θα έχουμε την ζητούμενη σχέση (6.41). Η απόδειξη της σχέσεως (6.42) είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν της προτάσεως 6.4 με την μόνη διαφορά ότι στην θέση των  $C$  και  $J$  θα έχουμε τους πίνακες των σχέσεων (6.34) και (6.35). (δες επίσης A.I.Vardulakis 1991, σελ. 164, Ασκήση 4.17)  $\square$

Εξετάζουμε τώρα την λύση  $\beta(t): (0-, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  του ιδιόμορφου συστήματος (6.1) για δεδομένο σετ αρχικών συνθηκών :

$$\beta(0-), \beta^{(1)}(0-), \dots, \beta^{(k-1)}(0-) \in \mathbb{R}^m \quad (6.43)$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι αρχικές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν την παρακάτω συνθήκη :

$$A_0\beta(0-) + A_1\beta^{(1)}(0-) + \dots + A_{k-1}\beta^{(k-1)}(0-) + A_k\beta^{(k)}(0-) = 0 \quad (6.44)$$

**Λήμμα 6.12** Εστω :

$$A(s) = A_k s^k + A_{k-1} s^{k-1} + \dots + A_1 s + A_0 \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \quad (6.45)$$

Τότε

(α) εαν  $p < m$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = p$  τότε :

$$\deg A(s) = pk \quad (6.46)$$

(β) εαν  $p > m$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = m$  τότε :

$$\deg A(s) = mk \quad (6.47)$$

**Απόδειξη**

(α) Ο πίνακας  $A(s)$  γράφεται ως :

$$A(s) = \text{diag}[s^k, s^k, \dots, s^k] A_k + A_0(s) \quad (6.48)$$

όπου  $A_0(s)$  είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας με στοιχεία πολυώνυμα βαθμού μικρότερου του  $k$ . Εαν δηλώσουμε με  $m(A)^{j_1, j_2, \dots, j_p}$  τις  $\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}$   $p$ -τάξης ορίζουσες που σχηματίζονται αντίστοιχα από τις  $j_1, j_2, \dots, j_p$  στήλες του πίνακα  $A(s)$  τότε θα έχουμε ότι :

$$m(A)^{j_1, j_2, \dots, j_p} = s^{pk} m(A_k)^{j_1, j_2, \dots, j_p} + \text{χαμηλότερου βαθμού πολυώνυμο} \quad (6.49)$$

και συνεπώς επειδή υπάρχουν  $j_1, j_2, \dots, j_p$  στήλες τέτοιες ώστε  $m(A_k)^{j_1, j_2, \dots, j_p} \neq 0$  λόγω του ότι  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = p$  θα πάρουμε :

$$\deg A(s) = \max\{\deg m(A)^{j_1, j_2, \dots, j_p}\} = \max\{\deg m(A_k)^{j_1, j_2, \dots, j_p}\} \times pk = pk \quad (6.50)$$

Αρα τελικά έχουμε ότι  $\deg A(s) = pk$ .

(β) Αποδεικνύεται εντελώς ανάλογα με το (α). □

**Λήμμα 6.13** Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ , με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(s) = r$ . Εάν  $n$  είναι το συνολικό πλήθος των πεπερασμένων μηδενικών του  $A(s)$  και  $\varepsilon_i$   $i=r+1, \dots, m$  και  $\eta_i$   $i=r+1, \dots, p$  είναι αντίστοιχα οι ελάχιστοι δείκτες γραμμών και στηλών του  $A(s)$ , τότε

$$\deg A(s) = n + \sum_{i=r+1}^p \eta_i + \sum_{i=r+1}^m \varepsilon_i \quad (6.51)$$

**Απόδειξη** Από την σχέση (4.59) ή από Vardulakis (1991) έχουμε ότι

$$\delta_{\infty}(A(s)) = \sum_{i=\kappa+1}^r \hat{q}_i - \sum_{i=1}^{\kappa} q_i = -\deg A(s) \quad (6.52)$$

όπου  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_{\kappa} \geq 0$  και  $0 \leq \hat{q}_{\kappa+1} \leq \hat{q}_{\kappa+2} \leq \dots \leq \hat{q}_r$  είναι αντίστοιχα οι τάξεις των πόλων και των μηδενικών στο  $s=\infty$  του πίνακα  $A(s)$ . Από Verghese (1979) έχουμε επίσης ότι

$$\delta_M(A(s)) = \sum_{i=1}^{\kappa} q_i = n + \sum_{i=\kappa+1}^r \hat{q}_i + \sum_{i=r+1}^p \eta_i + \sum_{i=r+1}^m \varepsilon_i \quad (6.53)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.52) και (6.53) παίρνουμε την σχέση (6.51). □

**Πρόταση 6.14** Εστω  $\Psi(t)$  ένας πίνακας βάσης για τον χώρο λύσεων  $X^{\mathbb{C}}$  του ιδιόμορφου συστήματος (6.1). Εάν

- α)  $p \geq m$ ,
- β)  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = m$
- γ)  $\eta_i = 0 \quad i=r+1, \dots, p$

όπου  $\eta_i \quad i=r+1, \dots, p$  είναι οι ελάχιστοι δείκτες γραμμών του  $A(s)$ , τότε για κάθε σετ δεδομένων αρχικών συνθηκών  $\beta^{(q)}(0-) \in \mathbb{R}^m, q=0, 1, \dots, k-1$  υπάρχει μοναδικό διάνυσμα  $x(0-) = [x_1(0-), x_2(0-), \dots, x_n(0-)]^T \in \mathbb{R}^n$ , (νετάξη του (6.1)) τέτοιο ώστε

$$\beta(t) = \Psi(t) x(0-) \quad (6.54)$$

είναι η λύση του συστήματος (6.1) η οποία ικανοποιεί τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

**Απόδειξη** Εστω  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  και  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n := \dim_{\mathbb{R}} X^{\mathbb{C}}$  είναι ένα ζεύγος Jordan του  $A(s)$  και ως υποθέσουμε ότι το δεδομένο  $x(0-) \in \mathbb{R}^n$  υπάρχει, δηλ.

$$\beta(t) = C e^{Jt} x(0-) \quad (6.55)$$

είναι μια λύση του συστήματος (6.1). Τότε :

$$\beta^{(q)}(t) = C J^q e^{Jt} x(0-) \quad q=0, 1, \dots \quad (6.56)$$

Αντικαθιστώντας την  $\beta(t)$  και τις παραγώγους της από την (6.55) και (6.56) στην (6.1) έχουμε ότι :

$$[A_k C J^k + A_{k-1} C J^{k-1} + \dots + A_1 C J + A_0 C] e^{Jt} x(0-) = 0_{p1} \quad (6.57)$$

Επομένως η  $\beta(t)$  είναι μια λύση της (6.1) όπως δίνεται από την (6.55). Από την (6.56) και για  $t=0-$  έχουμε :

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(k-1)}(0-) \end{bmatrix}_{mk \times 1} = \begin{bmatrix} C \\ C J \\ \vdots \\ C J^{k-1} \end{bmatrix}_{mk \times n} \begin{bmatrix} x_1(0-) \\ x_2(0-) \\ \vdots \\ x_n(0-) \end{bmatrix}_{n \times 1} = Q_k x(0-) \quad (6.58)$$

Για να προσδιορίσουμε τώρα το  $x(0-)$  εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις :

i) Εάν  $p < m$  τότε

α) Εστω  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = p$ . Τότε σύμφωνα με τα λήμματα 6.12 και 6.13 έχουμε  $n \leq \deg A(s) = pk$  και συνεπώς  $n \leq pk < mk$  λόγω της (i) σχέσης, το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει να ικανοποιούνται  $mk - n$  εξισώσεις μεταξύ των αρχικών συνθηκών σύμφωνα με την σχέση (6.58).

β) Εστω  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k < p$ . Τότε  $n \leq \deg A(s) < pk < mk$  και συνεπώς οι εξισώσεις που θα πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές συνθήκες στην σχέση (6.58) είναι στο πλήθος  $mk - n$ .

ii) Εάν  $p = m$  τότε

α) Εστω  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = p$ . Τότε σύμφωνα με τα λήμματα 6.12 και 6.13 έχουμε  $n = \deg A(s) = pk$  και συνεπώς  $n = pk = mk$  λόγω της (i) σχέσης. Έχουμε επίσης από την σχέση (6.43) ότι ο πίνακας  $Q_k$  έχει πλήρη τάξη και συνεπώς είναι αντιστρέψιμος που σημαίνει ότι το μοναδικό διάνυσμα  $x(0-)$  δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$x(0-) = Q_k^{-1} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(k-1)}(0-) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (6.59)$$

β) Εστω  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k < p$ . Τότε  $n \leq \deg A(s) < pk = mk$  και συνεπώς  $pk - n$  εξισώσεις μεταξύ αρχικών συνθηκών θα πρέπει να ικανοποιούνται στο σύστημα (6.58).

iii) Εάν  $p > m$  τότε

α) Εστω  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = m$ . Τότε σύμφωνα με τα λήμματα 6.12 και 6.13 έχουμε  $n \leq \deg A(s) (= n + \sum_{i=r+1}^p \eta_i)$  (λόγω του ότι  $p > m$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = m$  έχουμε  $\varepsilon_i = 0$ )  $= mk$  και συνεπώς  $mk - n (= \sum_{i=r+1}^p \eta_i)$  εξισώσεις μεταξύ αρχικών συνθηκών θα πρέπει να ικανοποιούνται στο σύστημα (6.57). Εάν  $\sum_{i=r+1}^p \eta_i = 0$  ή ισοδύναμα

$\eta_i=0$  για  $i=r+1, \dots, p$  (και  $\varepsilon_i=0$  για  $i=r+1, \dots, m$ ) τότε έχουμε ότι  $mk=n$  και συνεπώς ο πίνακας  $Q_k$  είναι αντιστρέψιμος που σημαίνει ότι το μοναδικό  $x(0-)$  δίνεται από την σχέση (6.59).

β) Εστω  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k < m$ . Τότε  $n \leq \deg A(s) < mk$  και συνεπώς  $mk-n$  εξισώσεις μεταξύ αρχικών συνθηκών θα πρέπει να ικανοποιούνται στο σύστημα (6.58).

Το ολικό συμπέρασμα μετά αυτήν την διερεύνηση είναι ότι υπάρχει μοναδικό  $x(0-)$  που να ικανοποιεί την συνθήκη (6.54) εάν και μόνο εάν  $p \geq m$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_k = m$  και  $\eta_i=0$  για  $i=r+1, \dots, p$ . □

**Παράδειγμα 6.15** Θεωρείστε την ιδιόμορφη ομογενή διαφορική εξίσωση του παραδείγματος 6.9. Έχουμε δηλαδή

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} \rho & \rho^4 & \rho^2 + \rho \\ 1 & \rho^3 & \rho + 1 \\ 0 & \rho + 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{3 \times 3}$$

και συνεπώς  $p=3$ ,  $m=3$  ( $p=m$ ),  $n=1$  και  $k=4$ . Έχουμε επίσης

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} A_4 = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 3$$

και άρα σύμφωνα με την περίπτωση (ii.β) στην Πρόταση 6.14,  $mk-n = 3 \cdot 4 - 1 = 11$  εξισώσεις μεταξύ των αρχικών συνθηκών στην σχέση (6.58) πρέπει να ικανοποιούνται. Πιο συγκεκριμένα

$$\begin{bmatrix} \beta(0) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CJ \\ CJ^2 \\ CJ^3 \end{bmatrix} x(0) \Rightarrow$$



$$\begin{bmatrix} \beta_1(0) \\ \beta_2(0) \\ \beta_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) ; \quad \begin{bmatrix} \beta_1^{(1)}(0) \\ \beta_2^{(1)}(0) \\ \beta_3^{(1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1^{(2)}(0) \\ \beta_2^{(2)}(0) \\ \beta_3^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) ; \quad \begin{bmatrix} \beta_1^{(3)}(0) \\ \beta_2^{(3)}(0) \\ \beta_3^{(3)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

ή ισοδύναμα  $\mathbf{x}(0) = \beta_1(0)$  και οι παρακάτω 11 συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται

$$\begin{bmatrix} \beta_2(0) \\ \beta_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \beta_1^{(1)}(0) \\ \beta_2^{(1)}(0) \\ \beta_3^{(1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1(0) \\ -\beta_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

(E.1)

$$\begin{bmatrix} \beta_1^{(2)}(0) \\ \beta_2^{(2)}(0) \\ \beta_3^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1(0) \\ \beta_1(0) \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \beta_1^{(3)}(0) \\ \beta_2^{(3)}(0) \\ \beta_3^{(3)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1(0) \\ -\beta_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Εάν οι συνθήκες (E.1) ικανοποιούνται τότε η ομογενής ιδίομορφη διαφορική εξίσωση (E.1) του παραδείγματος 6.9 θα έχει την εξής λύση :

$$\beta(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -\delta^{(1)}(t) + \delta(t) \\ 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix} * u(t) =: C e^{Jt} + \beta_0(t)$$

όπου  $\mathbf{x}(t) * u(t) = \int_{0^-}^t \mathbf{x}(t-\tau)u(\tau)d\tau$  και  $u(t)$  μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση. Ο όρος  $\beta_0(t)$  όπως θα δούμε και παρακάτω (ενότητα 6.6) οφείλεται στην δεξιά μηδενική δομή του πίνακα  $A(s)$  και εμπεριέχεται σε κάθε λύση του συστήματος (E.1) του παραδείγματος 6.9.

□

**Παράδειγμα 6.16** Θεωρείστε την παρακάτω ιδίομορφη ομογενή διαφορική εξίσωση :

$$A(\rho) \beta(t) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \\ \rho & \rho+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1}$$

Εχουμε δηλαδή

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \\ \rho & \rho+1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{3 \times 2}$$

όπου

$$[1 \ 1 \ -1] \begin{bmatrix} \rho & 1 \\ 0 & \rho \\ \rho & \rho+1 \end{bmatrix} = 0_{1 \times 3} \quad \text{και} \quad S_{A(\rho)}^{\mathbb{C}}(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

και συνεπώς  $p=3$ ,  $m=2$  ( $p>m$ ),  $n=2$ ,  $\eta_3=0$  και  $k=1$ . Εχουμε επίσης

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} A_1 = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \equiv n (=2) \quad (\text{E.2})$$

και συνεπώς ικανοποιούνται οι συνθήκες της πρότασης 6.14. Μπορούμε να δούμε ότι η λύση του παραπάνω συστήματος γράφεται ως εξής

$$\beta(t) = C e^{Jt} x(0-) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_2(0-) \\ \beta_1(0-) \end{bmatrix}}_{x(0-)}$$

που επαληθεύει την πρόταση 6.14. □

### 6.3 Κρουστικές λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην μηδενική δομή στο $s=\infty$ πολυωνυμικών πινάκων.

Εστω η ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) με συντελεστές πίνακες όπου

$$A(\rho) = A_k \rho^k + A_{k-1} \rho^{k-1} + \dots + A_1 \rho + A_0 \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m} \quad (6.60)$$

$A_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $i=0,1,\dots,k$ ,  $k \geq 1$ ,  $A_k \neq 0$ ,  $\rho = d/dt$  και  $\beta(t) : (0-, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$  ορίζεται ως η γενικευμένη κατάσταση του συστήματος (6.1). Ορίζουμε ως **δυσκό** πολυωνυμικό πίνακα του  $A(s)$  τον πολυωνυμικό πίνακα  $\tilde{A}(w)$  όπου :

$$\tilde{A}(w) := A_k + A_{k-1}w + \dots + A_1w^{k-1} + A_0w^k := w^k A\left(\frac{1}{w}\right) \quad (6.61)$$

**Ορισμός 6.17** (Hayton *et al.* 1988, Vardulakis 1991) Οι στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο (*infinite elementary divisors*) του  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  ορίζονται ως οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του  $\tilde{A}(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m}$  στο σημείο  $w=0$ , πρδ. οι πεπερασμένοι στοιχειώδεις διαιρέτες του  $\tilde{A}(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m}$  που έχουν την μορφή

$$w^{\mu_j}, \quad \mu_j > 0 \quad \square \quad (6.62)$$

**Πρόταση 6.18** Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r$  όπως στην σχέση (6.60) και  $\tilde{U}_L(w) \in \mathbb{R}(w)^{p \times p}$ ,  $\tilde{U}_R(w) \in \mathbb{R}(w)^{m \times m}$  ρητοί πίνακες οι οποίοι δεν έχουν ούτε πόλους ούτε μηδενικά στο σημείο  $w=0$  και είναι τέτοιοι ώστε :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_L(w) \tilde{A}(w) \tilde{U}_R(w) &= S_{\tilde{A}(w)}^0(w) = \\ &= \text{block diag}[1, w^{\mu_2}, \dots, w^{\mu_\kappa}, w^{\mu_{\kappa+1}}, \dots, w^{\mu_r}, 0_{p-r, m-r}] = \\ &= \text{block diag}[1, w^{q_1 - q_2}, \dots, w^{q_1 - q_\kappa}, w^{q_1 + \hat{q}_{\kappa+1}}, \dots, w^{q_1 + \hat{q}_r}, 0_{p-r, m-r}] \end{aligned} \quad (6.63)$$

Τότε υπάρχουν δικαιονικοί πίνακες  $U_L(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{p \times p}$ ,  $U_R(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε :

$$U_L(s) A(s) U_R(s) = S_{A(s)}^w(s) \quad (6.64)$$

όπου

$$S_{A(s)}^w(s) = s^{q_1} S_{\tilde{A}(w)}^0\left(\frac{1}{s}\right) = \text{block diag}[s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_\kappa}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{\kappa+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_r}}, 0_{p-r, m-r}] \quad (6.65)$$

$k=q_1$  και

$$U_L(s) = \tilde{U}_L\left(\frac{1}{s}\right) \quad ; \quad U_R(s) = \tilde{U}_R\left(\frac{1}{s}\right) \quad (6.66)$$

**Απόδειξη** Η απόδειξη είναι όμοια με την πρόταση 4.40, σελ. 182 στο βιβλίο του A.I. Vardoulakis (1991), εάν στην θέση του πίνακα  $A(s)$  θέσουμε τον πίνακα  $\tilde{A}(w)$ . Το ότι ο πίνακας  $A(s)$  είναι μη τετράγωνος δεν παίζει κανένα ρόλο όπως φαίνεται από την απόδειξη στο παραπάνω βιβλίο.  $\square$

Εστω τώρα δύο αντιστρέψιμοι πίνακες  $\tilde{U}_L(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times p}$ ,  $\tilde{U}_R(w) \in \mathbb{R}[w]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_L(w) \tilde{A}(w) \tilde{U}_R(w) &= S_{\tilde{A}(w)}^{\mathbb{C}}(w) = \\ &= \text{block diag}[f_1(w), w^{\mu_2} f_2(w), \dots, w^{\mu_{\kappa}} f_{\kappa}(w), w^{\mu_{\kappa+1}} f_{\kappa+1}(w), \dots, w^{\mu_r} f_r(w), 0_{p-r, m-r}] \quad (6.67) \end{aligned}$$

όπου  $f_i(0) \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{r}$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσεως (6.67) από αριστερά με τον πίνακα

$$U(w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1(w)} & & & & & \\ & \frac{1}{f_2(w)} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{f_r(w)} & & \\ & & & & & I_{p-r} \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} [U(w) \tilde{U}_L(w)] \tilde{A}(w) \tilde{U}_R(w) &= S_{\tilde{A}(w)}^0(w) = \\ &= \text{block diag}[1, w^{\mu_2}, \dots, w^{\mu_{\kappa}}, w^{\mu_{\kappa+1}}, \dots, w^{\mu_r}, 0_{p-r, m-r}] \quad (6.69) \end{aligned}$$

Εστω τώρα  $\tilde{U}_R(w) = [\tilde{u}_1(w), \tilde{u}_2(w), \dots, \tilde{u}_m(w)]$  όπου  $\tilde{u}_j(w) \in \mathbb{R}[w]^{m \times 1}$ . Τότε από την σχέση (6.69) έχουμε ότι :

$$\tilde{A}(w) \tilde{u}_j(w) = \tilde{v}_j(w) w^{\mu_j} \quad j = \kappa+1, \dots, r \quad (6.70)$$

όπου  $\mu_j = q_1 + \hat{q}_j$ ,  $j = \kappa + 1, \dots, r$  και  $\tilde{v}_j(w)$  η  $j$ -οστή στήλη του  $[U(w)\tilde{U}_L(w)]^{-1}$ .

**Πρόταση 6.19** Εστω  $\tilde{u}_j^{(q)}(w)$  και  $\tilde{A}^{(q)}(w)$  είναι αντίστοιχα οι παράγωγοι τάξεως  $q$  των  $\tilde{u}_j(w)$  και  $\tilde{A}(w)$  ως προς  $w$  για  $q = 0, 1, \dots, \mu_j - 1$  και  $j = \kappa + 1, \dots, r$ . Ορίζουμε :

$$x_{jq} := \frac{1}{q!} \tilde{u}_j^{(q)}(0) \quad (6.71)$$

για  $q = 0, 1, \dots, \mu_j - 1$  και  $j = \kappa + 1, \dots, r$ . Τότε τα διανύσματα

$$x_{j0}, x_{j1}, \dots, x_{j\mu_j-1} \in \mathbb{R}^m \quad j = \kappa + 1, \dots, r \quad (6.72)$$

δημοιουργούν μια αλυσίδα Jordan για τον  $\tilde{A}(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m}$  που αντιστοιχεί στο  $w = 0$  ή ισοδύναμα ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(0) x_{j0} &= 0 \\ \tilde{A}^{(1)}(0) x_{j0} + \tilde{A}(0) x_{j1} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{q_1!} \tilde{A}^{(q_1)}(0) x_{j0} + \frac{1}{(q_1-1)!} \tilde{A}^{(q_1-1)}(0) x_{j1} + \dots + \tilde{A}(0) x_{jq_1} &= 0 \\ \frac{1}{q_1!} \tilde{A}^{(q_1)}(0) x_{j1} + \frac{1}{(q_1-1)!} \tilde{A}^{(q_1-1)}(0) x_{j2} + \dots + \tilde{A}(0) x_{jq_1+1} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{q_1!} \tilde{A}^{(q_1)}(0) x_{j\hat{q}_j-1} + \frac{1}{(q_1-1)!} \tilde{A}^{(q_1-1)}(0) x_{j\hat{q}_j} + \dots + \tilde{A}(0) x_{jq_1+\hat{q}_j-1} &= 0 \end{aligned} \quad (6.73\alpha)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} A_{q_1} x_{j0} &= 0 \\ A_{q_1-1} x_{j0} + A_{q_1} x_{j1} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ A_0 x_{j0} + A_1 x_{j1} + \dots + A_{q_1} x_{jq_1} &= 0 \\ A_0 x_{j1} + A_1 x_{j2} + \dots + A_{q_1} x_{jq_1+1} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ A_0 x_{j\hat{q}_j-1} + A_1 x_{j\hat{q}_j} + \dots + A_{q_1} x_{jq_1+\hat{q}_j-1} &= 0 \end{aligned} \quad j = \kappa + 1, \dots, r \quad (6.73\beta)$$

**Απόδειξη** Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν που αναφέρεται για τετραγωνικούς και αντιστρέψιμους πίνακες στο βιβλίο του (Α.Ι.Vardulakis 1991) εάν λάβουμε υπόψη μας ότι  $q_1 = k < \mu_j (= q_1 + \hat{q}_j)$  για  $j = \kappa + 1, \dots, r$  και  $A^{(i)}(0) = 0$  για  $i = q_1 + 1, \dots, q_1 + \hat{q}_j - 1$ .  $\square$

Για  $q = 0, 1, \dots, \hat{q}_j - 1$  και  $j = \kappa + 1, \dots, r$  ορίζουμε τα παρακάτω πολυωνυμικά διανύσματα :

$$\beta_{jq}^w(s) := x_{j0}s^q + x_{j1}s^{q-1} + \dots + x_{jq} \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1} \quad (6.74)$$

πρδ. τα πολυωνυμικά διανύσματα :

$$\begin{aligned} \beta_{j0}^w(s) &:= x_{j0} \\ \beta_{j1}^w(s) &:= x_{j0}s + x_{j1} \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_{j\hat{q}_j-1}^w(s) &:= x_{j0}s^{\hat{q}_j-1} + x_{j1}s^{\hat{q}_j-2} + \dots + x_{j\hat{q}_j-1} \end{aligned} \quad (6.75)$$

και έστω :

$$\Psi_j(s) := [\beta_{j0}^w(s), \beta_{j1}^w(s), \dots, \beta_{j\hat{q}_j-1}^w(s)] \in \mathbb{R}[s]^{m \times \hat{q}_j} \quad j = \kappa + 1, \dots, r \quad (6.76)$$

Τότε για  $q = 0, 1, \dots, \hat{q}_j - 1$  και  $j = \kappa + 1, \dots, r$  έχουμε ότι :

$$A(s)\beta_{jq}^w(s) = s^q A(s)x_{j0} + s^{q-1} A(s)x_{j1} + \dots + s A(s)x_{j,q-1} + A(s)x_{jq} =$$

$$= [s^{q+q_1} I_p, \dots, s I_p, I_p] \begin{matrix} \downarrow p q_1 \\ \left[ \begin{array}{cccc} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & A_{q_1} & \dots & 0 \\ A_0 & A_1 & A_{q_1-1} & \dots & 0 \\ 0 & A_0 & A_{q_1-2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & A_0 \end{array} \right] \begin{matrix} \uparrow p(q+1) \\ \left[ \begin{array}{c} x_{j0} \\ x_{j1} \\ \vdots \\ x_{jq} \end{array} \right] \end{matrix} \end{matrix} \quad (6.73\beta)$$

$$\begin{aligned}
 &= [s^{q+q_1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_{j,q+1} \\ -x_{j,q+2} \\ \vdots \\ -x_{j,q+q_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ mq_1 \end{matrix} = \\
 &= [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_{j,q+1} \\ -x_{j,q+2} \\ \vdots \\ -x_{j,q+q_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \\ mq_1 \end{matrix} \quad (6.77)
 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 A(s)\Psi_j(s) &= [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \xleftarrow{\hat{q}_j} \\ \begin{bmatrix} x_{j1} & x_{j2} & \dots & x_{j\hat{q}_j} \\ x_{j2} & x_{j3} & \dots & x_{j\hat{q}_j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{jq_1} & x_{jq_1+1} & \dots & x_{jq_1+\hat{q}_j-1} \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ mq_1 \end{matrix} \right\} \\
 & \qquad \qquad \qquad j=\kappa+1, \dots, r \quad (6.78)
 \end{aligned}$$

Εχουμε λοιπόν για αρχικές συνθήκες :

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(k-1)}(0-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_{j,q+1} \\ x_{j,q+2} \\ \vdots \\ x_{j,q+q_1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} q=0, 1, \dots, \hat{q}_j-1 \\ j=\kappa+1, \dots, r \end{matrix} \quad (6.79)$$

τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις :

$$\begin{aligned}
 \beta_{j0}^0(t) &:= x_{j0} \delta(t) \\
 \beta_{j1}^0(t) &:= x_{j0} \delta^{(1)}(t) + x_{j1} \delta(t) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \beta_{j\hat{q}_j-1}^0(t) &:= x_{j0} \delta^{(\hat{q}_j-1)}(t) + x_{j1} \delta^{(\hat{q}_j-2)}(t) + \dots + x_{j\hat{q}_j-1} \delta(t)
 \end{aligned} \quad (6.80)$$

Τελικά επειδή τα διανύσματα  $x_{j0} := \bar{u}_j(0)$ ,  $j = \kappa+1, \dots, r$  ως στήλες του αντιστρέψιμου πίνακα  $\tilde{U}_R(w)$  για την τιμή  $w=0$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε ότι οι κρουστικές λύσεις (6.80) για  $j = \kappa+1, \dots, r$  αποτελούν ένα σετ από  $\hat{q}_{\kappa+1} + \hat{q}_{\kappa+2} + \dots + \hat{q}_r$  γραμμικά ανεξάρτητες κρουστικές λύσεις του ιδίμορφου αυτόνομου συστήματος (6.1). Πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι κρουστικές λύσεις (6.80) δεν είναι και οι μόνες λύσεις κάτω από τις αρχικές συνθήκες (6.79), όπως άλλωστε θα δούμε και στην ενότητα 6.6.

**Ορισμός 6.20** Ορίζουμε ως  $X^w$  τον χώρο που παράγεται από τις γραμμικά ανεξάρτητες διανυσματικές συναρτήσεις (6.80)

$$X^w = \langle \beta_{\kappa+1,0}^w(t), \dots, \beta_{\kappa+1, \hat{q}_{\kappa+1}-1}^w(t), \dots, \beta_{r, \hat{q}_r-1}^w(t) \rangle \subseteq B \quad (6.81)$$

Ο χώρος  $X^w$  είναι προφανώς διανυσματικός χώρος λόγω της γραμμικότητας της απεικόνισης (6.1) και οφείλεται, όπως φαίνεται από την κατασκευή του, αποκλειστικά στην μηδενική δομή στο  $s=w$  του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$ .  $\square$

**Θεώρημα 6.21** Θεωρείστε ένα ιδίμορφο ομογενή σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής (6.1). Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r$  όπως στην (6.60). Εστω  $S_{A(s)}^w(s)$  η Smith–McMillan μορφή του  $A(s)$  στο  $s=w$  όπως στην σχέση (6.65) όπου

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_\kappa \geq 0 \quad (6.82)$$

είναι οι τάξεις των πόλων στο  $s=w$  του  $A(s)$  και

$$\hat{q}_r \geq \dots \geq \hat{q}_{\kappa+2} \geq \hat{q}_{\kappa+1} > 0 \quad (6.83)$$

είναι οι τάξεις των μηδενικών στο  $s=w$  του  $A(s)$ . Τότε

$$\boxed{\dim X^w = \hat{q}_{\kappa+1} + \hat{q}_{\kappa+2} + \dots + \hat{q}_r} \quad (6.84)$$

πρδ. η διάσταση του κρουστικού χώρου λύσεων  $X^w \subseteq B$ , που οφείλεται στη μηδενική δομή στο  $s=w$  του πίνακα  $A(s)$ , είναι ίση με το συνολικό πλήθος των μηδενικών στο  $s=w$  του  $A(s)$ .  $\square$

**Παράδειγμα 6.22** Θεωρείστε το ιδίμορφο ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων του παραδείγματος 6.9



$$A(\rho) \beta(t) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho & \rho^4 & \rho^2 + \rho \\ 1 & \rho^3 & \rho + 1 \\ 0 & \rho + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.1})$$

Εχουμε  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = 2 = r$  και

$$S_{A(s)}^0(s) = \begin{bmatrix} s^4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς  $q_1 = 4$  και  $\hat{q}_2 = 1$ . Εστω ο "δυνικός" πολυωνυμικός πίνακας  $\tilde{A}(w)$  του  $A(s)$

$$\tilde{A}(w) = \begin{bmatrix} w^3 & 1 & w^2 + w^3 \\ w^4 & w & w^3 + w^4 \\ 0 & w^3 + w^4 & 0 \end{bmatrix} = w^4 A\left(\frac{1}{w}\right)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ρητοί πίνακες  $\tilde{U}_L(w) \in \mathbb{R}(w)^{3 \times 3}$  και  $\tilde{U}_R(w) \in \mathbb{R}[w]^{3 \times 3}$  χωρίς μηδενικά ή πόλους στο  $w=0$  τέτοιοι ώστε

$$\tilde{U}_L(w) \tilde{A}(w) \tilde{U}_R(w) = S_{\tilde{A}(w)}^0(w) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w^3 & 0 & -\frac{1}{w+1} \\ w & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^3 & 1 & w^2 + w^3 \\ w^4 & w & w^3 + w^4 \\ 0 & w^3 + w^4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1+w \\ 1 & -w^2 & 0 \\ 0 & 1 & -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{A}(w) \tilde{U}_R(w) = \tilde{U}_L(w)^{-1} S_{\tilde{A}(w)}^0(w) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} w^3 & 1 & w^2 + w^3 \\ w^4 & w & w^3 + w^4 \\ 0 & w^3 + w^4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1+w \\ 1 & -w^2 & 0 \\ 0 & 1 & -w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w & 0 & -1 \\ w^3 + w^4 & -w-1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εστω

$$\tilde{u}_2(w) = \begin{bmatrix} -1 \\ -w^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

η δεύτερη στήλη του  $\tilde{U}_R(w)$ . Έχουμε ότι

$$x_{20} := \frac{1}{0!} \tilde{u}_2(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{21} := \frac{1}{1!} \tilde{u}_2^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2w \\ 0 \end{bmatrix}_{w=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{22} := \frac{1}{2!} \tilde{u}_2^{(2)}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}_{w=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{2i} := \frac{1}{i!} \tilde{u}_2^{(i)}(0) = \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{w=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i=3,4$$

και συνεπώς για αρχικές συνθήκες

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1(0-) \\ \beta_2(0-) \\ \beta_3(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \beta_1^{(1)}(0-) \\ \beta_2^{(1)}(0-) \\ \beta_3^{(1)}(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \beta_1^{(i)}(0-) \\ \beta_2^{(i)}(0-) \\ \beta_3^{(i)}(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i=2,3$$

(E.2)

έχουμε μια λύση την

$$\beta_{20}^w(t) = x_{20} \delta(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (E.3)$$

η οποία αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου  $X^{\infty}$ . Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι η  $\beta_{20}^{\infty}(t)$  δεν είναι η μοναδική λύση κάτω από τις αρχικές συνθήκες (E.2) αλλά αποτελεί έναν αντιπρόσωπο του συνόλου λύσεων της (E.1) της μορφής :

$$\beta^{\infty}(t) = x_{20}\delta(t) + \begin{bmatrix} -\delta^{(1)}(t)-\delta(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} -\delta^{(1)}(t)-\delta(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u(t) \quad (\text{E.4})$$

όπου  $x(t)*u(t) = \int_0^t x(t-\tau)u(\tau)d\tau$  και  $u(t)$  αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση.

Εάν τώρα θεωρήσουμε το πολωνυμικό διάλυμα :

$$\tilde{u}_3(w) = \begin{bmatrix} 1+w \\ 0 \\ -w \end{bmatrix}$$

που είναι η τρίτη στήλη του  $\tilde{U}_R(w)$  έχουμε ότι

$$x_{30} := \frac{1}{0!} \tilde{u}_3(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{31} := \frac{1}{1!} \tilde{u}_3^{(1)}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$x_{3i} := \frac{1}{i!} \tilde{u}_3^{(i)}(0) = \frac{1}{i!} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{w=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i=2,3,4$$

και συνεπώς για αρχικές συνθήκες :

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1(0-) \\ \beta_2(0-) \\ \beta_3(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \beta_1^{(i)}(0-) \\ \beta_2^{(i)}(0-) \\ \beta_3^{(i)}(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i=1,2,3 \quad (\text{E.5})$$

έχουμε μια λύση την

$$\beta_{30}^p(t) = x_{30} \delta(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (\text{E.6})$$

η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη της κρουστικής λύσης (E.3) και οφείλεται στην δεξιά μηδενική δομή του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$  πρδ. προκύπτει με τον ίδιο κατασκευής της λύσης  $\beta_{20}^p(t)$  από την τρίτη στήλη του πίνακα  $\tilde{U}_R(w)$ . Όπως τονίσαμε και παραπάνω η λύση  $\beta_{30}^p(t)$  δεν θα είναι η μοναδική κάτω από τις αρχικές συνθήκες (E.5) αλλά θα αποτελεί έναν αντιπρόσωπο του συνόλου λύσεων της (E.1) της μορφής :

$$\beta^e(t) = x_{30} \delta(t) + \begin{bmatrix} -\delta^{(1)}(t) - \delta(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} -\delta^{(1)}(t) - \delta(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u(t) \quad (\text{E.7})$$

όπου  $x(t) * u(t) = \int_{-}^t x(t-\tau) u(\tau) d\tau$  και  $u(t)$  αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση.  $\square$

#### 6.4 Κρουστικές λύσεις ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές πίνακες οφειλόμενες στην δεξιά μηδενική δομή πολυωνυμικών πινάκων.

Θεωρήστε την σχέση (6.69)

$$\begin{aligned} [U(w) \tilde{U}_L(w)] \tilde{A}(w) \tilde{U}_R(w) &= S_{\tilde{A}(w)}^0(w) = \\ &= \text{block diag}[1, w^{\mu_2}, \dots, w^{\mu_\kappa}, w^{\mu_{\kappa+1}}, \dots, w^{\mu_r}, 0_{p-r, m-r}] \end{aligned} \quad (\text{6.85})$$

όπου  $\tilde{U}_R(w) = [\tilde{u}_1(w), \tilde{u}_2(w), \dots, \tilde{u}_m(w)] \in \mathbb{R}[w]^{m \times m}$  με  $\tilde{u}_i(w) \in \mathbb{R}[w]^{m \times 1}$ . Είναι φανερό από την σχέση (6.85) ότι :

$$\tilde{A}(w) \tilde{u}_i(w) = 0 \quad i=r+1, \dots, m \quad (6.86)$$

και συνεπώς οι στήλες :

$$\{\tilde{u}_{r+1}(w), \tilde{u}_{r+2}(w), \dots, \tilde{u}_m(w)\} \quad (6.87)$$

του αντιστρέψιμου πίνακα  $\tilde{U}_R(w)$  ανήκουν στο δεξιό μηδενικό χώρο (right null space) του πίνακα  $\tilde{A}(w)$ . Οι στήλες αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες λόγω του ότι είναι στήλες του αντιστρέψιμου πίνακα  $\tilde{U}_R(w)$  και παράγουν μια βάση του δεξιού μηδενικού χώρου του  $\tilde{A}(w)$  λόγω του ότι το πλήθος τους είναι  $m-r$  όσο και η διάσταση του δεξιού μηδενικού χώρου του  $\tilde{A}(w)$  (Forney 1975). Δεν είναι όμως κατ' ανάγκη μια ελάχιστη βάση του δεξιού μηδενικού χώρου του  $\tilde{A}(w)$ .

**Πρόταση 6.23** (Vardulakis 1991) Εστω  $T(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m}$  με τάξη  $\text{rank}_{\mathbb{R}(w)} T(w) = p$  ( $=m$ ). Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $T_L(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times p}$  ( $T_R(w) \in \mathbb{R}[w]^{m \times m}$ ) τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$\bar{T}(w) := T_L(w)T(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m} \quad (\bar{T}(w) := T(w)T_R(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m}) \quad (6.88)$$

να είναι κανονικός κατά γραμμές (row proper, ορισμός 2.7) (κανονικός κατά στήλες (column proper, ορισμός 2.7)). □

Εαν θεωρήσουμε τον πολυωνυμικό πίνακα :

$$\hat{U}_R(w) = [\tilde{u}_{r+1}(w), \tilde{u}_{r+2}(w), \dots, \tilde{u}_m(w)] \quad (6.89)$$

τότε από την πρόταση 6.23 έχουμε ότι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $U(w) \in \mathbb{R}[w]^{(m-r) \times (m-r)}$  τέτοιος ώστε ο πίνακας :

$$\bar{U}_R(w) = \hat{U}_R(w) U(w) = [\bar{u}_{r+1}(w), \bar{u}_{r+2}(w), \dots, \bar{u}_m(w)] \quad (6.90)$$

να είναι ένας κανονικός κατά στήλες πολυωνυμικός πίνακας. Εαν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (6.85) από δεξιά με τον πολυωνυμικό πίνακα :

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & U(w) \end{bmatrix} \quad (6.91)$$

έχουμε ότι :

$$[U(w)\tilde{U}_L(w)] \tilde{A}(w) [\tilde{u}_1(w), \dots, \tilde{u}_r(w), \bar{u}_{r+1}(w), \dots, \bar{u}_m(w)] = S_{\tilde{A}(w)}^0(w) \quad (6.92)$$

και συνεπώς οι στήλες  $\bar{u}_{r+1}(w), \bar{u}_{r+2}(w), \dots, \bar{u}_m(w)$  αποτελούν μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του  $\tilde{A}(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m}$  πρδ.

$$\tilde{A}(w) \bar{u}_i(w) = 0 \quad i=r+1, \dots, m \quad (6.93)$$

όπου

$$\bar{u}_i(w) = u_{i, \epsilon_i} + u_{i, \epsilon_i - 1} w + \dots + u_{i, 0} w^{\epsilon_i} \quad i=r+1, \dots, m \quad (6.94)$$

**Λήμμα 6.24** Θεωρείστε τον πίνακα  $\bar{U}_R(w)$  της σχέσεως (6.90). Εστω επίσης ο πίνακας

$$\check{U}_R(s) = \bar{U}_R\left(\frac{1}{s}\right) \begin{bmatrix} s^{\epsilon_{r+1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{\epsilon_{r+2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{\epsilon_m} \end{bmatrix} = [\check{u}_{r+1}(s), \check{u}_{r+2}(s), \dots, \check{u}_m(s)] \quad (6.95)$$

όπου

$$\check{u}_i(s) = u_{i, 0} + u_{i, 1} s + \dots + u_{i, \epsilon_i - 1} s^{\epsilon_i - 1} + u_{i, \epsilon_i} s^{\epsilon_i} \quad i=r+1, \dots, m \quad (6.96)$$

Τότε οι στήλες του πίνακα  $\check{U}_R(s)$  αποτελούν μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του πίνακα  $A(s)$ .

**Απόδειξη** Μια καινή και αναγκαία συνθήκη για να αποτελούν οι στήλες του πίνακα  $\check{U}_R(s)$  μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του πίνακα  $A(s)$  είναι α) οι στήλες του πίνακα  $\check{U}_R(s)$  να ικανοποιούν την εξίσωση  $A(s)\check{u}_i(s)=0$  και β) ο πίνακας  $\check{U}_R(s)$  να έχει πλήρη τάξη, να μην περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και να είναι καινικός κατά στήλες. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες α) και β).

(α) Από την σχέση (6.93) έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{A}(w) \bar{u}_i(w) = 0 &\stackrel{w=1/s}{\Leftrightarrow} \tilde{A}\left(\frac{1}{s}\right) \bar{u}_i\left(\frac{1}{s}\right) = 0 \stackrel{(\cdot s^{k+\epsilon_i})}{\Leftrightarrow} \\ [s^k \tilde{A}\left(\frac{1}{s}\right)] [\bar{u}_i\left(\frac{1}{s}\right) s^{\epsilon_i}] = 0 &\Leftrightarrow A(s) \check{u}_i(s) = 0 \end{aligned} \quad (6.97)$$

(β) Ο πίνακας  $\bar{U}_R(w)$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  και συνεπώς δεν περιέχει μηδενικά στο  $w=0$ . Συνεπώς οι στήλες του πίνακα  $\bar{U}_R(0)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή ισοδύναμα ο πίνακας

$$\bar{U}_R(0) = [u_{r+1, \epsilon_{r+1}}, u_{r+2, \epsilon_{r+2}}, \dots, u_{m, \epsilon_m}] \quad (6.98)$$

έχει πλήρη τάξη με αποτέλεσμα ο πίνακας  $\check{U}_R(s) = [\check{u}_{r+1}(s), \check{u}_{r+2}(s), \dots, \check{u}_m(s)]$  να έχει πλήρη τάξη και να είναι κανονικός κατά στήλες.

Εστω ότι ο πίνακας  $\check{U}_R(s)$  περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ . Τότε θα υπάρχει ένας πολυωνυμικός πίνακας  $Q(s)$  (ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του πίνακα  $\check{U}_R(s)$ ) τέτοιος ώστε

$$\check{U}_R(s) = \check{U}_R(s) Q(s) \quad (6.99)$$

όπου ο  $Q(s)$  περιέχει όλα τα μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  του  $\check{U}_R(s)$  και  $\deg \check{U}_R(s) < \deg \check{U}_R(s)$ . Κατά συνέπεια θα μπορούσαμε να πάρουμε μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του  $A(s)$  έστω  $\{\check{u}_{r+1}(s), \check{u}_{r+2}(s), \dots, \check{u}_m(s)\}$  με  $\deg \check{u}_i(s) = \check{\epsilon}_i < \epsilon_i = \deg \check{u}_i(s)$  για ορισμένα  $i \in m-r$ . Αρα θα υπάρχουν πολυωνυμικά διανύσματα  $\bar{u}_i(w) = \check{u}_i(\frac{1}{w}) w^{\check{\epsilon}_i}$  που θα ανήκουν στην βάση του δεξιού μηδενικού χώρου του  $\check{A}(w)$  με βαθμούς μικρότερους των  $\epsilon_i$ , πράγμα άτοπο. Αρα ο πίνακας  $\check{U}_R(s)$  δεν εμπεριέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}$ .

Από τις συνθήκες α) και β) που αποδείξαμε παραπάνω είναι φανερό ότι οι στήλες του πίνακα  $\check{U}_R(s)$  αποτελούν μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του  $A(s)$  που αποδεικνύει το λήμμα.  $\square$

Οι μέγιστοι βαθμοί των στηλών  $\check{u}_i(s)$ ,  $i=r+1, \dots, m$   $\{\epsilon_{r+1}, \epsilon_{r+2}, \dots, \epsilon_m\}$  ονομάζονται **δεξιά ελάχιστοι δείκτες** (right minimal indices) του  $A(s)$ . Θεωρείστε την σχέση (6.93)

$$\check{A}(w) \bar{u}_i(w) = 0 \quad i=r+1, \dots, m \quad (6.100)$$

όπου  $\check{A}(w)$  και  $\bar{u}_i(w)$  είναι αντίστοιχα οι δυικοί πολυωνυμικοί πίνακες των  $A(s)$  και  $\check{u}_i(s)$ . Στηριζόμενοι στην σχέση (6.100) είναι πολύ εύκολο να διατυπώσουμε την παρακάτω

**Πρόταση 6.25** Εστω  $\bar{u}_j^{(q)}(w)$  και  $\tilde{A}^{(q)}(w)$  είναι αντίστοιχα οι παράγωγοι τάξεως  $q$  των  $\bar{u}_j(w)$  και  $\tilde{A}(w)$  ως προς  $w$  για  $q=0,1,\dots,q_1+\epsilon_j-1$  και  $j=r+1,\dots,m$ . Ορίζουμε :

$$y_{jq} := \frac{1}{q!} \bar{u}_j^{(q)}(0) \equiv u_{j,\epsilon_j-q} \tag{6.101}$$

για  $q=0,1,\dots,q_1+\epsilon_j-1$  και  $j=r+1,\dots,m$ . Τότε τα διανύσματα

$$y_{j0}, y_{j1}, \dots, y_{jq_1+\epsilon_j-1} \in \mathbb{R}^m \quad j=r+1,\dots,m \tag{6.102\alpha}$$

ή ισοδύναμα

$$u_{j,\epsilon_j}, u_{j,\epsilon_j-1}, \dots, u_{j,1}, u_{j,0} \in \mathbb{R}^m \quad j=r+1,\dots,m \tag{6.102\beta}$$

δημιουργούν μια αλυσίδα Jordan για τον  $\tilde{A}(w) \in \mathbb{R}[w]^{p \times m}$  που αντιστοιχεί στο  $w=0$  (και γενικά σε  $w=\lambda$  όπου  $\lambda$  αυθαίρετη σταθερή τιμή) ή ισοδύναμα ικανοποιούν τις συνθήκες :

$$\begin{aligned} &\tilde{A}(0) y_{j0} = 0 \\ &\tilde{A}^{(1)}(0) y_{j0} + \tilde{A}(0) y_{j1} = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\frac{1}{q_1!} \tilde{A}^{(q_1)}(0) y_{j0} + \frac{1}{(q_1-1)!} \tilde{A}^{(q_1-1)}(0) y_{j1} + \dots + \tilde{A}(0) y_{jq_1} = 0 \\ &\frac{1}{q_1!} \tilde{A}^{(q_1)}(0) y_{j1} + \frac{1}{(q_1-1)!} \tilde{A}^{(q_1-1)}(0) y_{j2} + \dots + \tilde{A}(0) y_{jq_1+1} = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &\frac{1}{q_1!} \tilde{A}^{(q_1)}(0) y_{j\epsilon_j-1} + \frac{1}{(q_1-1)!} \tilde{A}^{(q_1-1)}(0) y_{j\epsilon_j} + \dots + \tilde{A}(0) y_{jq_1+\epsilon_j-1} = 0 \end{aligned} \tag{6.103\alpha}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &A_{q_1} y_{j0} = 0 \\ &A_{q_1-1} y_{j0} + A_{q_1} y_{j1} = 0 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{j=r+1,\dots,m}$$



$$\begin{aligned}
 A_0 y_{j0} + A_1 y_{j1} + \dots + A_{q_1} y_{jq_1} &= 0 \\
 A_0 y_{j1} + A_1 y_{j2} + \dots + A_{q_1} y_{jq_1+1} &= 0 \\
 \dots\dots\dots & \\
 A_0 y_{j\epsilon_j-1} + A_1 y_{j\epsilon_j} + \dots + A_{q_1} y_{jq_1+\epsilon_j-1} &= 0
 \end{aligned} \tag{6.103\beta}$$

**Απόδειξη** Θεωρείστε τις παρακάτω σχέσεις

$$\tilde{A}(w) \tilde{u}_j(w) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(A_0 w^{q_1} + \dots + A_{q_1-1} w + A_{q_1}) (u_{j,\epsilon_j} + u_{j,\epsilon_j-1} w + \dots + u_{j,0} w^{\epsilon_j}) = 0 \quad \Leftrightarrow \tag{6.101}$$

$$\tag{6.104}$$

$$(A_0 w^{q_1} + \dots + A_{q_1-1} w + A_{q_1}) (y_{j,0} + y_{j,1} w + \dots + y_{j,\epsilon_j} w^{\epsilon_j}) = 0$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του w στην σχέση (6.104) με το μηδέν θα πάρουμε την σχέση (6.103β) ή ισοδύναμα την σχέση (6.103α). Έχουμε δηλαδή ότι τα διανύσματα  $y_{ji}$  για  $i=0,1,\dots,q_1+\epsilon_j-1$  ( $j=r+1,\dots,m$ ) ικανοποιούν τις σχέσεις (6.4) ή (6.5) και συνεπώς αποτελούν αλυσίδα Jordan μήκους  $\epsilon_j$  που αντιστοιχούν στο διάνυσμα  $\check{u}_i(s)$  της δεξιά ελάχιστης μηδενικής βάσης του πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . □

Για  $q=0,1,\dots,\epsilon_j-1$  και  $j=r+1,\dots,m$  ορίζουμε τα παρακάτω πολυωνυμικά διανύσματα :

$$\begin{aligned}
 \beta_{jq}^\epsilon(s) &:= y_{j0} s^q + y_{j1} s^{q-1} + \dots + y_{jq} \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1} \\
 &\equiv u_{j,\epsilon_j} s^q + u_{j,\epsilon_j-1} s^{q-1} + \dots + u_{j,\epsilon_j-q} \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}
 \end{aligned} \tag{6.105}$$

πρδ. τα πολυωνυμικά διανύσματα :

$$\begin{aligned}
 \beta_{j_0}^\epsilon(s) &:= y_{j_0} \equiv u_{j, \epsilon_j} \\
 \beta_{j_1}^\epsilon(s) &:= y_{j_0}s + y_{j_1} \equiv u_{j, \epsilon_j}s + u_{j, \epsilon_{j-1}} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \beta_{j_{\epsilon_j-1}}^\epsilon(s) &:= y_{j_0}s^{\epsilon_j-1} + y_{j_1}s^{\epsilon_j-2} + \dots + y_{j_{\epsilon_j-1}} \equiv u_{j, \epsilon_j}s^{\epsilon_j-1} + u_{j, \epsilon_{j-1}}s^{\epsilon_j-2} + \dots + u_{j, 1}
 \end{aligned} \tag{6.106}$$

$j=r+1, \dots, m$

και εστω :

$$\Psi_j(s) := [\beta_{j_0}^\epsilon(s), \beta_{j_1}^\epsilon(s), \dots, \beta_{j_{\epsilon_j-1}}^\epsilon(s)] \in \mathbb{R}[s]^{m \times \ell_j} \quad j=r+1, \dots, m \tag{6.107}$$

Τότε για  $q=0, 1, \dots, \epsilon_j-1$  και  $j=r+1, \dots, m$  έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
 A(s)\beta_{j_q}^\epsilon(s) &= s^q A(s)y_{j_0} + s^{q-1} A(s)y_{j_1} + \dots + sA(s)y_{j_{q-1}} + A(s)y_{j_q} = \\
 &= [s^{q+q_1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{matrix} \left[ \begin{array}{cccc} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \dots 0 \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{q_1-1} \dots 0 \\ 0 & A_0 & \dots & A_{q_1-2} \dots \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \dots A_0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} y_{j_0} \\ y_{j_1} \\ \vdots \\ y_{j_q} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{6.103\beta} \\
 &\quad \left. \begin{matrix} \downarrow p q_1 \\ \uparrow p(q+1) \end{matrix} \right\} \leftarrow p(q+1) \rightarrow \\
 &= [s^{q+q_1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{j, q+1} \\ -y_{j, q+2} \\ \vdots \\ -y_{j, q+q_1} \end{bmatrix} \uparrow m q_1 =
 \end{aligned}$$

$$= [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_{j,q+1} \\ -y_{j,q+2} \\ \vdots \\ -y_{j,q+q_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ mq_1 \\ \downarrow \end{matrix} \quad (6.108)$$

ή ισοδύναμα

$$A(s)\Psi_j(s) = [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \overleftarrow{\epsilon_j} \\ \begin{bmatrix} y_{j1} & y_{j2} & \dots & y_{j\ell_j} \\ y_{j2} & y_{j3} & \dots & y_{j\ell_j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{jq_1} & y_{jq_1+1} & \dots & y_{jq_1+\ell_j-1} \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ mq_1 \\ \downarrow \end{matrix} \right\} \quad j=r+1, \dots, m \quad (6.109)$$

Εχουμε λοιπόν για αρχικές συνθήκες :

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(k-1)}(0-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y_{jq+1} \\ y_{jq+2} \\ \vdots \\ y_{jq+q_1} \end{bmatrix} \equiv - \begin{bmatrix} u_{j,\epsilon_j-q-1} \\ u_{j,\epsilon_j-q-2} \\ \vdots \\ u_{j,\epsilon_j-q-q_1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} q=0, 1, \dots, \epsilon_j-1 \\ j=r+1, \dots, m \end{matrix} \quad (6.110)$$

τις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις :

$$\begin{aligned} \beta_{j0}^\epsilon(t) &:= y_{j0}\delta(t) \equiv u_{j,\epsilon_j}\delta(t) \\ \beta_{j1}^\epsilon(t) &:= y_{j0}\delta^{(1)}(t) + y_{j1}\delta(t) \equiv u_{j,\epsilon_j}\delta^{(1)}(t) + u_{j,\epsilon_j-1}\delta(t) \\ &\dots\dots\dots \\ \beta_{j\epsilon_j-1}^\epsilon(t) &:= y_{j0}\delta^{(\epsilon_j-1)}(t) + y_{j1}\delta^{(\epsilon_j-2)}(t) + \dots + y_{j\epsilon_j-1}\delta(t) \equiv \\ &\equiv u_{j,\epsilon_j}\delta^{(\epsilon_j-1)}(t) + u_{j,\epsilon_j-1}\delta^{(\epsilon_j-2)}(t) + \dots + u_{j,1}\delta(t) \end{aligned} \quad (6.111)$$

Τελικά επειδή τα διανύσματα  $y_{j0} := \bar{u}_j(0) \equiv u_{j,\epsilon_j}$ ,  $j=r+1, \dots, m$  ως στήλες του αντιστρέψιμου

πίνακα  $\tilde{U}'_R(w) = [\tilde{u}_1(w), \dots, \tilde{u}_r(w), \bar{u}_{r+1}(w), \dots, \bar{u}_m(w)]$  για την τιμή  $w=0$  είναι γραμμικά

ανεξάρτητες, έχουμε ότι οι κρουστικές λύσεις (6.111) για  $j=r+1, \dots, m$  αποτελούν ένα σετ από  $\epsilon_{r+1} + \epsilon_{r+2} + \dots + \epsilon_m$  γραμμικά ανεξάρτητες κρουστικές λύσεις του ιδιόμορφου αυτόνομου συστήματος (6.1). Πρέπει εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι κρουστικές λύσεις (6.111) δεν είναι και οι μόνες λύσεις κάτω από τις αρχικές συνθήκες (6.110), όπως άλλωστε θα δούμε και στην ενότητα 6.6.

**Ορισμός 6.26** Ορίζουμε ως  $X^\epsilon$  τον χώρο που παράγεται από τις γραμμικά ανεξάρτητες διανυσματικές συναρτήσεις (6.111)

$$X^\epsilon := \langle \beta_{r+1,0}^\epsilon(t), \dots, \beta_{r+1, \epsilon_{r+1}-1}^\epsilon(t), \dots, \beta_{m, \epsilon_m-1}^\epsilon(t) \rangle \subseteq B \quad (6.112)$$

Ο χώρος  $X^\epsilon$  είναι προφανώς διανυσματικός χώρος λόγω της γραμμικότητας της απεικόνισης (6.1) και οφείλεται, όπως φαίνεται από την κατασκευή του, αποκλειστικά στην δεξιά μηδενική δομή του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$ .  $\square$

**Θεώρημα 6.27** Θεωρείστε ένα ιδιόμορφο ομογενή σύστημα διαφορικών εξισώσεων της μορφής (6.1). Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r$  και

$$\epsilon_{r+1}, \epsilon_{r+2}, \dots, \epsilon_m \quad (6.113)$$

είναι οι δεξιά ελάχιστοι δείκτες του  $A(s)$ . Τότε

$$\boxed{\dim X^\epsilon = \epsilon_{r+1} + \epsilon_{r+2} + \dots + \epsilon_m} \quad (6.114)$$

πρδ. η διάσταση του κρουστικού χώρου λύσεων που οφείλεται στην δεξιά μηδενική δομή του πίνακα  $A(s)$  είναι ίση με το συνολικό πλήθος των ελαχίστων δεικτών του δεξιά μηδενικού χώρου του  $A(s)$ .  $\square$

**Παράδειγμα 6.28** Θεωρείστε την ομογενή διαφορική εξίσωση του παραδείγματος 6.9

$$A(\rho) \beta(t) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho & \rho^4 & \rho^2 + \rho \\ 1 & \rho^3 & \rho + 1 \\ 0 & \rho + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1} \quad (E.1)$$

Τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες  $U_L(s)$  και  $U_R(s)$  τέτοιοι ώστε

$$U_L(s) A(s) U_R(s) = S_{A(s)}^C(s) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & s^4 & s^2+s \\ 1 & s^3 & s+1 \\ 0 & s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s^3 & -1-s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} s & s^4 & s^2+s \\ 1 & s^3 & s+1 \\ 0 & s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s^3 & -1-s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} s & s^4 & s^2+s \\ 1 & s^3 & s+1 \\ 0 & s+1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1} \quad (\text{E.2})$$

όπου το πολυωνυμικό διάνυσμα

$$\check{u}_3(s) = \begin{bmatrix} -1-s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s =: u_{30} + u_{31} s \equiv y_{j1} + y_{j0} s$$

( $\epsilon_3=1$ ) αποτελεί μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του πίνακα  $A(s)$ . Συνεπώς για αρχικές συνθήκες

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} u_{30} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

(E.3)

$$\begin{bmatrix} \beta_1(0) \\ \beta_2(0) \\ \beta_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \beta_1^{(i)}(0-) \\ \beta_2^{(i)}(0-) \\ \beta_3^{(i)}(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad i=1,2,3$$

έχουμε την κρουστική λύση

$$\beta_{30}^\epsilon(t) = y_{30}\delta(t) \equiv u_{31}\delta(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \quad (E.4)$$

η οποία αποτελεί μια βάση του κρουστικού χώρου λύσεων  $X^\epsilon$ , του οποίου η διάσταση είναι ίση με  $\epsilon_3=1$ . Η λύση  $\beta_{30}^\epsilon(t)$  αποτελεί έναν αντιπρόσωπο του συνόλου λύσεων της (E.1) για αρχικές συνθήκες της μορφής (E.3) και το οποίο σύνολο λύσεων έχει την εξής μορφή :

$$\beta^\epsilon(t) = u_{31}\delta(t) + \begin{bmatrix} -\delta^{(1)}(t)-\delta(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} -\delta^{(1)}(t)-\delta(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} * u(t) \quad (E.5)$$

όπου  $x(t)*u(t) = \int_{-}^t x(t-\tau)u(\tau)d\tau$  και  $u(t)$  αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση.

Η κρουστική λύση (E.4) είναι γραμμικά ανεξάρτητη της κρουστικής λύσεως (E.3) στο παράδειγμα 6.22 και συνεπώς οι χώροι λύσεων  $X^0$  και  $X^\epsilon$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (E.1) δεν ταυτίζονται.  $\square$

Ένα εύλογο ερώτημα που γεννιέται είναι εάν οι γραμμικοί διανυσματικοί χώροι  $X^0$  και  $X^\epsilon$  είναι ξένοι μεταξύ τους; Την απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνουμε στο παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 6.29** Εστω η ιδιόμορφη ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) και οι διανυσματικοί χώροι λύσεων  $X^{\omega}$  και  $X^{\epsilon}$  της (6.1) (ορισμός 6.20 και 6.26). Τότε θα έχουμε  $X^{\omega} \cap X^{\epsilon} = \{0\}$ .

**Απόδειξη** Επειδή τα διανύσματα  $x_{j_0} = \tilde{u}_j(0)$ ,  $j = \kappa+1, \kappa+2, \dots, \tau$  και  $y_{j_0} = \bar{u}_j(0)$ ,  $j = \tau+1, \dots, m$  ως στήλες του αντιστρέψιμου πίνακα  $\tilde{U}'_R(w) = [\tilde{u}_1(w), \dots, \tilde{u}_\tau(w), \bar{u}_{\tau+1}(w), \dots, \bar{u}_m(w)]$  για την τιμή  $w=0$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έχουμε ότι οι κρουστικές λύσεις (6.80) και (6.111) είναι γραμμικά ανεξάρτητες κρουστικές λύσεις του ιδιόμορφου αυτόνομου συστήματος (6.1).  $\square$

### 6.5 Ο ρόλος της αριστερής μηδενικής δομής πολυωνυμικών πινάκων στην ύπαρξη λύσεων μιας ιδιόμορφης ομογενής διαφορικής εξίσωσης με συντελεστές πίνακες.

Σε αντίθεση με τις καινουργιές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με συντελεστές πίνακες ( $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = p$ ), οι ιδιόμορφες ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δεν έχουν πάντα λύση ή πιο συγκεκριμένα υπάρχουν αρχικές συνθήκες κάτω από τις οποίες δεν έχει λύση το σύστημα μου. Η ιδιοτροπία αυτή αν θα μπορούσαμε να πούμε, θα δείξουμε στην συνέχεια ότι οφείλεται κατά αποκλειστικό λόγο στην αριστερή μηδενική δομή του πολυωνυμικού πίνακα  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  στην σχέση (6.1) και (6.2).

Εστω η ιδιόμορφη ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) και ο πίνακας  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  της σχέσης (6.2). Θεωρείστε μια ελάχιστη βάση του αριστερά μηδενικού χώρου του πίνακα  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$

$$\{v_{\tau+1}(s), v_{\tau+2}(s), \dots, v_p(s)\} \quad (6.115)$$

όπου

$$v_i(s) = v_{i0} + v_{i1}s + \dots + v_{i\eta_i} s^{\eta_i} \in \mathbb{R}[s]^{1 \times p} \quad i = \tau+1, \dots, p \quad (6.116)$$

τα διανύσματα της αριστερής ελάχιστης βάσης του  $A(s)$  και  $\{\eta_{\tau+1}, \eta_{\tau+2}, \dots, \eta_p\}$  οι αριστεροί ελάχιστοι δείκτες (left minimal indices) που προέρχονται από τα διανύσματα αυτά. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& v_i(s) A(s) = 0 \Rightarrow \\
& (v_{i0} + v_{i1}s + \dots + v_{i\eta_i} s^{\eta_i})(A_k s^k + A_{k-1} s^{k-1} + \dots + A_0) = 0 \Rightarrow \\
& s^{\eta_i+k} (v_{i\eta_i} A_k) + \\
& + s^{\eta_i+k-1} (v_{i\eta_i-1} A_k + v_{i\eta_i} A_{k-1}) + \\
& + \dots + \\
& + s^{\eta_i} (v_{i0} A_{\eta_i} + v_{i1} A_{\eta_i-1} + \dots + v_{i\eta_i} A_0) + \\
& + \dots + \\
& + s^2 (v_{i0} A_2 + v_{i1} A_1 + v_{i2} A_0) + \\
& + s (v_{i0} A_1 + v_{i1} A_0) + \\
& + 1 (v_{i0} A_0) = 0 \qquad i=r+1, \dots, p
\end{aligned} \tag{6.117}$$

Εαν λάβουμε υπόψη μας ότι  $q_1=k$  (Πρόταση 6.18) και εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του  $s$  με το μηδέν στην σχέση (6.117), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} v_{i\eta_i} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i\eta_i-1} & v_{i\eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i0} & v_{i1} & \dots & v_{i\eta_i} \\ 0 & v_{i0} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_{i0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} = \\
& = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{v_{i\eta_i}}{v_{i\eta_i}} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i\eta_i-1} & v_{i\eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{iq_1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{q_1-1} \\ 0 & A_0 & \dots & A_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{bmatrix} \tag{6.118}
\end{aligned}$$



Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην ομογενή διαφορική εξίσωση (6.1) έχουμε

$$\begin{aligned} A(s)\beta(s) &= [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} = \\ &:= (s^{q_1-1}I_p) \mathcal{A}_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \end{aligned} \quad (6.119)$$

Εαν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά και τα δύο μέλη της σχέσεως (6.119) με το διάνυσμα  $v_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{1 \times p}$  παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned} \{v_i(s) A(s)\} \beta(s) &= v_i(s) (s^{q_1-1}I_p) \mathcal{A}_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \Leftrightarrow \\ 0 \beta(s) &= v_i(s) (s^{q_1-1}I_p) \mathcal{A}_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \Leftrightarrow \\ v_i(s) (s^{q_1-1}I_p) \mathcal{A}_{q_1} \tilde{\beta}(0-) &= 0 \quad i=r+1, \dots, p \end{aligned} \quad (6.120)$$

Η σχέση (6.120) μας δίνει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι αρχικές μας συνθήκες  $\tilde{\beta}(0-)$  ή ισοδύναμα το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών  $(s^{q_1-1}I_p) \mathcal{A}_{q_1} \times \tilde{\beta}(0-)$  έτσι ώστε η ιδιόμορφη ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) να έχει λύση. Η σχέση (6.120) γράφεται πιο αναλυτικά ως :

$$v_i(s) (s^{q_1-1}I_p) \mathcal{A}_{q_1} \tilde{\beta}(0-) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[v_{i0} + v_{i1}s + \dots + v_{i\eta_i} s^{\eta_i}] [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[v_{i0} s^{q_1-1} + v_{i1} s^{q_1} + \dots + v_{i\eta_i} s^{\eta_i+q_1-1}, \dots, v_{i0} + v_{i1} s + \dots + v_{i\eta_i} s^{\eta_i}] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[s^{\eta_i+q_1-1}, s^{\eta_i+q_1-2}, \dots, s^{q_1-1}, \dots, s, 1] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} v_{i\eta_i} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i\eta_i-1} & v_{i\eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i0} & v_{i1} & \dots & v_{i\eta_i} \\ 0 & v_{i0} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_{i0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} \quad (6.118) =$$

$$= -[s^{\eta_i+q_1-1}, s^{\eta_i+q_1-2}, \dots, s^{q_1-1}, \dots, s, 1] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{v_{i\eta_i}}{v_{i\eta_i}} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i\eta_i-1} & v_{i\eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{iq_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{q_1-1} \\ 0 & A_0 & \dots & A_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} =$$

$$= -[s^{\eta_i-1}, s^{\eta_i-2}, \dots, s, 1] \begin{bmatrix} v_{i\eta_i} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i\eta_i-1} & v_{i\eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & v_{i\eta_i} \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{iq_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{q_1-1} \\ 0 & A_0 & \dots & A_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} = 0$$

$i=r+1, \dots, p$  (6.121)

Στηριζόμενοι στην σχέση (6.121) μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω :

**Θεώρημα 6.30** Η ιδιόμορφη ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) έχει λύση εάν και μόνο εάν οι επόμενες :

$$\boxed{\eta_{r+1} + \eta_{r+2} + \dots + \eta_p} \quad (6.122)$$

γραμμικά ανεξάρτητες συνθήκες μεταξύ των αρχικών συνθηκών  $\beta(0-)$ ,  $\beta^{(1)}(0-)$ , ...,  $\beta^{(q_1-1)}(0-)$  του συστήματος (6.1) ικανοποιούνται :

$$\begin{bmatrix} v_{i\eta_i} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i\eta_i-1} & v_{i\eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & v_{i\eta_i} \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{iq_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{q_1-1} \\ 0 & A_0 & \dots & A_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} = 0 \quad i=r+1, \dots, p \quad (6.123)$$

**Απόδειξη** Μια κανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύστημα (6.119) συμβιβαστό είναι η παρακάτω :

$$\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} \{ A(s) / (s^{q_1-1} I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \} = \text{rank}_{\mathbb{R}(s)} \{ A(s) \} \quad (6.124)$$

Η φυσική ερμηνεία της συνθήκης (6.124) είναι ότι ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  είναι ο ίδιος με αυτόν που παράγεται από τις στήλες του  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και το διάνυσμα των αρχικών συνθηκών  $(s^{q_1-1} I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-)$ . Συνεπώς θα μπορούσαμε να θέσουμε ως ισοδύναμη συνθήκη της συνθήκης (6.124) την ταύτιση των κάθετων χώρων των

χώρων που παράγονται από τις στήλες των πινάκων  $[A(s) / (s^{q_1-1} I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-)]$  και  $[A(s)]$ . Η ισοδύναμη αυτή συνθήκη εκφράζεται διαμέσου των σχέσεων (6.117) και (6.121). Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η ιδιόμορφη ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) να έχει λύση είναι ότι η συνθήκη (6.121) πρέπει να ικανοποιείται ή ισοδύναμα οι συντελεστές των δυνάμεων του  $s$  στην συνθήκη (6.121) πρέπει να είναι ίσοι με μηδέν ή ισοδύναμα οι  $\eta_{r+1} + \eta_{r+2} + \dots + \eta_p$  συνθήκες μεταξύ των αρχικών συνθηκών στην σχέση (6.123) θα πρέπει να ικανοποιούνται. Το ερώτημα που τίθεται είναι εάν οι συνθήκες (6.123) είναι γραμμικά ανεξάρτητες; Θα ήταν αρκετό να δείξουμε ότι όλες οι γραμμές που προκύπτουν από τους πίνακες

$$Q_i = \begin{bmatrix} v_{i\eta_i} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i\eta_i-1} & v_{i\eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & v_{i\eta_i} \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{iq_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{q_1-1} \\ 0 & A_0 & \dots & A_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{bmatrix} \quad i=r+1, \dots, p \quad (6.125)$$

είναι διάφορες του μηδενικού διανύσματος και γραμμικά ανεξάρτητες.

(α) Οι γραμμές που προκύπτουν από τους πίνακες (6.125) είναι διάφορες του μηδενός.

Εστω μια από τις γραμμές των πινάκων (6.125) είναι η εξής

$$v^{ij} = [v_{i,j} A_0, v_{i,j} A_1 + v_{i,j+1} A_0, \dots, v_{i,j} A_{q_1-1} + v_{i,j+1} A_{q_1-2} + \dots + v_{i,\eta_i} A_{q_1-\eta_i-1}] \quad (6.126)$$

Εχουμε ότι  $v^{ij} \neq 0$  διαφορετικά θα έπρεπε να ισχύουν οι εξής συνθήκες :

$$\begin{aligned} v_{i,j} A_0 &= 0 \\ v_{i,j} A_1 + v_{i,j+1} A_0 &= 0 \\ \dots & \\ v_{i,j} A_{q_1-1} + v_{i,j+1} A_{q_1-2} + \dots + v_{i,\eta_i} A_{q_1-\eta_i-1} &= 0 \end{aligned} \quad (6.127)$$

οι οποίες σε συνδιασμό με την σχέση (6.117) μας δίνουν ότι

$$(v_{i,j} + v_{i,j+1}s + \dots + v_{i,\eta_i} s^{\eta_i-j}) A(s) = 0 \quad (6.128)$$

Το πολυωνυμικό διάνυσμα

$$v^{ij}(s) = v_{i,j} + v_{i,j+1}s + \dots + v_{i,\eta_i} s^{\eta_i-j} \quad (6.129)$$

λοιπόν ως  $\mathbb{R}(s)$ -γραμμικό ανεξάρτητο του διανύσματος  $v_i(s)$  (λόγω του ότι έχει βαθμό μικρότερο του  $\eta_i$  επειδή το  $j$  παίρνει τιμές θετικές), θα πρέπει να ανήκει στον χώρο που παράγουν τα πολυωνυμικά διανύσματα  $v_j(s)$  με  $j \neq i$  (δες (6.116)) δηλαδή από Forney (Main Theorem, pp.495, 1975) θα πρέπει να υπάρχουν πολυώνυμα  $a_i(s) = a_{i0} + a_{i1}s + \dots + a_{ik_i}s^{k_i}$  τέτοια ώστε :

$$v^{ij}(s) = \sum_{\substack{j=r+1 \\ j \neq i}}^p a_j(s) v_j(s) \Leftrightarrow \quad (6.130)$$

$$v_{i,j} + v_{i,j+1}s + \dots + v_{i,\eta_i} s^{\eta_i-j} = \sum_{\substack{j=r+1 \\ j \neq i}}^m (a_{j0} + a_{j1}s + \dots + a_{jk_j}s^{k_j}) (v_{j0} + v_{j1}s + \dots + v_{j\eta_j} s^{\eta_j})$$

Η καινοποίηση της συνθήκης (6.130) έχει ως αποτέλεσμα (εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγίστων δυνάμεων του  $s$ ) τα διανύσματα  $v_{j,\eta_j}$  με  $j=r+1, \dots, p$  να είναι γραμμικά εξαρτημένα, το οποίο συμπέρασμα δεν είναι αληθές λόγω του ότι η βάση του αριστερά μηδενικού χώρου του  $A(s)$  που επιλέξαμε είναι ελάχιστη και συνεπώς τα διανύσματα  $v_{j,\eta_j}$  με  $j=r+1, \dots, p$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Ο πίνακας  $[v_{r+1}(s)^T, v_{r+2}(s)^T, \dots, v_p(s)^T]^T$  είναι καινικός κατά γραμμές). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο βάση της υπόθεσης ότι το διάνυσμα (6.126) είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα. Αρα αποδείξαμε ότι η τυχαία γραμμή των πινάκων (6.125) είναι διάφορη του μηδενός.

(β) Οι γραμμές που προκύπτουν από τους πίνακες (6.125) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θα δείξουμε ότι οι γραμμές δύο τυχαίων πινάκων της μορφής (6.125) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορεί κάποιος να δείξει ότι οι γραμμές των  $p-1$  πινάκων της μορφής (6.125) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Εστω λοιπόν οι πίνακες  $Q_i$  και  $Q_j$  και έστω επίσης  $\eta_i \leq \eta_j$ . Οι γραμμές των πινάκων  $Q_f$  για  $f=i, j$  θα έχουν την εξής μορφή :

$$\begin{aligned}
 \underline{1^\eta \text{ γραμμή}} & \quad [v_{f,\eta_f} A_0, v_{f,\eta_f} A_1, v_{f,\eta_f} A_2, \dots, v_{f,\eta_f} A_{q_1-1}] \\
 \underline{2^\eta \text{ γραμμή}} & \quad [v_{f,\eta_f-1} A_0, v_{f,\eta_f-1} A_1 + v_{f,\eta_f} A_0, v_{f,\eta_f-1} A_2 + v_{f,\eta_f} A_1, \dots, v_{f,\eta_f-1} A_{q_1-1} + v_{f,\eta_f} A_{q_1-2}] \\
 \underline{3^\eta \text{ γραμμή}} & \quad [v_{f,\eta_f-2} A_0, v_{f,\eta_f-2} A_1 + v_{f,\eta_f-1} A_0, v_{f,\eta_f-2} A_2 + v_{f,\eta_f-1} A_1 + v_{f,\eta_f} A_0, \dots, \\
 & \quad , v_{f,\eta_f-2} A_{q_1-1} + v_{f,\eta_f-1} A_{q_1-2} + v_{f,\eta_f} A_{q_1-3}] \\
 & \quad \dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{6.131}$$

$\eta_f$  γραμμή

$$[v_{f,1} A_0, v_{f,1} A_1 + v_{f,2} A_0, v_{f,1} A_2 + v_{f,2} A_1 + v_{f,3} A_0, \dots, v_{f,1} A_{q_1-1} + v_{f,2} A_{q_1-2} + \dots + v_{f,q_1} A_0]$$

Θεωρείστε τώρα τον γραμμικό συνδιασμό των γραμμών των πινάκων  $Q_i$  και  $Q_j$  να είναι ίσος με μηδέν δηλ. έστω πραγματικοί αριθμοί  $\lambda_{ab}$  τέτοιοι ώστε :

$$\begin{aligned}
 & \lambda_{1i} [v_{i,\eta_i} A_0, v_{i,\eta_i} A_1, v_{i,\eta_i} A_2, \dots, v_{i,\eta_i} A_{q_1-1}] + \\
 & + \lambda_{1j} [v_{j,\eta_j} A_0, v_{j,\eta_j} A_1, v_{j,\eta_j} A_2, \dots, v_{j,\eta_j} A_{q_1-1}] + \\
 & + \lambda_{2i} [v_{i,\eta_i-1} A_0, v_{i,\eta_i-1} A_1 + v_{i,\eta_i} A_0, v_{i,\eta_i-1} A_2 + v_{i,\eta_i} A_1, \dots, v_{i,\eta_i-1} A_{q_1-1} + v_{i,\eta_i} A_{q_1-2}] + \\
 & + \lambda_{2j} [v_{j,\eta_j-1} A_0, v_{j,\eta_j-1} A_1 + v_{j,\eta_j} A_0, v_{j,\eta_j-1} A_2 + v_{j,\eta_j} A_1, \dots, v_{j,\eta_j-1} A_{q_1-1} + v_{j,\eta_j} A_{q_1-2}] + \\
 & + \dots\dots\dots + \\
 & + \lambda_{\eta_i,i} [v_{i,1} A_0, v_{i,1} A_1 + v_{i,2} A_0, v_{i,1} A_2 + v_{i,2} A_1 + v_{i,3} A_0, \dots, \\
 & , v_{i,1} A_{q_1-1} + v_{i,2} A_{q_1-2} + \dots + v_{i,q_1} A_0] + \dots\dots\dots + \\
 & + \lambda_{\eta_j,j} [v_{j,1} A_0, v_{j,1} A_1 + v_{j,2} A_0, v_{j,1} A_2 + v_{j,2} A_1 + v_{j,3} A_0, \dots, \\
 & , v_{j,1} A_{q_1-1} + v_{j,2} A_{q_1-2} + \dots + v_{j,q_1} A_0] = 0
 \end{aligned} \tag{6.132}$$

ή ισοδύναμα

$$\left[ \sum_{f=i,j} \left[ \sum_{k=1}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f,\eta_f+1-k} \right] A_0, \sum_{f=i,j} \left[ \sum_{k=1}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f,\eta_f+1-k} \right] A_1 + \sum_{f=i,j} \left[ \sum_{k=2}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f,\eta_f+2-k} \right] A_0, \right. \\ \left. \dots, \sum_{f=i,j} \left[ \sum_{k=1}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f,\eta_f+1-k} \right] A_{q_1-1} + \sum_{f=i,j} \left[ \sum_{k=2}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f,\eta_f+2-k} \right] A_{q_1-2} + \dots \right] = 0 \quad (6.133)$$

Η σχέση (6.133) σε συνδιασμό με την σχέση (6.117) και το γεγονός ότι  $\eta_i \leq \eta_j$  μας δίνουν ότι

$$\left[ \sum_{f=i,j} \left[ \sum_{k=1}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f,\eta_f+1-k} \right] + \sum_{f=i,j} \left[ \sum_{k=2}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f,\eta_f+2-k} \right] s + \dots + (\lambda_{\eta_i,i} v_{i,\eta_i} + \right. \\ \left. + \sum_{k=\eta_i}^{\eta_j} \lambda_{kj} v_{j,\eta_j+\eta_i-k}) s^{\eta_i-1} + \dots + \lambda_{\eta_j,j} v_{j,\eta_j} s^{\eta_j-1} \right] A(s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$v(s) A(s) = 0 \quad (6.134)$$

Το πολυωνυμικό διάνυσμα  $v(s)$  εφόσον έχει βαθμό μικρότερο του  $\eta_j$  θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο του διανύσματος  $v_j(s)$  και θα ανήκει στον αριστερό μηδενικό χώρο του  $A(s)$  που παράγεται από τον γραμμικό συνδιασμό των πολυωνυμικών διανυσμάτων  $v_f(s)$   $f=r+1, \dots, j-1, j+1, \dots, p$ :

$$v(s) = \sum_{\substack{f=r+1 \\ f \neq j}}^p a_f(s) v_f(s) \Leftrightarrow \quad (6.135)$$

$$v(s) = \sum_{\substack{f=r+1 \\ f \neq j}}^p (a_{f0} + a_{f1}s + \dots + a_{fk_f} s^{k_f}) (v_{f0} + v_{f1}s + \dots + v_{f\eta_f} s^{\eta_f})$$

Η καινοποίηση της συνθήκης (6.135) έχει ως αποτέλεσμα (εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγίστων δυνάμεων του  $s$ ) τα διάνυσματα  $\lambda_{\eta_j, j} \cdot v_{j, \eta_j}$  και  $a_{f, \eta_j - \eta_f - 1} \cdot v_{f, \eta_f}$  με  $f=r+1, \dots, j-1, j+1, \dots, p$  να είναι γραμμικά εξαρτημένα, το οποίο συμπέρασμα είναι αληθές εαν  $\lambda_{\eta_j, j} = a_{f, \eta_j - \eta_f - 1} = 0$  λόγω του ότι η βάση του αριστερά μηδενικού χώρου του  $A(s)$  που επιλέξαμε είναι ελάχιστη και συνεπώς τα διανύσματα  $v_{f, \eta_f}$  με  $f=r+1, \dots, p$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα (ο πίνακας  $[v_{r+1}(s)^T, v_{r+2}(s)^T, \dots, v_p(s)^T]^T$  είναι καινικός κατά γραμμές). Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί  $\lambda_{\eta_{i+1}, j}, \lambda_{\eta_{i+2}, j}, \dots, \lambda_{\eta_{j-1}, j}$  είναι όλοι ίσοι με μηδέν. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πολυωνυμικό διάνυσμα  $v(s)$  έχει την εξής μορφή :

$$v(s) = \left[ \sum_{f=i, j} \left[ \sum_{k=1}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f, \eta_f + 1 - k} \right] + \sum_{f=i, j} \left[ \sum_{k=2}^{\eta_f} \lambda_{kf} v_{f, \eta_f + 2 - k} \right] s + \dots + \right. \\ \left. + (\lambda_{\eta_i, i} v_{i, \eta_i} + \lambda_{\eta_i, j} v_{j, \eta_j}) s^{\eta_i - 1} \right] \quad (6.136)$$

Το πολυωνυμικό διάνυσμα  $v(s)$  εφόσον έχει βαθμό μικρότερο του  $\eta_i$  (και συνεπώς και του  $\eta_j$ ) θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο των διανυσμάτων  $v_i(s)$  και  $v_j(s)$  και συνεπώς θα ανήκει στον αριστερό μηδενικό χώρο του  $A(s)$  που παράγεται από τα πολυωνυμικά διανύσματα  $v_f(s)$   $f=r+1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, p$  :

$$v(s) = \sum_{\substack{f=r+1 \\ f \neq i, j}}^p a_f(s) v_f(s) \Leftrightarrow \quad (6.137)$$

$$v(s) = \sum_{\substack{f=r+1 \\ f \neq i, j}}^p (a_{f0} + a_{f1}s + \dots + a_{fk_f} s^{k_f}) (v_{f0} + v_{f1}s + \dots + v_{f\eta_f} s^{\eta_f})$$



Η ικανοποίηση της συνθήκης (6.137) έχει ως αποτέλεσμα (εξισώνοντας τους συντελεστές των μεγίστων δυνάμεων του  $s$ ) τα διάνυσματα  $\lambda_{\eta_i, i} \cdot v_{i, \eta_i}$ ,  $\lambda_{\eta_i, j} \cdot v_{j, \eta_j}$  και  $a_{f, \eta_i - \eta_f - 1} \cdot v_{f, \eta_f}$  με  $f = \tau + 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, j - 1, j + 1, \dots, p$  να είναι γραμμικά εξαρτημένα, το οποίο συμπέρασμα είναι αληθές εαν  $\lambda_{\eta_i, i} = \lambda_{\eta_i, j} = a_{f, \eta_i - \eta_f - 1} = 0$  λόγω του ότι η βάση του αριστερά μηδενικού χώρου του  $A(s)$  που επιλέξαμε είναι ελάχιστη και συνεπώς τα διάνυσματα  $v_{f, \eta_f}$  με  $f = \tau + 1, \dots, p$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι όλοι οι συντελεστές  $\lambda_{ab}$  είναι ίσοι με μηδέν. Οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι γραμμές των πινάκων  $Q_i$  και  $Q_j$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι οι γραμμές των πινάκων  $Q_i$   $i = \tau + 1, \dots, p$  εκτός του ότι είναι διάφορες του μηδενός είναι και γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους, γεγονός που αποδεικνύει ότι οι συνθήκες (6.123) μεταξύ των αρχικών συνθηκών του συστήματος (6.1) είναι γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους.  $\square$

**Ορισμός 6.31** (Karampetakis) Ο χώρος  $H_{i0}$  των αρχικών συνθηκών ο οποίος ορίζεται ως

$$H_{i0} = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_i-1)}(0-) \end{array} \right] \middle| \left[ \begin{array}{cccc} v_{i, \eta_i} & 0 & \dots & 0 \\ v_{i, \eta_i-1} & v_{i, \eta_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & v_{i, \eta_i} \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{iq} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} A_0 & A_1 & \dots & A_{q_i-1} \\ 0 & A_0 & \dots & A_{q_i-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_i-1)}(0-) \end{array} \right] = 0 \right\}$$

$$i = \tau + 1, \dots, p \quad (6.138)$$

ορίζεται ως ο χώρος των επιτρεπτών αρχικών συνθηκών (*admissible initial conditions*) του συστήματος (6.1).  $\square$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση που ο πίνακας  $A(s)$  είναι τετράγωνος με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, τότε το  $H_{i0}$  είναι το σύνολο όλων των αρχικών συνθηκών του συστήματος (6.1), λόγω του ότι ο  $A(s)$  δεν έχει αριστερό μηδενικό χώρο.

**Παράδειγμα 6.32** Θεωρείστε την ομογενή διαφορική εξίσωση του παραδείγματος 6.9

$$A(\rho) \beta(t) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho & \rho^4 & \rho^2 + \rho \\ 1 & \rho^3 & \rho + 1 \\ 0 & \rho + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1} \quad (\text{E.1})$$

Υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες  $U_L(s)$  και  $U_R(s)$  τέτοιοι ώστε

$$U_L(s) A(s) U_R(s) = S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & s^4 & s^2 + s \\ 1 & s^3 & s + 1 \\ 0 & s + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s^3 & -1 - s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & s^4 & s^2 + s \\ 1 & s^3 & s + 1 \\ 0 & s + 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s^3 & 1 + s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Από την σχέση (E.2) έχουμε ότι

$$[1 \ -s \ 0] \begin{bmatrix} s & s^4 & s^2 + s \\ 1 & s^3 & s + 1 \\ 0 & s + 1 & 0 \end{bmatrix} = 0_{1 \times 3}$$

όπου το πολυωνυμικό διάνυσμα

$$v_{31}(s) = [1 \ -s \ 0] = [1 \ 0 \ 0] + [0 \ -1 \ 0]s =: v_{30} + v_{31}s \in \mathbb{R}[s]^{1 \times 3}$$

είναι η τρίτη γραμμή του πίνακα  $U_L(s)$  και αποτελεί μια βάση του αριστερά μηδενικού χώρου του πίνακα  $A(s)$ . Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει το σύστημα (E.1)

λύση είναι από το θεώρημα 6.30 να ικανοποιούνται οι παρακάτω  $\eta_3=1$  συνθήκες

$$[v_{31} \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 \\ 0 & 0 & A_0 & A_1 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[v_{31}A_0 \ v_{31}A_1 \ v_{31}A_2 \ v_{31}A_3] \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$[[0 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [0 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad [0 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [0 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}] \times \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = 0$$

$$[-1 \ 0 \ -1 \ | \ 0 \ 0 \ -1 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ 0 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\beta_1(0-) - \beta_3(0-) - \beta_3^{(1)}(0-) - \beta_2^{(3)}(0-) = 0$$

Άρα ο χώρος των επιτρεπτών αρχικών συνθηκών του συστήματος (E.1) είναι ο εξής :

$$H_{i0} = \{[\beta(0-)^T, \beta^{(1)}(0-)^T, \beta^{(2)}(0-)^T, \beta^{(3)}(0-)^T]^T \mid \beta_1(0-) + \beta_3(0-) + \beta_3^{(1)}(0-) + \beta_2^{(3)}(0-) = 0\}$$

□

### 6.6 Ο παραμετρικός χώρος λύσεων μιας ιδίωμορφης ομογενούς εξίσωσης με συντελεστές πίνακες.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 6.5 οι ιδίωμορφες ομογενείς διαφορικές εξισώσεις δεν έχουν πάντα λύση. Αναλύσαμε ότι ένας σημαντικός παράγοντας που καθορίζει κυριολεκτικά την περιέργη αυτή συμπεριφορά είναι η αριστερή μηδενική δομή του πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Μια επίσης αλγεβρική ιδιότητα που διαχωρίζει τους ιδίωμορφους

πολυωνυμικούς πίνακες από τους καινουργίους δηλ. τους τετράγωνους και αντιστρέψιμους πίνακες, είναι η δεξιά μηδενική δομή τους. Είδαμε στο κεφάλαιο 6.4 ότι η δομή αυτή παίζει καθοριστικό ρόλο στην απόκριση των ιδιόμορφων ομογενών διαφορικών εξισώσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε ότι η δεξιά μηδενική δομή του  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  καθορίζει την μοναδικότητα των αποκρίσεων του συστήματος (6.1).

Θεωρείστε την ιδιόμορφη ομογενή διαφορική εξίσωση (6.1) όπου  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r$  και έστω

$$\{\ddot{u}_{r+1}(s), \ddot{u}_{r+2}(s), \dots, \ddot{u}_m(s)\} \quad (6.139)$$

η δεξιά ελάχιστη βάση του  $A(s)$  προδ.

$$A(s) \ddot{u}_i(s) = 0 \quad i=r+1, \dots, m \quad (6.140)$$

την οποία δημιουργήσαμε στο κεφάλαιο 6.4. Θεωρείστε τους μετασχηματισμούς Laplace της ιδιόμορφης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1) :

$$\begin{aligned} A(s)\beta(s) &= [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} \\ &:= (s^{q_1-1}I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \end{aligned} \quad (6.141)$$

Είναι εύκολο να διατυπωθεί από τις σχέσεις (6.140) και (6.141) η παρακάτω :

**Πρόταση 6.33** Η ιδιόμορφη ομογενής διαφορική εξίσωση (6.1) με αρχικές συνθήκες :

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} \in \text{Kernel} \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \quad (6.142)$$

έχει ως λύση την :

$$\beta(t) = \int_0^t \ddot{u}_{r+1}(\tau) z_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t \ddot{u}_{r+2}(\tau) z_2(t-\tau) d\tau + \dots + \int_0^t \ddot{u}_m(\tau) z_{m-r}(t-\tau) d\tau \quad (6.143)$$

όπου  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_{m-r}(t)$  είναι αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις ( $z_i(t)=0$  για  $t < 0$ ) και  $\ddot{u}_i(t) = \mathcal{L}[\ddot{u}_i(s)]$   $i=r+1, \dots, m$ .

**Απόδειξη** Εφόσον η συνθήκη (6.142) ικανοποιείται άρα η σχέση (6.141) παίρνει την μορφή :

$$A(s) \beta(s) = 0 \quad (6.144)$$

και συνεπώς η λύση  $\beta(s)$  ανήκει στον δεξιό μηδενικό χώρο του  $A(s)$  και γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της ελάχιστης βάσης του :

$$\beta(s) = \ddot{u}_{r+1}(s) z_1(s) + \ddot{u}_{r+2}(s) z_2(s) + \dots + \ddot{u}_m(s) z_{m-r}(s) \quad (6.145)$$

όπου  $z_1(s), z_2(s), \dots, z_{m-r}(s)$  αυθαίρετες ρητές συναρτήσεις. Εάν πάρουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (6.145) παίρνουμε την λύση (6.143).  $\square$

Στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούσαν την σχέση (6.142) και ο πίνακας  $A(s)$  ήταν τετράγωνος και αντιστρέψιμος, δεν έχουμε δεξιό μηδενικό χώρο και η μόνη λύση του συστήματος είναι η μηδενική. Μια απόρροια του θεωρήματος 6.30 και της πρότασης 6.33 είναι το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης μοναδικής λύσης.

**Θεώρημα 6.34** Η ιδίμορφη ομογενή διαφορική εξίσωση (6.1) έχει μοναδική λύση εάν και μόνο εάν οι δύο παρακάτω συνθήκες ικανοποιούνται :

- (i)  $p \geq m$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = m$  όπου  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$
- (ii)  $\tilde{\beta}(0-) = [\beta(0-)^T, \beta^{(1)}(0-)^T, \dots, \beta^{(k-1)}(0-)^T]^T \in H_{i_0}$

**Απόδειξη** Μια αναγκαία και ικανή συνθήκη ύπαρξης λύσης της ιδιόμορφου ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1) όπως έχουμε δει στο θεώρημα 6.30 είναι η συνθήκη (ii). Εστω τώρα ότι η ιδιόμορφη διαφορική εξίσωση (6.1) δεν έχει λύση μοναδική αλλά έχει δύο λύσεις  $\beta_1(t)$  και  $\beta_2(t)$  ( $\beta_1(t) \neq \beta_2(t)$ ) κάτω από τις ίδιες αρχικές συνθήκες  $\tilde{\beta}(0-)$  ή ισοδύναμα έχουμε

$$A(s)\beta_1(s) = (s^{q_1-1}I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \quad (6.146)$$

και

$$A(s)\beta_2(s) = (s^{q_1-1}I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \quad (6.147)$$

Εαν εξισώσουμε τα πρώτα μέλη των σχέσεων (6.146) και (6.147) λόγω του ότι τα δεύτερα μέλη είναι ίσα θα έχουμε ότι :

$$A(s)\beta_1(s) = A(s)\beta_2(s) \Leftrightarrow A(s)(\beta_1(s) - \beta_2(s)) = 0 \quad (6.148)$$

και συνεπώς θα πρέπει η διαφορά των  $\beta_1(s)$  και  $\beta_2(s)$  να ανήκει στο δεξιό μηδενικό χώρο του πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Οι δύο αυτές λύσεις θα ταυτίζονται εαν και μόνο εαν ο δεξιός μηδενικός χώρος του  $A(s)$  είναι ο μηδενικός χώρος πρδ.  $\{0\}$ , ή ισοδύναμα εαν και μόνο εαν  $p \geq m$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = m$ . Παρατηρούμε δηλαδή ότι η συνθήκη (ii) εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης ενώ η συνθήκη (i) εξασφαλίζει την μοναδικότητα της.  $\square$

**Σημείωση 6.35** Μια εύλογη παρατήρηση που προκύπτει από την συνθήκη μοναδικότητας του θεωρήματος 6.34 είναι ότι στην περίπτωση που ο δεξιός μηδενικός χώρος του  $A(s)$  δεν είναι ο μηδενικός και  $\beta_0(t)$  είναι μια λύση της ιδιόμορφης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1) κάτω από αρχικές συνθήκες  $\tilde{\beta}(0-)$  τότε και η

$$\beta(t) = \beta_0(t) + \int_0^t \underline{\ddot{u}}_{-r+1}(\tau) z_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t \underline{\ddot{u}}_{-r+2}(\tau) z_2(t-\tau) d\tau + \dots + \int_0^t \underline{\ddot{u}}_m(\tau) z_{m-r}(t-\tau) d\tau \quad (6.149)$$

είναι επίσης λύση του ίδιου συστήματος, όπου  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_{m-r}(t)$  αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις και  $\{\ddot{u}_{r+1}(s) := \mathcal{L}[\ddot{u}_{r+1}(t)], \ddot{u}_{r+2}(s) := \mathcal{L}[\ddot{u}_{r+2}(t)], \dots, \ddot{u}_m(s) := \mathcal{L}[\ddot{u}_m(t)]\}$  μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Αυτό φαίνεται καθαρά στα παραδείγματα 6.15, 6.22 και 6.28.  $\square$

Εστω τώρα

$$Z = \{x(t) \mid x(t) = \int_0^t \ddot{u}_{r+1}(\tau) z_1(t-\tau) d\tau + \int_0^t \ddot{u}_{r+2}(\tau) z_2(t-\tau) d\tau + \dots + \int_0^t \ddot{u}_m(\tau) z_{m-r}(t-\tau) d\tau\} \quad (6.150)$$

ο χώρος λύσεων της ιδίμορφου ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1) που δημιουργείται κάτω από αρχικές συνθήκες της μορφής (6.142). Ορίζουμε τους παρακάτω χώρους λύσεων :

$$B^{\mathbb{C}} = X^{\mathbb{C}} \oplus Z = \{\beta(t) \mid \beta(t) = x_1(t) + x_2(t) \text{ όπου } x_1(t) \in X^{\mathbb{C}} \text{ και } x_2(t) \in Z\} \quad (6.151)$$

$$B^{\infty} = X^{\infty} \oplus Z = \{\beta(t) \mid \beta(t) = x_1(t) + x_2(t) \text{ όπου } x_1(t) \in X^{\infty} \text{ και } x_2(t) \in Z\} \quad (6.152)$$

$$B^{\epsilon} = X^{\epsilon} \oplus Z = \{\beta(t) \mid \beta(t) = x_1(t) + x_2(t) \text{ όπου } x_1(t) \in X^{\epsilon} \text{ και } x_2(t) \in Z\} \quad (6.153)$$

όπου  $X^{\mathbb{C}}, X^{\infty}$  και  $X^{\epsilon}$  είναι οι διανυσματικοί χώροι λύσεων που οφείλονται αντίστοιχα στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ , στην μηδενική δομή στο  $s = \infty$  και στην δεξιά μηδενική δομή του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$  (δες κεφάλαια 6.2, 6.3 και 6.4). Είναι φανερό μετά από την σημείωση 6.35 ότι οι χώροι  $B^{\mathbb{C}}, B^{\infty}$  και  $B^{\epsilon}$  είναι ουσιαστικά τα σύνολα λύσεων της ιδίμορφης ομογενούς εξίσωσης (6.1) που οφείλονται αντίστοιχα στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ , στην μηδενική δομή στο  $s = \infty$  και στην δεξιά μηδενική δομή του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$ .

Ένα ουσιαστικό ερώτημα που γεννιέται είναι εάν το σύνολο λύσεων της ιδίμορφης διαφορικής εξίσωσης (6.1) αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο και αν ναι ποιά είναι η διάσταση αυτού του χώρου. Εστω

$$B = \{\text{χώρος λύσεων } \beta(t) \text{ της ιδίμορφης διαφορικής εξίσωσης (6.1)}\} \quad (6.154)$$

Ορίζουμε την παρακάτω διμελή σχέση  $\mathbb{R}\mathcal{B} \times \mathcal{B}$  μεταξύ των λύσεων της ιδιόμορφης διαφορικής εξίσωσης (6.1) :

$$\mathbb{R}(\beta_1(t), \beta_2(t)) := \{ (\beta_1(t), \beta_2(t)) \mid \beta_1(t) - \beta_2(t) \in \mathcal{Z} \text{ όπου } \beta_1(t), \beta_2(t) \in \mathcal{B} \} \quad (6.155)$$

**Πρόταση 6.36** Η διμελής σχέση που ορίζεται βάσει των λύσεων της ιδιόμορφης διαφορικής εξίσωσης (6.1) στην σχέση (6.155) είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

**Απόδειξη** Είναι φανερό ότι η παραπάνω διμελής σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας λόγω του ότι ισχύουν οι :

- (i) **Ανακλαστική ιδιότητα.** Το στοιχείο  $(\beta_1(t), \beta_1(t))$  ανήκει στο υποσύνολο  $\mathbb{R}$  αφού  $\beta_1(t) - \beta_1(t) = 0 \in \mathcal{Z}$ .
- (ii) **Συμμετρική ιδιότητα.** Εστω  $(\beta_1(t), \beta_2(t)) \in \mathbb{R}$  τότε  $\beta_1(t) - \beta_2(t) \in \mathcal{Z}$  και συνεπώς  $-(\beta_1(t) - \beta_2(t)) = \beta_2(t) - \beta_1(t) \in \mathcal{Z}$  αφού ο  $\mathcal{Z}$  είναι διανυσματικός χώρος και συνεπώς  $(\beta_2(t), \beta_1(t)) \in \mathbb{R}$ .
- (iii) **Μεταβατική ιδιότητα.** Εστω  $(\beta_1(t), \beta_2(t)) \in \mathbb{R}$  και  $(\beta_2(t), \beta_3(t)) \in \mathbb{R}$  τότε θα έχουμε ότι  $\beta_1(t) - \beta_2(t) = x_1(t) \in \mathcal{Z}$  και  $\beta_2(t) - \beta_3(t) = x_2(t) \in \mathcal{Z}$  και συνεπώς

$$(\beta_1(t) - \beta_2(t)) + (\beta_2(t) - \beta_3(t)) = (\beta_1(t) - \beta_3(t)) = x_1(t) + x_2(t) \in \mathcal{Z} \quad (6.156)$$

επειδή ο χώρος  $\mathcal{Z}$  είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ .

Άρα η διμελής σχέση (6.155) ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας. □

Ονομάζουμε **κλάση ισοδυναμίας** του στοιχείου  $\beta(t) \in \mathcal{B}$ , και την συμβολίζουμε με  $[\beta(t)]$ , το σύνολο όλων των στοιχείων του  $\mathcal{B}$  που είναι ισοδύναμα με το στοιχείο  $\beta(t)$  δηλαδή :

$$\begin{aligned} [\beta(t)] &:= \{ \beta_1(t) \in \mathcal{B} \mid (\beta(t), \beta_1(t)) \in \mathbb{R} \} = \beta(t) \oplus \mathcal{Z} = \\ &= \{ \beta(t) + x(t) \text{ όπου } \beta(t) \in \mathcal{B} \text{ και } x(t) \in \mathcal{Z} \} \end{aligned} \quad (6.157)$$



Παρατηρούμε δηλαδή ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου  $\beta(t)$  μας δίνει την λύση της ιδιόμορφης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1) κάτω από ορισμένες αρχικές συνθήκες  $\tilde{\beta}(0-)$ . Στην περίπτωση που ο πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  δεν έχει δεξιά μηδενικό χώρο παρατηρούμε ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας αποτελείται από ένα μοναδικό στοιχείο σε αντίθεση με την ιδιόμορφη περίπτωση όπου έχουμε απειρία στοιχείων σε μια συγκεκριμένη κλάση ισοδυναμίας. Ο συνολικός χώρος  $\mathcal{B}$ , των λύσεων της ιδιόμορφης διαφορικής εξίσωσης (6.1) διαμερίζεται από τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται στην σχέση (6.157). Ορίζουμε τώρα μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσεως (6.157) μια πρόσθεση

$$\begin{aligned} [\beta_1(t)] + [\beta_2(t)] &= (\beta_1(t) + \beta_2(t)) \oplus z = \\ &= \{ \beta_1(t) + \beta_2(t) + x(t) \text{ όπου } \beta_1(t) \in \mathcal{B}, \beta_2(t) \in \mathcal{B} \text{ και } x(t) \in \mathcal{Z} \} \end{aligned} \quad (6.158)$$

και έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό :

$$\begin{aligned} \lambda [\beta(t)] &= \lambda \beta(t) \oplus z = \\ &= \{ \lambda \beta(t) + x(t) \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}, \beta(t) \in \mathcal{B} \text{ και } x(t) \in \mathcal{Z} \} \end{aligned} \quad (6.159)$$

Οι δύο αυτές πράξεις ικανοποιούν τα επόμενα αξιώματα :

$$(i) \quad [\beta_1(t)] + ([\beta_2(t)] + [\beta_3(t)]) = ([\beta_1(t)] + [\beta_2(t)]) + [\beta_3(t)] \quad (6.160)$$

για κάθε  $[\beta_1(t)], [\beta_2(t)], [\beta_3(t)]$ .

(ii) Υπάρχει στοιχείο  $[0]$  που το ονομάζουμε μηδενικό και είναι τέτοιο ώστε :

$$[\beta(t)] + [0] = [\beta(t)] = [0] + [\beta(t)] \quad (6.161)$$

για κάθε  $[\beta(t)]$ . Είναι φανερό ότι το μηδενικό στοιχείο είναι το  $[0] = z$ .

(iii) Σε κάθε κλάση ισοδυναμίας  $[\beta(t)]$  αντιστοιχεί μια κλάση ισοδυναμίας  $-[\beta(t)]$

που ονομάζεται αντίθετη της  $[\beta(t)]$  και είναι τέτοια ώστε :

$$[\beta(t)] + (-[\beta(t)]) = [0] \quad (6.162)$$

για κάθε  $[\beta(t)]$ . Είναι φανερό ότι  $-[\beta(t)] = [-\beta(t)]$ .

$$(iv) \quad [\beta_1(t)] + [\beta_2(t)] = [\beta_2(t)] + [\beta_1(t)] \quad (6.163)$$

για κάθε  $[\beta_1(t)], [\beta_2(t)]$ .

$$(v) \quad 1 [\beta(t)] = [\beta(t)] \quad (6.164)$$

για κάθε  $[\beta(t)]$ , όπου 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του  $\mathbb{R}$ .

$$(vi) \quad \lambda (\mu [\beta(t)]) = (\lambda \cdot \mu) [\beta(t)] \quad (6.165)$$

για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $[\beta(t)]$ .

$$(vii) \quad (\lambda + \mu) [\beta(t)] = \lambda [\beta(t)] + \mu [\beta(t)] \quad (6.166)$$

για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $[\beta(t)]$ , λόγω του ότι ο χώρος  $\mathcal{B}$  είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα  $\mathbb{R}$ .

$$(viii) \quad \lambda ([\beta_1(t)] + [\beta_2(t)]) = \lambda [\beta_1(t)] + \lambda [\beta_2(t)] \quad (6.167)$$

για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $[\beta(t)]$ .

Βάσει της πληρότητας όλων των παραπάνω αξιωμάτων συμπεραίνουμε ότι :

**Πρόταση 6.37** Ο χώρος ο οποίος παράγεται από τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίστηκαν στην σχέση (6.157) είναι ένας διανυσματικός χώρος  $\hat{\mathcal{B}}$  και αυτός είναι όπως θα δούμε στην συνέχεια ο χώρος λύσεων της ιδίμορφης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1).  $\square$

**Θεώρημα 6.38** Εστω  $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r$ . Εάν  $\hat{\varepsilon}$  (δηλ.  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{r+1} + \varepsilon_{r+2} + \dots + \varepsilon_m$ ) και  $\hat{\eta}$  (δηλ.  $\hat{\eta} = \eta_{r+1} + \eta_{r+2} + \dots + \eta_p$ ) είναι το άρθροισμα των δεξιά και αριστερά αντίστοιχα ελαχίστων δεικτών του  $A(s)$  και  $n$  ( $n = \sum n_i$ ),  $\hat{q}$  ( $\hat{q} = \sum \hat{q}_i$ ) είναι αντίστοιχα το άρθροισμα των μηδενικών στο  $\mathbb{C}$  και στο  $s = \infty$  του  $A(s)$ , τότε :

$$\delta_M(A(s)) = n + \hat{q} + \hat{\varepsilon} + \hat{\eta} \quad (6.168) \quad \square$$

Θεωρείστε τώρα τον μετασχηματισμό Laplace της ιδίμορφης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (6.1)

$$\begin{aligned}
A(s)\beta(s) &= [s^{q_1-1}I_p, \dots, sI_p, I_p] \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \beta^{(q_1-1)}(0-) \end{bmatrix} \\
&:= (s^{q_1-1}I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-) \quad (6.169)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε στην σχέση (6.169) ότι το πλήθος των γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων  $\hat{a}(s) = (s^{q_1-1}I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-)$  και συνεπώς των ανεξάρτητων αποκρίσεων που θα μπορούσα να έχω είναι στο πλήθος (Pugh 1976)

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} A_{q_1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{q_1-1} & A_{q_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{q_1} \end{bmatrix} = \delta_M(A(s)) \stackrel{(6.168)}{=} n + \hat{q} + \hat{e} + \hat{\eta} \quad (6.170)$$

Είναι προφανές από το Θεώρημα 6.30 ότι ένα πλήθος  $\hat{\eta}$  γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων  $\hat{a}(s) = (s^{q_1-1}I_p) A_{q_1} \tilde{\beta}(0-)$  δεν οδηγούν σε λύση το ομογενή σύστημα (6.1) και συνεπώς το μέγιστο πλήθος γραμμικών ανεξαρτήτων αποκρίσεων που θα μπορούσα να έχω είναι  $n + \hat{q} + \hat{e}$ . Θα μου ήταν δηλαδή αρκετό να βρώ έναν χώρο λύσεων του ομογενούς συστήματος (6.1) που να αποτελεί διανυσματικό χώρο και να έχει διάσταση  $n + \hat{q} + \hat{e}$ . Την λύση σ' αυτό το πρόβλημα ερχόμαστε να δώσουμε παρακάτω :

Εστω οι παρακάτω χώροι :

$$\hat{B}^{\mathcal{L}} := \{[\beta(t)] \text{ όπου } \beta(t) \in B^{\mathcal{L}}\} = B^{\mathcal{L}}/\mathbb{R} \quad (6.171)$$

$$\hat{B}^{\omega} := \{[\beta(t)] \text{ όπου } \beta(t) \in B^{\omega}\} = B^{\omega}/\mathbb{R} \quad (6.172)$$

$$\hat{B}^{\epsilon} := \{[\beta(t)] \text{ όπου } \beta(t) \in B^{\epsilon}\} = B^{\epsilon}/\mathbb{R} \quad (6.173)$$

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω χώροι αποτελούν διαμερισμούς (quotient spaces) των συνόλων  $B^{\mathbb{C}}$ ,  $B^{\omega}$  και  $B^{\epsilon}$  και αποτελούν διανυσματικούς χώρους.

**Λήμμα 6.39** Εστω οι χώροι  $X^{\mathbb{C}}$ ,  $X^{\omega}$ ,  $X^{\epsilon}$  και  $Z$  που ορίστηκαν αντίστοιχα στα κεφάλαια 6.2, 6.3, 6.4 και 6.6. Θα έχουμε ότι :

- (α)  $X^{\mathbb{C}} \cap Z = \{0\}$ ,
- (β)  $X^{\omega} \cap Z = \{0\}$ ,
- (γ)  $X^{\epsilon} \cap Z = \{0\}$
- (δ)  $X^{\mathbb{C}} \cap X^{\omega} = \{0\}$ ,  $X^{\mathbb{C}} \cap X^{\epsilon} = \{0\}$ ,  $X^{\omega} \cap X^{\epsilon} = \{0\}$ .

**Απόδειξη**

(α)  $X^{\mathbb{C}} \cap Z = \{0\}$

Εστω  $U_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  και  $U_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  είναι αντιστρέψιμοι πίνακες (unimodular matrices) οι οποίοι αναγάγουν τον πίνακα  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  στην Smith μορφή  $S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$  η οποία έχει οριστεί στις σχέσεις (6.17) και (6.18)

$$U_L(s) A(s) U_R(s) = S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) \quad (6.174)$$

ή ισοδύναμα

$$A(s) U_R(s) = U_L(s)^{-1} S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) \quad (6.175)$$

Εστω  $U_R(s) = [u_1(s), u_2(s), \dots, u_r(s), u_{r+1}(s), \dots, u_m(s)] \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  όπου  $u_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$  με  $j \in m$ . Οπως είδαμε στις σχέσεις (6.89)–(6.91) υπάρχει πίνακας  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{(m-r) \times (m-r)}$  τέτοιος ώστε εάν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως (6.175) από δεξιά με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & U(s) \end{bmatrix} \quad (6.176)$$

να πάρουμε :

$$A(s) \tilde{U}_R(s) = U_L(s)^{-1} S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) \quad (6.177)$$

όπου

$$\tilde{U}_R(s) = [u_1(s), u_2(s), \dots, u_r(s) \mid \bar{u}_{r+1}(s), \dots, \bar{u}_m(s)] =: [\tilde{U}_{R1}(s) \quad \tilde{U}_{R2}(s)] \quad (6.178)$$

και ο πίνακας  $\tilde{U}_{R2}(s)$  να είναι κανονικός κατά στήλες ή αλλιώς οι στήλες  $\bar{u}_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$   $j \in \mathbf{m-r}$  του πίνακα  $\tilde{U}_{R2}(s)$  αποτελούν μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του  $A(s)$ . Έχουμε επίσης από τις σχέσεις (6.17) και (6.174) ότι οι στήλες  $u_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$   $j \in \mathbf{r}$  του πίνακα  $\tilde{U}_{R1}(s)$  ικανοποιούν τις σχέσεις

$$A(s) u_j(s) = v_j(s) f_j(s) \quad j=z, z+1, \dots, r \quad (6.179)$$

Θεωρείστε την σειρά Taylor του πολυωνυμικού διανύσματος  $u_j(s)$  γύρω από το σημείο  $s=\lambda_i$  όπου  $\lambda_i$  είναι ρίζα του  $f_j(s)$  πολ/τας  $\sigma_{ij}$

$$\begin{aligned} u_j(s) &= u_j(\lambda_i) + \frac{u_j^{(1)}(\lambda_i)}{1!} (s-\lambda_i) + \frac{u_j^{(2)}(\lambda_i)}{2!} (s-\lambda_i)^2 + \dots + \frac{u_j^{(\nu)}(\lambda_i)}{\nu!} (s-\lambda_i)^\nu \\ &= \beta_{j0}^i + \beta_{j1}^i (s-\lambda_i) + \beta_{j2}^i (s-\lambda_i)^2 + \dots + \beta_{j\nu}^i (s-\lambda_i)^\nu \end{aligned} \quad (6.180)$$

όπου  $\nu$  είναι ο βαθμός του πολυωνυμικού διανύσματος  $u_j(s)$ . Σύμφωνα με την σχέση (6.26) το πλήθος των λύσεων που αντιστοιχούν στην ρίζα  $\lambda_i$  πολ/τας  $\sigma_{ij}$  και απορρέουν από την στήλη  $u_j(s)$  του πίνακα  $\tilde{U}_{R1}(s)$  θα έχουν την εξής μορφή

$$\beta_{jq}^i(t) := \left[ \frac{t^{\sigma_{ij}-1-q}}{(\sigma_{ij}-1-q)!} \beta_{j0}^i + \frac{t^{\sigma_{ij}-2-q}}{(\sigma_{ij}-2-q)!} \beta_{j1}^i + \dots + \frac{t}{1!} \beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i + \beta_{j(\sigma_{ij}-1-q)}^i \right] e^{\lambda_i t} \quad q=0,1,\dots,\sigma_{ij}-1 \quad (6.181)$$

ή κάτω από μετασχηματισμούς Laplace

$$\tilde{\beta}_{jq}^i(s) := \left[ \frac{\beta_{j0}^i}{(s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q}} + \frac{\beta_{j1}^i}{(s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q-1}} + \dots + \frac{\beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i}{(s-\lambda_i)^2} + \frac{\beta_{j(\sigma_{ij}-1-q)}^i}{(s-\lambda_i)} \right] \quad q=0,1,\dots,\sigma_{ij}-1 \quad (6.182)$$

όπου  $\tilde{\beta}_{jq}^i(s) := \mathcal{L}[\beta_{jq}^i(t)]$ . Ας θεωρήσουμε ότι  $X^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$  και συνεπώς υπάρχουν ορισμένες λύσεις της μορφής (6.181) που ανήκουν στο σύνολο  $\mathbb{Z}$ . Τότε θα πρέπει ο μετασχηματισμός Laplace της λύσης (6.181) να ανήκει στον δεξιό μηδενικό χώρο του  $A(s)$  δηλ.

$$A(s) \left[ \frac{\beta_{j_0}^i}{(s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q}} + \frac{\beta_{j_1}^i}{(s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q-1}} + \dots + \frac{\beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i}{(s-\lambda_i)^2} + \frac{\beta_{j(\sigma_{ij}-1-q)}^i}{(s-\lambda_i)} \right] = 0 \quad (6.183)$$

ή ισοδύναμα αν πολλαπλασιάσουμε από δεξιά την σχέση (6.183) με  $(s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q}$  θα έχουμε

$$A(s) [\beta_{j_0}^i + \beta_{j_1}^i (s-\lambda_i) + \dots + \beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q-2} + \beta_{j(\sigma_{ij}-1-q)}^i (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q-1}] = 0 \quad (6.184)$$

Θα έχουμε δηλαδή ότι το πολυωνυμικό διάνυσμα

$$u(s) = \beta_{j_0}^i + \beta_{j_1}^i (s-\lambda_i) + \dots + \beta_{j(\sigma_{ij}-2-q)}^i (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q-2} + \beta_{j(\sigma_{ij}-1-q)}^i (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q-1} \quad (6.185)$$

ανήκει στον δεξιό μηδενικό χώρο του  $A(s)$  και συνεπώς από Forney (Main Theorem, pp.495, 1975) θα γράφεται ως πολυωνυμικός συνδιασμός των στηλών  $\bar{u}_j(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1}$  με  $j \in m-r$  δηλ.

$$u(s) = \sum_{j=r+1}^m a_j(s) \bar{u}_j(s) \quad \text{με } a_j(s) \in \mathbb{R}[s] \quad (6.186)$$

Θεωρήστε τώρα τον παρακάτω αντιστρέψιμο μετασχηματισμό στον αντιστρέψιμο πίνακα  $\tilde{U}_R(s)$ , ο οποίος έχει ως σκοπό να αφαιρέσει το πολυωνυμικό διάνυσμα  $u(s)$  από την στήλη  $u_j(s)$ :

$$\hat{U}_R(s) = \tilde{U}_R(s) \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ & & & 1_j & \dots & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & -a_{r+1}(s) & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -a_{r+2}(s) & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -a_m(s) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \quad (6.187)$$

Είναι φανερό ότι μετά από αυτόν τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό, βάση των σχέσεων (6.180), (6.186) και (6.187), η στήλη  $\hat{u}_j(s)$  του πίνακα  $\hat{U}_R(s)$  θα έχει την εξής μορφή:

$$\hat{u}_j(s) = \beta_{j(\sigma_{ij}-q)}^i (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q} + \beta_{j(\sigma_{ij}-q+1)}^i (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q+1} + \dots + \beta_{j\nu}^i (s-\lambda_i)^\nu \Leftrightarrow \quad (6.188)$$

$$\hat{u}_j(s) = (s-\lambda_i)^{\sigma_{ij}-q} [\beta_{j(\sigma_{ij}-q)}^i + \beta_{j(\sigma_{ij}-q+1)}^i (s-\lambda_i) + \dots + \beta_{j\nu}^i (s-\lambda_i)^{\nu-\sigma_{ij}+q}]$$

και συνεπώς ο πίνακας  $\hat{U}_R(s)$  ή οι αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι πίνακες του  $\tilde{U}_R(s)$  και  $U_R(s)$  θα εμπεριέχουν ένα μηδενικό στο  $s=\lambda_i$  λόγω της μορφής της στήλης  $\hat{u}_j(s)$ , το οποίο αποτέλεσμα φυσικά είναι άτοπο. Στο συμπέρασμα αυτό καταλήξαμε υποθέτοντας ότι υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις του χώρου  $X^{\mathbb{C}}$  που ανήκουν στον χώρο  $Z$ . Αρα θα έχουμε τελικά ότι  $X^{\mathbb{C}} \cap Z = \{0\}$ .

(β)  $X^{\mathbb{O}} \cap Z = \{0\}$

Εστω ότι  $X^{\mathbb{O}} \cap Z \neq \{0\}$  και συνεπώς ο μετασχηματισμός Laplace  $\beta_{jq}^{\mathbb{O}}(s)$  μιας λύσης  $\beta_{jq}^{\mathbb{O}}(t) \in X^{\mathbb{O}}$  της μορφής

$$\beta_{jq}^{\mathbb{O}}(s) := x_{j0}s^q + x_{j1}s^{q-1} + \dots + x_{jq} \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1} \quad (6.189)$$

για  $q=0,1,\dots,\hat{q}_j-1$  και  $j=\kappa+1,\dots,r$  (της οποίας ο τρόπος κατασκευής έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 6.3) ανήκει στον δεξιό μηδενικό χώρο του  $A(s)$ . Αρα σύμφωνα με τον Forney (Main Theorem, pp.495, 1975) η  $\beta_{jq}^{\mathbb{O}}(s)$  θα γράφεται ως πολυωνυμικός συνδιασμός των διανυσμάτων της ελάχιστης βάσης  $[\check{u}_{r+1}(s), \check{u}_{r+2}(s), \dots, \check{u}_m(s)]$  του δεξιού μηδενικού χώρου του  $A(s)$  που έχει οριστεί στην σχέση (6.95), δηλ.

$$\beta_{jq}^{\mathbb{O}}(s) = x_{j0}s^q + x_{j1}s^{q-1} + \dots + x_{jq} = \quad (6.190)$$

$$= \sum_{i=r+1}^m \left\{ (a_{0i} + a_{1i}s + \dots + a_{k_i i} s^{k_i}) \times (u_{i,0} + u_{i,1}s + \dots + u_{i,\epsilon_i-1} s^{\epsilon_i-1} + u_{i,\epsilon_i} s^{\epsilon_i}) \right\}$$

Από την σχέση (6.190) μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα στο γεγονός ότι τα διανύσματα  $x_{j0}$   $j \in \Gamma - \kappa$  και  $u_{i,\epsilon_i}$  ( $= y_{i0}$   $i=r+1,\dots,m$  από σχέση (6.101)) είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τα διανύσματα όμως  $x_{j0}$  και  $y_{i0}$  ως τιμές στο  $w=0$  των στηλών  $j \in \Gamma - \kappa$  και  $i \in m - \Gamma$  του πίνακα  $[\check{u}_1(w), \dots, \check{u}_r(w), \bar{u}_{r+1}(w), \dots, \bar{u}_m(w)]$  που ορίστηκε στην σχέση

(6.92) και ο οποίος δεν έχει μηδενικά στο  $w=0$ , είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο. Αρα η αρχική μας υπόθεση ότι  $X^w \cap Z \neq \{0\}$  είναι εσφαλμένη με συνέπεια  $X^w \cap Z = \{0\}$ .

(γ)  $X^\epsilon \cap Z = \{0\}$

Εστω ότι  $X^\epsilon \cap Z \neq \{0\}$  και συνεπώς ο μετασχηματισμός Laplace  $\beta_{jq}^\epsilon(s)$  μιας λύσης  $\beta_{jq}^\epsilon(t) \in X^\epsilon$  της μορφής

$$\begin{aligned} \beta_{jq}^\epsilon(s) &:= y_{j0}s^q + y_{j1}s^{q-1} + \dots + y_{jq} \equiv \\ &\equiv u_{j,\epsilon_j}s^q + u_{j,\epsilon_j-1}s^{q-1} + \dots + u_{j,\epsilon_j-q} \in \mathbb{R}[s]^{m \times 1} \end{aligned} \quad (6.191)$$

για  $q=0,1,\dots,\epsilon_j-1$  και  $j=r+1,\dots,m$  (της οποίας ο τρόπος κατασκευής έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 6.4) ανήκει στον δεξιό μηδενικό χώρο του  $A(s)$ . Αρα σύμφωνα με τον Forney (Main Theorem, pp.495, 1975) η  $\beta_{jq}^\epsilon(s)$  λόγω του ότι έχει βαθμό μικρότερο του  $\epsilon_j$  ( $q < \epsilon_j$ ) θα είναι γραμμικά ανεξάρτητη του διανύσματος  $\check{u}_j(s)$  της ελάχιστης βάσης  $[\check{u}_{r+1}(s), \check{u}_{r+2}(s), \dots, \check{u}_m(s)]$  του δεξιά μηδενικού χώρου του  $A(s)$  που έχει οριστεί στην σχέση (6.95) και θα γράφεται ως πολυωνυμικός συνδιασμός των υπολοίπων διανυσμάτων της βάσης δηλ.

$$\begin{aligned} \beta_{jq}^\epsilon(s) &= u_{j,\epsilon_j}s^q + u_{j,\epsilon_j-1}s^{q-1} + \dots + u_{j,\epsilon_j-q} = \\ &= \sum_{\substack{i=r+1 \\ i \neq j}}^m \left\{ (a_{0i} + a_{1i}s + \dots + a_{k_i i}s^{k_i}) \times (u_{i,0} + u_{i,1}s + \dots + u_{i,\epsilon_i-1}s^{\epsilon_i-1} + u_{i,\epsilon_i}s^{\epsilon_i}) \right\} \end{aligned} \quad (6.192)$$

Από την σχέση (6.192) μπορούμε να καταλήξουμε εύκολα στο γεγονός ότι το διάνυσμα  $u_{j,\epsilon_j}$  γράφεται ως γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων  $u_{i,\epsilon_i}$  με  $i=r+1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$ . Είναι γνωστό όμως από το λήμμα 6.24 (σχέση (6.98)) ότι τα



διανύσματα  $u_{i, \epsilon_i}$  με  $i=r+1, \dots, m$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα και συνεπώς καταλήξαμε σε άτοπο. Άρα η αρχική μας υπόθεση ότι  $X^\epsilon \cap Z \neq \{0\}$  ήταν λανθασμένη, γεγονός που αποδεικνύει ότι  $X^\epsilon \cap Z = \{0\}$ .

$$(δ) \quad \underline{X^{\mathcal{L}} \cap X^{\omega} = \{0\}, X^{\mathcal{L}} \cap X^{\epsilon} = \{0\}, X^{\omega} \cap X^{\epsilon} = \{0\}}$$

Η σχέση  $X^{\omega} \cap X^{\epsilon} = \{0\}$  έχει αποδειχθεί στο λήμμα 6.29. Οι λύσεις του χώρου  $X^{\mathcal{L}}$  ως συνεχείς (ομαλές) λύσεις είναι πάντα γραμμικά ανεξάρτητες οποιουδήποτε κρουστικών λύσεων και συνεπώς  $X^{\mathcal{L}} \cap X^{\omega} = \{0\}$  και  $X^{\mathcal{L}} \cap X^{\epsilon} = \{0\}$ .  $\square$

**Θεώρημα 6.40** Ο διανυσματικός χώρος

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \{ [\beta(t)] \text{ όπου } \beta(t) \in B^{\mathcal{L}} \cup B^{\omega} \cup B^{\epsilon} \} = \\ &= \hat{B}^{\mathcal{L}} \oplus \hat{B}^{\omega} \oplus \hat{B}^{\epsilon} = (B^{\mathcal{L}} \cup B^{\omega} \cup B^{\epsilon}) / \mathbb{R} = B / \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.193)$$

έχει διάσταση

$$\boxed{f := n + \hat{q} + \hat{\epsilon}} \quad (6.194)$$

και αποτελεί τον διανυσματικό χώρο λύσεων του συστήματος (6.1). Ο αριθμός  $f$  θα ονομάζεται *γενικευμένη τάξη* (*generalized order*) του συστήματος (6.1).

**Απόδειξη** Ο χώρος  $\hat{B}$  είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα  $\mathbb{R}$  από την πρόταση 6.37. Εστω τώρα :

$$\{\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t)\} \quad (6.195)$$

για βάση του διανυσματικού χώρου  $X^{\mathcal{L}}$ ,

$$\{\beta_1^{\omega}(t), \beta_2^{\omega}(t), \dots, \beta_q^{\omega}(t)\} \quad (6.196)$$

για βάση του διανυσματικού χώρου  $X^{\omega}$  και τέλος

$$\{\beta_1^{\epsilon}(t), \beta_2^{\epsilon}(t), \dots, \beta_{\hat{\epsilon}}^{\epsilon}(t)\} \quad (6.197)$$

για βάση του διανυσματικού χώρου  $X^{\epsilon}$ . Οι τρεις αυτοί χώροι  $X^{\mathcal{L}}$ ,  $X^{\omega}$  και  $X^{\epsilon}$  έχουν ως κοινό στοιχείο μόνο το μηδενικό διάνυσμα από το λήμμα 6.39. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας :

$$\{[\beta_1(t)], [\beta_2(t)], \dots, [\beta_n(t)]\} \quad (6.198)$$

αποτελούν μια βάση για τον διανυσματικό χώρο  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$ . Πιο συγκεκριμένα έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε :

$$\begin{aligned} \lambda_1[\beta_1(t)] + \lambda_2[\beta_2(t)] + \dots + \lambda_n[\beta_n(t)] &= [0] \Rightarrow \\ \lambda_1(\beta_1(t) \oplus \mathcal{Z}) + \lambda_2(\beta_2(t) \oplus \mathcal{Z}) + \dots + \lambda_n(\beta_n(t) \oplus \mathcal{Z}) &= \mathcal{Z} \stackrel{X^{\mathbb{C}} \cap \mathcal{Z} = \{0\}}{\Rightarrow} \\ \lambda_1\beta_1(t) + \lambda_2\beta_2(t) + \dots + \lambda_n\beta_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.199)$$

Οι λύσεις όμως  $\{\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t)\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο  $\mathbb{R}$  και συνεπώς  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  που σημαίνει ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσεως (6.198) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επίσης έστω ένα στοιχείο  $\beta(t) \in \hat{B}^{\mathbb{C}}$  τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \beta(t) &= x_1(t) + x_2(t) \text{ (όπου } x_1(t) \in X^{\mathbb{C}} \text{ και } x_2(t) \in \mathcal{Z}) \Rightarrow \\ \beta(t) &= \lambda_1\beta_1(t) + \lambda_2\beta_2(t) + \dots + \lambda_n\beta_n(t) + x_2(t) \text{ (όπου } \beta_i(t) \in X^{\mathbb{C}} \text{ και } x_2(t) \in \mathcal{Z}) \Rightarrow \\ \beta(t) &= \lambda_1[\beta_1(t)] + \lambda_2[\beta_2(t)] + \dots + \lambda_n[\beta_n(t)] \end{aligned} \quad (6.200)$$

και συνεπώς η βάση (6.158) παράγει τον χώρο  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$ . Κατά τον ίδιο τρόπο η βάση

$$\{[\beta_1^{\omega}(t)], [\beta_2^{\omega}(t)], \dots, [\beta_{\hat{q}}^{\omega}(t)]\} \quad (6.201)$$

παράγει τον διανυσματικό χώρο  $\hat{B}^{\omega}$  και τέλος η βάση

$$\{[\beta_1^{\epsilon}(t)], [\beta_2^{\epsilon}(t)], \dots, [\beta_{\hat{\epsilon}}^{\epsilon}(t)]\} \quad (6.202)$$

παράγει τον διανυσματικό χώρο  $\hat{B}^{\epsilon}$ . Οι τρεις αυτοί διανυσματικοί χώροι  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{B}^{\omega}$  και  $\hat{B}^{\epsilon}$  έχουν ως κοινό στοιχείο την μηδενική κλάση ισοδυναμίας  $[0]$  δηλαδή τον διανυσματικό χώρο  $\mathcal{Z}$ , λόγω του ότι οι διανυσματικοί χώροι  $X^{\mathbb{C}}$ ,  $X^{\omega}$  και  $X^{\epsilon}$  έχουν ως κοινό στοιχείο το μηδενικό διάνυσμα. Το ευθύ άθροισμά των διανυσματικών χώρων  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{B}^{\omega}$  και  $\hat{B}^{\epsilon}$  είναι ο διανυσματικός χώρος  $\hat{B}$  ο οποίος παράγεται από τις κλάσεις ισοδυναμίας (6.158), (6.201), (6.202) και ο οποίος συνεπώς θα έχει διάσταση  $n + \hat{q} + \hat{\epsilon}$ . Ο χώρος  $\hat{B}$  θα είναι και ο χώρος όλων των λύσεων της ιδιόμορφης διαφορικής εξίσωσης (6.1) εφόσον όπως είδαμε προηγουμένως το μέγιστο πλήθος των γραμμικών ανεξαρτήτων διανυσμάτων  $\hat{a}(s) = (s^{q_1-1} I_p)$   $A_{q_1} \tilde{\beta}(0-)$  που μπορούμε να έχουμε στην σχέση (6.169) είναι  $n + \hat{q} + \hat{\epsilon}$  όσο θα πρέπει να είναι και το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων αποκρίσεων του συστήματος (6.1).

□

**Σημείωση 6.41** Μια βάση του διανυσματικού χώρου  $\hat{B}$  είναι η ακόλουθη :

$$\hat{B} = \langle [\beta_{z0}^1(t)], \dots, [\beta_{r(\sigma_{\ell r}-1)}^{\ell}(t)], [\beta_{\kappa+1,0}^{\omega}(t)], \dots, [\beta_{r,\hat{q}_r-1}^{\omega}(t)], [\beta_{r+1,0}^{\epsilon}(t)], \dots, [\beta_{m,\epsilon_m-1}^{\epsilon}(t)] \rangle \quad (6.203)$$

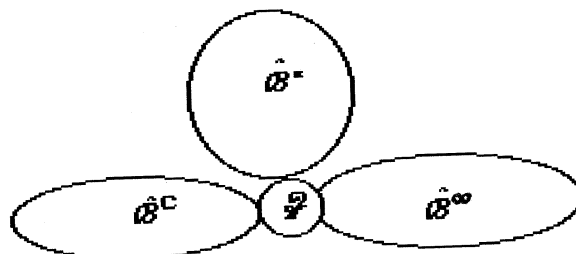
όπου  $[\beta(t)]$  δηλώνει σύμφωνα με την σχέση (6.157) την κλάση ισοδυναμίας που παράγει το στοιχείο  $\beta(t)$ , τα στοιχεία  $\beta_{jq}^i(t)$  με  $i \in \ell, j=z, z+1, \dots, r$  και  $q=0, 1, \dots, \sigma_{ij}-1$  έχουν οριστεί στην ενότητα 6.2 (σχέση 6.26), τα στοιχεία  $\beta_{jq}^{\omega}(t)$  με  $j=\kappa+1, \dots, r$  και  $q=0, 1, \dots, \hat{q}_j-1$  έχουν οριστεί στην ενότητα 6.3 (σχέση 6.80) και τελικά  $\beta_{jq}^{\epsilon}(t)$  με  $j=r+1, \dots, m$  και  $q=0, 1, \dots, \epsilon_j-1$  έχουν οριστεί στην ενότητα 6.4 (σχέση 6.111). Βλέπουμε επίσης από το θεώρημα 6.40 ότι

$$\hat{B}^{\mathbb{C}} = \langle [\beta_{z0}^1(t)], \dots, [\beta_{r(\sigma_{\ell r}-1)}^{\ell}(t)] \rangle \quad (6.204)$$

$$\hat{B}^{\omega} = \langle [\beta_{\kappa+1,0}^{\omega}(t)], \dots, [\beta_{r,\hat{q}_r-1}^{\omega}(t)] \rangle \quad (6.205)$$

$$\hat{B}^{\epsilon} = \langle [\beta_{r+1,0}^{\epsilon}(t)], \dots, [\beta_{m,\epsilon_m-1}^{\epsilon}(t)] \rangle \quad (6.206)$$

το οποίο μας δείχνει ότι  $\dim \hat{B}^{\mathbb{C}}=n, \dim \hat{B}^{\omega}=\hat{q}$  και  $\dim \hat{B}^{\epsilon}=\epsilon$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι διανυσματικοί χώροι  $\hat{B}^{\mathbb{C}}, \hat{B}^{\omega}$  και  $\hat{B}^{\epsilon}$  είναι αντίστοιχα οι διανυσματικοί χώροι λύσεων της ιδιόμορφης διαφορικής εξίσωσης (6.1) που οφείλονται στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ , στην μηδενική δομή στο  $s=\infty$  και στην δεξιά μηδενική δομή του πολυωνυμικού πίνακα  $A(s)$ .  $\square$



**Διάγραμμα 6.1** Ο διανυσματικός χώρος λύσεων  $\hat{B}$ .

**Σημείωση 6.42** Στην ειδική περίπτωση που ο πίνακας  $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  και  $\det[A(s)] \neq 0$  τότε έχουμε  $X^\epsilon = \emptyset$   $\{\epsilon=0\}$ ,  $\hat{B} \equiv B \equiv X^{\mathbb{C}} \cup X^{\infty}$  και συνεπώς η γενικευμένη τάξη του συστήματος (6.1) ταυτίζεται με την γενικευμένη τάξη η οποία ορίστηκε από τον Verghese (1979)  $f=n+\hat{q}$  δηλ. ο χώρος λύσεων  $\hat{B} \equiv B$  αποτελείται από διανύσματα και όχι κλάσεις ισοδυναμίας και έχει διάσταση ίση με το συνολικό πλήθος των μηδενικών του  $A(s)$  στο  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .  $\square$

**Παράδειγμα 6.43** Θεωρείστε την ιδίμορφη ομογενή διαφορική εξίσωση του παραδείγματος 6.9

$$A(\rho) \beta(t) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho & \rho^4 & \rho^2 + \rho \\ 1 & \rho^3 & \rho + 1 \\ 0 & \rho + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1} \quad (\text{E.1})$$

όπου  $A(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + A_4 s^4$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = 2$ . Έχουμε ότι

$$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad S_{A(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s^4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} s & s^4 & s^2 + s \\ 1 & s^3 & s + 1 \\ 0 & s + 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 - s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0_{3 \times 1} ; \quad [1 \quad -s \quad 0] \begin{bmatrix} s & s^4 & s^2 + s \\ 1 & s^3 & s + 1 \\ 0 & s + 1 & 0 \end{bmatrix} = 0_{1 \times 3}$$

και συνεπώς  $n=1$ ,  $\hat{q}=1$ ,  $\hat{\epsilon}=1$  και  $\hat{\eta}=1$ . Ο αριστερά μηδενικός χώρος του  $A(s)$  μας δίνει ένα πλήθος σχέσεων μεταξύ των αρχικών συνθηκών  $\beta(0-)$ ,  $\beta^{(1)}(0-)$ ,  $\beta^{(2)}(0-)$  και  $\beta^{(3)}(0-)$  οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται έτσι ώστε το σύστημα μου (E.1) να έχει λύση και οι σχέσεις αυτές είναι οι εξής (Παράδειγμα 6.32) :

$$\beta_1(0-) + \beta_3(0-) + \beta_3^{(1)}(0-) + \beta_2^{(3)}(0-) = 0$$

Συμπαιρούμε δηλαδή ότι ο χώρος των επιτρεπτών αρχικών συνθηκών είναι ο εξής :

$$H_{i0} = \{[\beta(0-)^T \quad \beta^{(1)}(0-)^T \quad \beta^{(2)}(0-)^T \quad \beta^{(3)}(0-)^T]^T \mid \beta_1(0-) + \beta_3(0-) + \beta_3^{(1)}(0-) + \beta_2^{(3)}(0-) = 0\}$$

Ο χώρος  $Z$  ο οποίος είναι ο χώρος λύσεων του συστήματος (E.1) για αρχικές συνθήκες

$$\begin{bmatrix} \beta(0-) \\ \beta^{(1)}(0-) \\ \beta^{(2)}(0-) \\ \beta^{(3)}(0-) \end{bmatrix} \in \text{Kernel} \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & A_4 & 0 & 0 \\ A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

είναι ο ακόλουθος :

$$Z := \{ \beta(t) \mid \beta(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -1-s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(s) \right\} \} = \begin{bmatrix} \int_{0-}^t (-\delta(\tau) - \delta^{(1)}(\tau)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0-}^t \delta(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

όπου  $u(t)$  είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση ( $u(t)=0$  για  $t < 0$ ). Ο διανυσματικός χώρος  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$  ο οποίος οφείλεται στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πίνακα  $A(s)$ , όπως μπορούμε να δούμε από το παράδειγμα 6.9 και την σχέση (6.204) είναι ο εξής :

$$\hat{B}^{\mathbb{C}} := B^{\mathbb{C}} / \mathbb{R} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

και έχει διάσταση  $n=1$ , ενώ ο διανυσματικός χώρος

$$B^{\mathbb{C}} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \int_{0-}^t (-\delta(\tau) - \delta^{(1)}(\tau)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0-}^t \delta(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $u(t)$  είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση, έχει άπειρη διάσταση. Ο διανυσματικός χώρος  $\hat{B}^{\mathbb{D}}$  ο οποίος οφείλεται αποκλειστικά στους στοιχειώδεις διαιρέτες στο άπειρο του πίνακα  $A(s)$  είναι ο ακόλουθος (Παράδειγμα 6.22 και σχέση 6.205) :

$$\hat{B}^{\omega} := B^{\omega}/\mathbb{R} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

και έχει διάσταση  $\hat{q}=1$ , ενώ ο διανυσματικός χώρος

$$B^{\omega} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta(\tau) - \delta^{(1)}(\tau)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $u(t)$  είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση, έχει άπειρη διάσταση. Ο διανυσματικός χώρος  $\hat{B}^{\epsilon}$  ο οποίος οφείλεται αποκλειστικά στον δεξιά μηδενικό χώρο του  $A(s)$  είναι ο ακόλουθος (Παράδειγμα 6.28 και σχέση 6.206) :

$$\hat{B}^{\epsilon} := B^{\epsilon}/\mathbb{R} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

και έχει διάσταση  $\hat{\epsilon}=1$ , ενώ ο διανυσματικός χώρος

$$B^{\epsilon} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta(\tau) - \delta^{(1)}(\tau)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $u(t)$  είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση, έχει άπειρη διάσταση. Ο συνολικός χώρος λύσεων του συστήματος (E.1) είναι ο ακόλουθος

$$\begin{aligned} \hat{B} &:= B/\mathbb{R} = (B^{\mathcal{L}} \cup B^{\omega} \cup B^{\epsilon}) / \mathbb{R} = \hat{B}^{\mathcal{L}} \oplus \hat{B}^{\omega} \oplus \hat{B}^{\epsilon} = \\ &= \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

και έχει διάσταση (γενικευμένη τάξη) ίση με  $\mathbf{f} = \mathbf{n} + \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{e}} = 1 + 1 + 1 = 3$  ενώ ο διανυσματικός χώρος που αποτελεί και το σύνολο λύσεων του (E.1) είναι ο εξής

$$B = B^{\mathbb{C}} \cup B^{\infty} \cup B^{\epsilon} =$$

$$= \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta(\tau) - \delta^{(1)}(\tau)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(\tau) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $u(t)$  είναι μια αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση και έχει άπειρη διάσταση.  $\square$

### 6.7 Περίληψη

Πολλές μελέτες στο παρελθόν ανάμεσα σε αυτές των Verghese (1978), Vardulakis & Fragulis (1989) και Vardulakis (1991) έχουν γίνει όσον αφορά την δομή των λύσεων καινουνικών ομογενών διαφορικών εξισώσεων πρδ.  $A(\rho)\beta(t)=0$  όπου  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times p}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = p$ . Στο κεφάλαιο αυτό πετύχαμε μια γενίκευση της όλης αυτής θεωρίας για ιδιόμορφα ομογενή συστήματα διαφορικών εξισώσεων της μορφής  $A(\rho)\beta(t)=0$  όπου  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s) = r$  (όχι κατ'ανάγκη  $p=m=r$ ). Επισημάνουμε αρκετές διαφορές, όπως ότι τα ιδιόμορφα συστήματα δεν έχουν πάντα λύση ή ακόμα ότι μπορεί και να έχουν απειρία λύσεων. Πιο συγκεκριμένα στις ενότητες 6.2, 6.3 και 6.4 βρήκαμε διανυσματικούς χώρους λύσεων ενός ιδιόμορφου συστήματος που οφείλονται αποκλειστικά στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ , στην μηδενική δομή στο  $s = \infty$  και στην δεξιά μηδενική δομή του πίνακα  $A(\rho)$ . Στην ενότητα 6.5 διατυπώσαμε τον ρόλο της αριστερής μηδενικής δομής του  $A(\rho)$  στην ύπαρξη λύσεων ενός ιδιόμορφου ομογενούς συστήματος ενώ στην ενότητα 6.6 διαπιστώσαμε ότι η ύπαρξη μοναδικής λύσης οφείλεται αποκλειστικά στην ύπαρξη ή όχι δεξιά μηδενικού χώρου του πίνακα  $A(\rho)$ . Στην ενότητα 6.6 διατυπώσαμε επίσης ότι ο διανυσματικός χώρος λύσεων ενός ιδιόμορφου ομογενούς συστήματος αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας και η διάσταση του είναι ίση με  $\mathbf{f} := \mathbf{n} + \hat{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{e}}$  πρδ. το συνολικό πλήθος

των μηδενικών στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και των δεξιά ελαχίστων δεικτών του  $A(s)$ .

Ένα σημαντικό λοιπόν αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι ο προσδιορισμός της φυσικής σημασίας της αλγεβρικής δομής ενός πολυωνυμικού πίνακα σε σχέση με τον χώρο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με συντελεστές πίνακες η οποία σχηματίζεται βάσει αυτού του πολυωνυμικού πίνακα. Ένα σημαντικό πλήθος εφαρμογών στην Γραμμική Θεωρία Συστημάτων απορρέουν από αυτήν την θεωρία λόγω του ότι κάθε γραμμικό σύστημα καινικό ή ιδιόμορφο μπορεί να περιγραφεί από μια διαφορική εξίσωση της μορφής (6.1).

Η ανάλογη περίπτωση των διακριτών συστημάτων της μορφής (6.1) πρδ.  $A(\sigma)\beta(t)=0$  όπου  $\sigma\beta(t)=\beta(t+1)$  είναι ο τελεστής μετατόπισης (*backward shift operator*),  $A(\sigma)\in\mathbb{R}[\sigma]^{p\times m}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(\sigma)}A(\sigma)=r<\min(p,m)$  και  $B=\{\beta(t) \mid \beta(t) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{m\times 1} \text{ που ικανοποιούν την } A(\sigma)\beta(t)=0\}$ , έχει μελετηθεί από τον συγγραφέα και έχει γίνει δεκτή στο 1993 *IEEE Mediterranean Control Conference*.

### ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [B1] Blomberg H. and Ylinen R., 1983, *Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems.*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.166, Academic Press, London.
- [C1] Chen C.T., 1984, *Linear System Theory and Design.*, Holt, Reinhardt and Winston, New York.
- [F1] Forney G.D., 1975, Minimal bases of rational vector spaces with applications to multivariable systems., *SIAM J. Control*, **13**, pp.493–520.
- [G1] Gantmacher F.R., 1971, *The Theory of Matrices.*, Chelsea, New York.
- [G2] Gohberg I., Langaster P and Rodman I., 1982, *Matrix Polynomials.*, Academic Press, New York.
- [H1] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and its applications., *Int.J.Control*, **47**, pp.53–63.



- [K1] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, On the solution space of singular state–space AR representations., Proceedings of the *International Symposium on Implicit and Nonlinear Systems*, pp. 191–196, 14–15 December 1992, Fort Worth, Texas.
- [K2] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the solution space of continuous time AR representations., Proceedings of the *Second European Control Conference*, June 28–July 1, 1993, Groningen, The Netherlands.
- [K3] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, Structural invariants of polynomial matrices and solutions of autoregressive representations., to be submitted to *Siam Journal of Control*.
- [K4] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the solution space of discrete time AR representations., accepted to *IEEE Mediterranean Control Conference*, June 21–23, 1993, Chania, Crete, Greece.
- [K5] Kuijper M., 1992, *First Order Representations of Linear Systems.*, Ph.D. Thesis, Center for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands.
- [P1] Pugh A.C., 1976, The McMillan degree of a polynomial system matrix., *Int.J. Control*, 24, pp.129–135
- [V1] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods*, John Wiley and Sons
- [V2] Vardulakis A.I.G. and Fragulis G., 1989, Infinite elementary divisors of polynomial matrices and impulsive solutions of linear homogeneous matrix differential equations., *Circuit Systems and Signal Process* 8, pp.357–373.
- [V3] Verghese G., 1978, *Infinite–Frequency Behaviour in Dynamical Systems*, Ph.D.Dissertation, Department of Electronic Engineering, Stanford University.
- [V4] Verghese G. and Kailath T., Impulsive behaviour in dynamical systems : Structure and significance., *Proc. 4th Int.Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Delft, The Netherlands, pp.162–168.

- [V5] Verghese G. Van Dooren P. and Kailath T., 1979, Properties of the system matrix of a generalized state–space system., *Int.J.Control*, **30**, pp.235–243.
- [V6] Verghese G., Kailath T., 1979, Eigenvector chains for finite and infinite zeros of rational matrices., *18th Proc.of CDC*.
- [W1] Willems J.C., 1986, From time series to linear system – Part I. Finite dimensional time invariant systems., *Automatica*, **22**, pp.561–580.
- [W2] Willems J.C., 1991, Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems., *IEEE Trans.Auto.Control*, **36**, pp.259–294.
- [W3] Willems J.C. and Nieuwenhuis J.W., 1991, Continuity of latent variable models. *IEEE Trans.Auto.Control*, **36**, pp.528–538.

#### ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [Λ1] Λάκκη Κ., 1984, *Γραμμική Αλγεβρα, Θεσσαλονίκη*.
- [Λ2] Λάκκη Κ., 1984, *Αλγεβρα, Θεσσαλονίκη*.
- [Μ1] Μποζαμπαλίδη Σ.Μ., 1984, *Γραμμική Αλγεβρα, Θεσσαλονίκη*.
- [Φ1] Φραγκούλης Γ., 1990, *Ανάλυση Γενικευμένων Ιδιόμορφων Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη*.
- [Ψ1] Ψωμόπουλος Ε., 1984, *Αλγεβρα, Θεσσαλονίκη*.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 7

### ΜΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΝΝΟΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΓΙΑ ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- 7.1 Εισαγωγή.
- 7.2 Απεικονίσεις χώρων λύσεων ομογενών Γραμμικών Συστημάτων.
- 7.3 Μια θεμελιώδης ισοδυναμία.
- 7.4 Μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich.
- 7.5 Περίληψη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## 7.1 Εισαγωγή

Ένα πλήθος συγγραφέων (πρδ. Pernebo 1977) έχουν μελετήσει την δράση ενός γραμμικού μετασχηματισμού στον χώρο λύσεων ενός δεδομένου ομογενούς γραμμικού συστήματος σχηματιζόμενου από αλγεβρικές και συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Αυτή η πράξη του γραμμικού μετασχηματισμού παρ'όλα αυτά δεν έχει μελετηθεί πλήρως και αυτό γιατί η όλη προσπάθεια έχει επικεντρωθεί ως τώρα στην πεπερασμένη συμπεριφορά του συστήματος. Ακόμα και στην περίπτωση που η κρουστική συμπεριφορά του συστήματος έχει ληφθεί υπόψη (Anderson *et al.* 1985, Coppel & Cullen 1985) μια πλήρη διερεύνηση του προβλήματος δεν έχει δοθεί λόγω του ότι υπάρχουν αρκετά ερωτηματικά όσον αφορά την δεδομένη απεικόνιση.

Στο πρώτο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε μια πλήρη ανάλυση της δράσης ενός τέτοιου μετασχηματισμού. Πιο αναλυτικά θα δούμε πότε μια τέτοια απεικόνιση είναι ένα προς ένα σε σχέση με την πεπερασμένη αλλά και την κρουστική συμπεριφορά του συστήματος αλλά και θα απαντήσουμε στο βασικό ερώτημα : πότε η συγκεκριμένη απεικόνιση ορίζεται καινοικά ή είναι απλώς μια σχέση. Η συνθήκη που βεβαιώνει ότι η γραμμική απεικόνιση είναι καλώς ορισμένη απαντάει στο ερώτημα : γιατί κάθε γραμμικός μετασχηματισμός από ένα γενικευμένο γραμμικό σύστημα με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρδ.  $A(\rho)\beta(t) = 0$  ( $\rho = d/dt$  και  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times p}$ ), προς ένα άλλο σύστημα στο χώρο των καταστάσεων πρδ.  $(\rho E - A)x(t) = 0$  ( $\rho = d/dt$  και  $\rho E - A \in \mathbb{R}[\rho]^{m \times m}$ ), δεν περιέχει παραγώγους και είναι συνεπώς σταθερός (Wolovich 1974).

Μια έκφραση ισοδυναμίας μπορεί λοιπόν να οριστεί (Ορισμός 7.18) μεταξύ δύο ομογενών γραμμικών συστημάτων με τον περιορισμό ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των χώρων λύσεων των δύο συστημάτων. Εάν μόνο η πεπερασμένη συμπεριφορά του συστήματος μας ενδιαφέρει τότε η ισοδυναμία αυτή μπορεί να εκφραστεί με την μορφή πινάκων και πιο συγκεκριμένα με την γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία (Ορισμός 3.3). Εάν επιπλέον ενδιαφέρει και η κρουστική συμπεριφορά του συστήματος τότε η ισοδυναμία αυτή μπορεί να εκφραστεί επίσης με την μορφή πινάκων και πιο συγκεκριμένα με την πλήρη ισοδυναμία (Ορισμός 3.22). Βάσει των παραπάνω μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η ισοδυναμία αυτή είναι θεμελιώδης για την γενικευμένη μελέτη Γραμμικών Συστημάτων.

Τέλος στην ενότητα 7.4 παρουσιάζουμε μια γενίκευση της κλασσικής ισοδυναμίας του Wolovich (1974) η οποία έχει ως σκοπό την επιπλέον μελέτη της κρουστικής συμπεριφοράς ομογενών γραμμικών συστημάτων. Η γενικευμένη ισοδυναμία του Wolovich όπως αποδεικνύεται (Θεώρημα 7.33) ορίζει την ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία αλλά και την θεμελιώδη ισοδυναμία η οποία παρουσιάζεται στην ενότητα 7.3.

## 7.2 Απεικονίσεις χώρων λύσεων ομογενών Γραμμικών Συστημάτων.

Θεωρείστε το σύνολο  $\mathcal{P}_0[p,m]$  των  $(r+p) \times (r+m)$  πολυωνυμικών πινάκων όπου  $r \geq \max(-p, -m)$ . Ένας μετασχηματισμός πολυωνυμικών πινάκων με αξιόλογες εφαρμογές στην Γραμμική Θεωρία Συστημάτων είναι ο μετασχηματισμός της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας που αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 (δες ορισμό 3.3). Μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας υπό την μορφή απεικονίσεων δίνεται από το παρακάτω

**Λήμμα 7.1** (Pernebo 1977) Θεωρείστε δύο γραμμικά ομογενή συστήματα αλγεβρικών και διαφορικών εξισώσεων της μορφής :

$$T_i(\rho) \xi_i(t) = 0 \quad i=1,2 \quad (\rho=d/dt) \quad (7.1)$$

όπου  $T_i(\rho)$   $i=1,2$  είναι τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  είναι γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμοι εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των "πεπερασμένων χώρων λύσεων" των συστημάτων (7.1) της μορφής

$$\xi_2(t) = N(\rho) \xi_1(t) \quad (7.2) \quad \square$$

Η ερμηνεία του "πεπερασμένου χώρου λύσεων" στο παραπάνω λήμμα είναι ο χώρος λύσεων που παράγεται λόγω της πεπερασμένης μηδενικής δομής του συστήματος (δες κεφ.6 ο χώρος  $\hat{B}^{\mathcal{C}}$ ). Στην περίπτωση λοιπόν που η "πεπερασμένη" συμπεριφορά του συστήματος μας ενδιαφέρει, ο μετασχηματισμός της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας μας δίνει μια πλήρη εικόνα της σχέσης που υπάρχει μεταξύ των χώρων λύσεων των συστημάτων που προκύπτουν από τους γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμους πολυωνυμικούς πίνακες.

**Παράδειγμα 7.2** Θεωρείστε την γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία

$$\underbrace{(1 \quad \rho^2 - \rho \quad -\rho^3 + \rho^2)}_{M(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} \rho - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_1(\rho)} = \underbrace{(\rho - 1)}_{T_2(\rho)} \underbrace{(1 \quad \rho \quad 0)}_{N(\rho)} \quad (\text{E.1})$$

Εστω η ομογενής διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον πίνακα  $T_1(\rho)$

$$\begin{bmatrix} \rho - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.2})$$

της οποίας ο πεπερασμένος χώρος λύσεων είναι ο

$$\hat{B}_1^{\mathcal{C}} = \left\langle \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{E.3})$$

και η ομογενής διαφορική εξίσωση που προκύπτει από τον πίνακα  $T_2(\rho)$

$$(\rho - 1) x(t) = 0 \quad (\text{E.4})$$

της οποίας ο χώρος λύσεων είναι ο

$$\hat{B}_2^{\mathcal{C}} = \langle e^t \rangle \quad (\text{E.5})$$

Θεωρείστε τον μετασχηματισμό που προκύπτει από τον πίνακα  $N(\rho)$  της σχέσης (E.1)

$$x(t) = N(\rho) \xi(t) \Leftrightarrow x(t) = (1 \quad \rho \quad 0) \xi(t) \quad (\text{E.6})$$

Με μια πρώτη ματιά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός (E.6) είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των "πεπερασμένων" χώρων λύσεων των δύο συστημάτων πρδ. παίρνει το διάνυσμα της βάσης του  $\hat{B}_1^{\mathbb{C}}$  και το στέλνει στο διάνυσμα βάσης του  $\hat{B}_2^{\mathbb{C}}$ . Παρατηρούμε όμως ότι ενώ το πρώτο σύστημα έχει και "κρουστικό" χώρο λύσεων εκτός του "πεπερασμένου" χώρου λύσεων, πρδ.

$$\hat{B}_1^{\infty} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

το δεύτερο σύστημα δεν έχει πρδ.  $\hat{B}_2^{\infty} = \{0\}$ , και συνεπώς δεν μπορεί να υπάρξει ένας κατάλληλος ισομορφισμός μεταξύ των δύο αυτών συστημάτων.  $\square$

Όπως διαπιστώνουμε από το παραπάνω παράδειγμα εάν και η "πεπερασμένη" αλλά και η "κρουστική" συμπεριφορά ενός συστήματος μας ενδιαφέρει, τότε ο μετασχηματισμός της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας και συνεπώς και η αντίστοιχη του ερμηνεία υπό την μορφή γραμμικών απεικονίσεων χρειάζονται ορισμένες επιπλέον συνθήκες. Για τον λόγο αυτό οι Hayton *et al.* 1988 προτείνουν τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας (δες ορισμό 3.22). Μερικές από τις σημαντικές ιδιότητες αυτής της ισοδυναμίας είναι ότι διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$  πολυωνυμικών πινάκων σε αντίθεση με την γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία που διατηρεί αναλλοίωτη μόνο την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  καθώς και ότι είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathcal{P}'_0(m,m)$  πρδ. το σύνολο των τετράγωνων και αντιστρέψιμων πινάκων. Μια ειδική περίπτωση της πλήρους ισοδυναμίας είναι η τέλεια ισοδυναμία και αφορά πρωτοβάθμιους πολυωνυμικούς πίνακες (δες ορισμό 3.18). Μια ερμηνεία της ισοδυναμίας αυτής υπό την μορφή γραμμικών απεικονίσεων δίνεται στον παρακάτω

**Ορισμός 7.3** (Hayton *et al.* 1986) Έστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο γραμμικά ομογενή συστήματα αποτελούμενα από αλγεβρικές και συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\Sigma_i : (\rho E_i - A_i) \xi_i(t) = 0 \quad i=1,2 \quad (\rho=d/dt) \quad (7.3)$$

Τα  $\Sigma_1, \Sigma_2$  θα λέγονται **θεμελιώδη ισοδύναμα** (*fundamentally equivalent*) εαν υπάρχει

(1) ένας σταθερός μονομορφισμός

$$\xi_2(s) = N \xi_1(s) \quad (7.4)$$

(2) ένας σταθερός επιμορφισμός

$$E_2 \xi_2(0-) = M E_1 \xi_1(0-) \quad (7.5)$$

όπου  $\xi_1(s)$  και  $\xi_2(s)$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\xi_1(t)$  και  $\xi_2(t)$  αντίστοιχα.  $\square$

Όπως αποδείχτηκε (Hayton *et al.* 1986), οι συνθήκες (1) και (2) του ορισμού 7.3 είναι αναγκαίες για την ύπαρξη ενός "ισομορφισμού" μεταξύ των "πεπερασμένων" αλλά και "κρουστικών" χώρων λύσεων των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ . Παρ'όλα αυτά όπως μπορούμε να δούμε και στο επόμενο θεώρημα οι παρακάτω συνθήκες είναι και ικανές.

**Θεώρημα 7.4** Θεωρείστε δύο γραμμικά ομογενή συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  όπως αυτά της σχέσης (7.3). Τότε τα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι θεμελιώδη ισοδύναμα εαν και μόνο εαν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" χώρων λύσεων των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής

$$\xi_2(t) = N \xi_1(t) \quad (7.6)$$

#### Απόδειξη

( $\Leftarrow$ ) Αποδείχτηκε στην εργασία των (Hayton *et al.* 1986) ότι οι συνθήκες (1) και (2) του ορισμού 7.3 μας δίνουν ότι ο μονομορφισμός (7.4) είναι και ισομορφισμός ή ισοδύναμα, εαν πάρουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (7.4), ότι η απεικόνιση (7.6) είναι ένας ισομορφισμός.

( $\Rightarrow$ ) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός της μορφής (7.6) μεταξύ των χώρων λύσεων των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ . Τότε είναι προφανές παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (7.6), ότι η απεικόνιση



$$\xi_2(s) = N \xi_1(s) \quad (7.7)$$

είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των συνόλων των ρητών συναρτήσεων που αποτελούν τους μετασχηματισμούς Laplace των χώρων λύσεων των εξισώσεων (7.3) και συνεπώς η συνθήκη (1) του ορισμού 7.3 ικανοποιείται. Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (7.3) παίρνουμε ότι

$$(sE_1 - A_1) \xi_1(s) = E_1 \xi_1(0-) \quad (7.8)$$

Από (7.7) και (7.8) παίρνουμε τον ακόλουθο (ρητό) ισομορφισμό

$$E_2 \xi_2(0-) = [(sE_2 - A_2)N(sE_1 - A_1)^{-1}] E_1 \xi_1(0-) \quad (7.9)$$

Εστω

$$(sE_2 - A_2)N(sE_1 - A_1)^{-1} = A_0 + s A_1(s) + A_2(s) \quad (7.10)$$

όπου  $A_0$  είναι ένας σταθερός πίνακας,  $A_1(s)$  είναι ένας πολυωνυμικός πίνακας και  $A_2(s)$  ένας καινικά ρητός πίνακας. Εάν αντικαταστήσουμε την σχέση (7.10) στην σχέση (7.9) και εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του  $s^i$  έχουμε ότι ο ρητός μετασχηματισμός της μορφής (7.9) έχει την μορφή

$$E_2 \xi_2(0-) = A_0 E_1 \xi_1(0-) \quad (7.11)$$

και έτσι η συνθήκη (2) του ορισμού 7.3 επίσης ικανοποιείται, πράγμα που αποδεικνύει το θεώρημα μας.  $\square$

Είναι εύκολο να δει κανείς από το θεώρημα 7.4 ότι οι δύο συνθήκες της θεμελιώδους ισοδυναμίας στον ορισμό 7.3 μπορούν κάλλιστα να αντικατασταθούν από την απλή συνθήκη του ισομορφισμού της απεικόνισης (7.6) μεταξύ των χώρων λύσεων των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  στην σχέση (7.3). Βάσει αυτής της ερμηνείας μπορούμε τώρα να δώσουμε μια γενίκευση του λήμματος 7.1, για την περίπτωση όπου και η "πεπερασμένη" αλλά και η "κρουστική" συμπεριφορά, ομογενών συστημάτων της μορφής (7.3) είναι υπό το ενδιαφέρον μας.

**Λήμμα 7.5** Εστω  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  δύο ομογενή συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής (7.3). Οι πίνακες  $(\rho E_1 - A_1)$  και  $(\rho E_2 - A_2)$  είναι τέλεια ισοδύναμοι εάν και μόνο εάν

οι "πεπερασμένοι" και "κρουστικοί" χώροι λύσεων των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  συνδέονται με έναν ισόμορφο μετασχηματισμό της μορφής

$$\xi_2(t) = N \xi_1(t) \quad (7.12)$$

όπου  $N$  είναι ένας σταθερός πίνακας.  $\square$

**Απόδειξη** Έχει αποδειχτεί (Hayton *et al.* 1986) ότι η τέλεια ισοδυναμία ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την θεμελιώδη ισοδυναμία. Παρόλα αυτά οι δύο συνθήκες του ορισμού 7.3 που ορίζουν την θεμελιώδη ισοδυναμία, μπορούν να αντικατασταθούν με την ισοδύναμη συνθήκη (7.6) του θεωρήματος 7.4, που αποδεικνύει το λήμμα.  $\square$

Θέλουμε να το τονίσουμε εδώ ότι ο "πεπερασμένος" ("κρουστικός") χώρος λύσεων ενός συστήματος  $\Sigma$ , αντιστοιχεί στον χώρο  $\hat{B}^c$  ( $\hat{B}^m$ ) που αναφέραμε στο κεφάλαιο 6. Την γενίκευση της θεμελιώδους ισοδυναμίας (και συνεπώς των λημμάτων 7.1 και 7.5) ερχόμαστε να δώσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο για την γενική κατηγορία των ομογενών συστημάτων της μορφής (7.1).

Το πρώτο ερώτημα που πρέπει βασικά να λύσουμε είναι το εξής :

**Πρόβλημα 7.6** Θεωρείστε ένα σύστημα της μορφής (7.1)

$$T(\rho) \xi(t) = 0 \quad (7.12)$$

όπου

$$T(\rho) = T_q \rho^q + T_{q-1} \rho^{q-1} + \dots + T_1 \rho + T_0 \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times p} \quad (7.13)$$

είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Εστω  $B$  ( $\equiv \hat{B}$  δεξ κεφ.6) είναι ο χώρος λύσεων του συστήματος (7.12) ο οποίος αντιστοιχεί σε όλες τις δυνατές αρχικές συνθήκες του  $\xi(t)$  και των  $q-1$  παραγώγων του. Υποθέστε ότι ο χώρος λύσεων  $B$  απεικονίζεται στον χώρο  $B_1$  ο οποίος ορίζεται ως ο χώρος των συναρτήσεων  $\xi_1(t)$  που σχηματίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$\xi_1(t) = N(\rho) \xi(t) \quad (7.14)$$

όπου

$$N(\rho) = N_q \rho^q + N_{q-1} \rho^{q-1} + \dots + N_1 \rho + N_0 \in \mathbb{R}[\rho]^{m \times p} \quad (7.15)$$

και ένας από τους πίνακες  $T_q$  ή  $N_q$  είναι μη μηδενικός. Το ερώτημα που τίθεται είναι κάτω από ποιές συνθήκες η σχέση (7.14) είναι μια απεικόνιση από τον χώρο  $B$  στον χώρο  $B_1$  ή ισοδύναμα κάτω από ποιές συνθήκες σε κάθε ένα στοιχείο του συνόλου  $B$  αντιστοιχίζεται διαμέσου της σχέσης (7.14) ένα και μόνο ένα στοιχείο του  $B_1$ ;  $\square$

Θέλουμε να σημειώσουμε εδώ ότι το παραπάνω πρόβλημα δεν εκτιμήθηκε καθόλου στο παρελθόν (Pernebo 1977, Coppel & Cullen 1985) πρδ. το ότι η σχέση (7.14) δεν είναι πάντα μια απεικόνιση. Το παρακάτω παράδειγμα είναι πολύ αντιπροσωπευτικό για την πλήρη κατανόηση του προβλήματος.

**Παράδειγμα 7.7** Θεωρείστε το ομογενές σύστημα

$$T(\rho) \xi(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.1})$$

με λύση (Vardoulakis 1991),

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_3(0-)\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

και θεωρείστε την σχέση

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1\rho + L_0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} =: N(\rho) \xi(t) \quad (\text{E.3})$$

από όπου παίρνουμε με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace ότι

$$y(t) = \begin{bmatrix} -L_1\xi_1(0-)\delta(t) \\ \xi_3(0-)\delta(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Η σχέση (E.3) δεν είναι στην πραγματικότητα απεικόνιση λόγω του ότι για κάθε λύση  $\xi(t)=[\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)]^T$  του συστήματος (E.1) η οποία εξαρτάται άμεσα από την αρχική συνθήκη  $\xi_3(0-)$  παίρνουμε πολλές εικόνες του  $y(t)$  οι οποίες εξαρτούνται από την συγκεκριμένη τιμή της αρχικής συνθήκης  $\xi_1(0-)$ .  $\square$

Το πρώτο λοιπόν ερώτημα που ερχόμαστε να λύσουμε και το οποίο εκφράζεται στην διατύπωση του προβλήματος 7.6 αλλά και φαίνεται στο παράδειγμα 7.7 είναι πότε η σχέση (7.14) ή στο συγκεκριμένο παράδειγμα (E.3), είναι απεικόνιση από τον χώρο  $B$  στον χώρο  $B_1$  και πότε είναι απλώς μια σχέση μεταξύ των δύο χώρων.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Laplace στις σχέσεις (7.12) και (7.14) με αρχικές συνθήκες  $\xi(0-), \xi^{(1)}(0-), \dots, \xi^{(q-1)}(0-)$  παίρνουμε σύμφωνα με την μέθοδο του Pugh (1976), ότι

$$T(s) \hat{\xi}(s) = \hat{a}_T(s) \quad (7.16)$$

$$\hat{\xi}_1(s) = N(s) \hat{\xi}(s) - \hat{a}_N(s) \quad (7.17)$$

όπου τα  $\hat{a}_T(s)$  και  $\hat{a}_N(s)$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\hat{a}_F(s) = S_{q-1} X_F \bar{\xi}(0-) \quad F=T, N \quad (7.18)$$

όπου

$$S_{q-1} = \begin{bmatrix} s^{q-1} I \\ s^{q-2} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}; \quad X_F = \begin{bmatrix} F_q & 0 & \cdots & 0 \\ F_{q-1} & F_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_q \end{bmatrix}; \quad \bar{\xi}(0-) = \begin{bmatrix} \xi(0-) \\ \xi^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \xi^{(q-1)}(0-) \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

**Θεώρημα 7.8** Η σχέση (7.14) είναι απεικόνιση δηλ. σε κάθε ένα στοιχείο του  $B$  αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο του  $B_1$ , εάν και μόνο εάν

$$\delta_M \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \delta_M(T(s)) \quad (7.20)$$

**Απόδειξη** Η σχέση (7.14) είναι απεικόνιση εαν και μόνο εαν προσδιορίζει μοναδικά την εικόνα  $\xi_1(t)$  της λύσης  $\xi(t)$  του ομογενές συστήματος (7.12). Ισοδύναμα η σχέση (7.14) είναι απεικόνιση εαν και μόνο εαν για κάθε  $\hat{\xi}(s)$  το οποίο ορίζεται στην σχέση (7.16), η σχέση (7.17) προσδιορίζει το  $\hat{\xi}_1(s)$  μοναδικά. Είναι προφανές ότι εαν το διάνυσμα  $\xi(s)$  έχει δύο εικόνες  $\hat{\xi}_1(s)$  και  $\hat{\xi}'_1(s)$  διαμέσου της σχέσης (7.17) τότε αυτό θα οφείλεται αποκλειστικά στο διάνυσμα  $\hat{a}_N(s)$  ή πιο συγκεκριμένα στις αρχικές συνθήκες  $\bar{\xi}(0-)$  της σχέσης (7.18). Γι'αυτόν τον λόγο έστω  $\bar{\xi}(0-)\neq\bar{\xi}'(0-)$  δύο διανύσματα αρχικών συνθηκών. Εαν οι δύο αυτές αρχικές συνθήκες μας δίνουν την ίδια λύση  $\xi(t)$  τότε είναι φανερό ότι θα πρέπει  $\bar{\xi}(0-)-\bar{\xi}'(0-)\in\text{Ker } X_{\mathcal{T}}$ . Εαν υποθέσουμε ότι αυτή η συνθήκη ισχύει τότε έχουμε ότι το διάνυσμα  $\hat{\xi}_1(s)$  προσδιορίζεται μονάδικα από το διάνυσμα  $\hat{\xi}(s)$  διαμέσου της σχέσης (7.17) εαν και μόνο εαν  $\bar{\xi}(0-)-\bar{\xi}'(0-)\in\text{Ker } X_N$ . Αρα η σχέση (7.14) είναι απεικόνιση εαν και μόνο εαν

$$\text{Ker } X_{\mathcal{T}} \subseteq \text{Ker } X_N \Leftrightarrow \text{Ker} \begin{bmatrix} X_{\mathcal{T}} \\ X_N \end{bmatrix} = \text{Ker } X_{\mathcal{T}} \quad (7.21)$$

Από το θεώρημα της διάστασης των γραμμικών απεικονίσεων, η σχέση (7.21) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\text{Rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} X_{\mathcal{T}} \\ X_N \end{bmatrix} = \text{Rank}_{\mathbb{R}} X_{\mathcal{T}} \stackrel{(2.81)}{\Leftrightarrow} \delta_M \begin{bmatrix} \mathcal{T}(s) \\ \mathcal{N}(s) \end{bmatrix} = \delta_M(\mathcal{T}(s)) \quad (7.22) \quad \square$$

**Παράδειγμα 7.9** Μπορεί εύκολα να δει κανείς, από τις σχέσεις (E.1) και (E.3) στο παράδειγμα 7.7, ότι

$$\delta_M \begin{bmatrix} \mathcal{T}(s) \\ \mathcal{N}(s) \end{bmatrix} \geq \delta_M(\mathcal{T}(s)) \quad (E.1)$$

με ισότητα να ισχύει εαν και μόνο εαν  $L_1=0$ . Έτσι η σχέση (E.3) είναι μια απεικόνιση του χώρου λύσεων της (E.1) εαν και μόνο εαν  $L_1=0$  πράγμα που φαίνεται και στο παράδειγμα 7.7 και στο θεώρημα 7.8. □

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνθήκη ύπαρξης της απεικόνισης (7.14) ανάγεται στην ικανοποίηση της McMillan συνθήκης (7.20). Πιο αναλυτικά η συνθήκη (7.20) υποδεικνύει ότι το πολυωνυμικό μέρος του  $\hat{\xi}_1(s)$  είναι μοναδικά ορισμένο από το διάνυσμα  $\hat{\xi}(s)$  και έτσι η απεικόνιση είναι σωστά ορισμένη. Το πολυωνυμικό μέρος του  $\hat{\xi}_1(s)$  στην σχέση (7.17) και συνεπώς η "κρουστική" συμπεριφορά του  $\xi_1(t)$  στην σχέση (7.14) δεν είχε μελετηθεί από τον Pernebo (1977) και γι'αυτόν τον λόγο η συνθήκη (7.20) δεν παίζει σημαντικό ρόλο στην μελέτη της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας.

Το θεώρημα 7.8 επίσης εξηγεί γιατί ένας μετασχηματισμός μεταξύ του χώρου λύσεων ενός γενικού ομογενούς συστήματος της μορφής (7.12) και ενός ομογενούς συστήματος της μορφής  $E\dot{x}(t) = Ax(t)$  μπορεί να μην περιέχει παραγώγους. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι αυτό υπάρχει ως υπόθεση ως τώρα στην βιβλιογραφία (Wolovich 1974, Hayton *et al.* 1986) αλλά χωρίς καμία απόδειξη.

**Θεώρημα 7.10** Θεωρείστε τα ακόλουθα συστήματα

$$\Sigma_1 : T(\rho) \xi(t) = 0 \quad ; \quad \Sigma_2 : E\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (7.23)$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση της μορφής

$$\xi(t) = N(\rho) x(t) \quad (7.24)$$

όπου  $N(\rho) = N_q \rho^q + N_{q-1} \rho^{q-1} + \dots + N_1 \rho + N_0$ . Τότε ο πίνακας  $N(\rho)$  θα είναι σταθερός.

**Απόδειξη** Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η σχέση (7.24) να είναι απεικόνιση είναι σύμφωνα με το θεώρημα 7.8 η εξής

$$\delta_M \begin{bmatrix} \rho E - A \\ N(\rho) \end{bmatrix} = \delta_M (\rho E - A) \stackrel{(2.81)}{\Leftrightarrow} \text{Rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ -N_q & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1 & N_2 & \dots & N_q \end{bmatrix} = \text{Rank}_{\mathbb{R}}[E] \Leftrightarrow$$

$$N_1 = H E \quad ; \quad N_i = 0 \quad i=2,3,\dots,q \quad (7.25)$$

για κάποιον σταθερό πίνακα  $H$  και συνεπώς η σχέση (7.24) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\xi(t) = (N_0 + HE\rho) x(t) \stackrel{(7.23)}{=} (N_0 + HA) x(t) \quad (7.26) \square$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι και το θεώρημα 7.8 και το θεώρημα 7.10 ισχύουν και στην περίπτωση των ιδίμορφων ομογενών συστημάτων. Οι αποδείξεις θα είναι οι ίδιες.

Από τον ορισμό του χώρου  $B_1$  τώρα έχουμε ότι η σχέση (7.14) είναι ένας επιμορφισμός όταν φυσικά ορίζεται καλώς πρδ. ικανοποιεί την συνθήκη (7.20). Θα ήταν αρμόζων τώρα να δούμε κάτω από ποιές συνθήκες η απεικόνιση (7.14) είναι και αντιστρέψιμη και συνεπώς η απεικόνιση (7.14) είναι ένας ισομορφισμός.

**Θεώρημα 7.11** Η σχέση (7.14) είναι ένας μοιμορφισμός από τον χώρο  $B$  στον χώρο  $B_1$  εαν και μόνο εαν ισχύει η McMillan συνθήκη (7.20) και ο πολυωνυμικός πίνακας  $[T(s)^T \ N(s)^T]^T$  δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $CU\{\infty\}$ .

**Απόδειξη** Ας σημειώσουμε εδώ ότι η συνθήκη (7.20) είναι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε η σχέση (7.14) να είναι απεικόνιση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν δύο λύσεις  $\xi(t)$  και  $\xi'(t)$  από τον χώρο  $B$  που αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες  $\bar{\xi}(0-)$  και  $\bar{\xi}'(0-)$  και πολυωνυμικά διανύσματα  $\hat{a}_T(s)$ ,  $\hat{a}'_T(s)$ ,  $\hat{a}_N(s)$ ,  $\hat{a}'_N(s)$  και έχουν ως εικόνα διαμέσου της απεικόνισης (7.14) το διάνυσμα  $\xi_1(t) \in B_1$ . Τότε από (7.16) και (7.17) θα έχουμε ότι

$$T(s) (\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s)) = (\hat{a}_T(s) - \hat{a}'_T(s)) \quad (7.27)$$

$$0 = N(s) (\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s)) - (\hat{a}_N(s) - \hat{a}'_N(s)) \quad (7.28)$$

Τώρα μια αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε οι πίνακες  $T(s)$  και  $N(s)$  να μην έχουν κοινά πεπερασμένα μηδενικά είναι να υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $\bar{R}_1(s)$  και  $\bar{R}_2(s)$  καταλλήλων διαστάσεων τέτοιοι ώστε (Λήμμα 3.6)

$$\bar{R}_1(s)T(s) + \bar{R}_2(s)N(s) = I_p \quad (7.29)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δύο μέλη της σχέσης (7.29) με  $\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s)$  και αντικαθιστώντας από τις σχέσεις (7.27) και (7.28) παίρνουμε ότι

$$\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s) = \bar{R}_1(s) \{ \hat{a}_T(s) - \hat{a}'_T(s) \} + \bar{R}_2(s) \{ \hat{a}_N(s) - \hat{a}'_N(s) \} \quad (7.30)$$

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέρος της σχέσης (7.30) είναι πολυωνυμικό και συνεπώς θα πρέπει να έχουμε

$$\boxed{\text{s.p.}(\bar{\xi}(s) - \bar{\xi}'(s)) = 0} \quad (7.31)$$

όπου s.p. σημαίνει το αυστηρά ρητό μέρος της συγκεκριμένης συνάρτησης. Η συνθήκη (7.31) μας δείχνει λοιπόν ότι εάν οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $N(\rho)$  δεν έχουν κοινά πεπερασμένα μηδενικά τότε τα "πεπερασμένα" μέρη των λύσεων  $\xi(t)$  και  $\xi'(t)$  της σχέσης (7.12) απεικονίζονται μοναδικά στο διάνυσμα  $\hat{\xi}_1(t)$ .

Τώρα μια αναγκαία και καινή συνθήκη έτσι ώστε οι πίνακες  $T(s)$  και  $N(s)$  να μην έχουν κοινά μηδενικά στο  $s = \infty$  είναι να υπάρχουν καινικοί ρητοί πίνακες  $R_1(s)$  και  $R_2(s)$  καταλλήλων διαστάσεων τέτοιοι ώστε (Verghese 1978)

$$R_1(s)T(s) + R_2(s)N(s) = I_p \quad (7.32)$$

Επειδή οι πίνακες  $R_1(s)$  και  $R_2(s)$  είναι καινικοί ρητοί θα έχουν Laurent ανάπτυξη που θα περιέχει μόνο δυνάμεις της μορφής  $s^{-i}$  όπου  $i \in \mathbb{N}^+$  πρδ.

$$R_1(s) = R_{01} + R_{11} \frac{1}{s} + R_{21} \frac{1}{s^2} + \dots \quad (7.33\alpha)$$

$$R_2(s) = R_{02} + R_{12} \frac{1}{s} + R_{22} \frac{1}{s^2} + \dots \quad (7.33\beta)$$

Αντικαθιστώντας τώρα από τις σχέσεις (7.13), (7.15) και (7.33) στην σχέση (7.32) παίρνουμε ότι

$$(R_{01} + R_{11} \frac{1}{s} + \dots)(T_0 + T_1 \rho + \dots + T_k \rho^k) + (R_{02} + R_{12} \frac{1}{s} + \dots)(M_0 + M_1 s + \dots + M_k s^k) = I_p \quad (7.34)$$

Κάνοντας τις πράξεις στο αριστερό μέλος της σχέσεως (7.34) και εξισώνοντας τις δυνάμεις του  $s$  στα δύο μέλη της εξίσωσης (7.34) παίρνουμε ότι



$$\begin{aligned}
s^k &: R_{01}T_k + R_{02}N_k = 0 \\
s^{k-1} &: R_{11}T_k + R_{01}T_{k-1} + R_{12}N_k + R_{02}N_{k-1} = 0 \\
&: \dots\dots\dots \\
s &: R_{k-1,1}T_k + R_{k-2,1}T_{k-1} + \dots + R_{11}T_2 + R_{01}T_1 + \\
&\quad + R_{k-1,2}N_k + R_{k-2,2}N_{k-1} + \dots + R_{12}N_2 + R_{02}N_1 = 0
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Βάσει της σχέσεως (7.35) παίρνουμε την παρακάτω ταυτότητα

$$\begin{bmatrix} R_{01} & 0 & \dots & 0 \\ R_{11} & R_{01} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k-1,1} & R_{k-2,1} & \dots & R_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_k & 0 & \dots & 0 \\ T_{k-1} & T_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1 & T_2 & \dots & T_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{02} & 0 & \dots & 0 \\ R_{12} & R_{02} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k-1,2} & R_{k-2,2} & \dots & R_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_k & 0 & \dots & 0 \\ N_{k-1} & N_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1 & N_2 & \dots & N_k \end{bmatrix} = 0 \tag{7.36}$$

Εαν με  $\text{pol}(\dots)$  δηλώνουμε το πολυωνυμικό μέρος του συγκεκριμένου πίνακα τότε

$$\begin{aligned}
&\text{pol}(R_i(s)[s^{k-1}I, s^{k-2}I, \dots, I]) = \\
&= [R_{0i}s^{k-1} + R_{1i}s^{k-2} + \dots + R_{p-1,i}, R_{0i}s^{k-2} + R_{1i}s^{k-3} + \dots + R_{p-2,i}, \dots, R_{0i}] = \\
&= [s^{k-1}I, s^{k-2}I, \dots, I] \begin{bmatrix} R_{0i} & 0 & \dots & 0 \\ R_{1i} & R_{0i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k-1,i} & R_{k-2,i} & \dots & R_{0i} \end{bmatrix} \quad i=1,2 \tag{7.37}
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δύο μέλη της σχέσεως (7.36) με  $[s^{k-1}I, s^{k-2}I, \dots, I]$  και από δεξιά με  $(\bar{\xi}(0-) - \bar{\xi}'(0-))$  παίρνουμε με την βοήθεια της σχέσεως (7.37), ότι

$$\text{pol}(R_1(s)\{\hat{a}_T(s) - \hat{a}'_T(s)\} + R_2(s)\{\hat{a}_M(s) - \hat{a}'_M(s)\}) = 0 \tag{7.38}$$

Τώρα από την σχέση (7.32) εαν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της από δεξιά με  $\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s)$  παίρνουμε ότι

$$\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s) = R_1(s)T(s)\{\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s)\} + R_2(s)N(s)\{\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s)\} \quad (7.39)$$

Με την βοήθεια των σχέσεων (7.27) και (7.28) η σχέση (7.39) γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s) = R_1(s)\{\hat{a}_T(s) - \hat{a}'_T(s)\} + R_2(s)\{\hat{a}_N(s) - \hat{a}'_N(s)\} \quad (7.40)$$

Η σχέση (7.38) μας δείχνει ότι το πολυωνυμικό μέρος του δεξιού μέλους της σχέσεως (7.40) είναι μηδέν και συνεπώς

$$\boxed{\text{pol}(\hat{\xi}(s) - \hat{\xi}'(s)) = 0} \quad (7.41)$$

Εχουμε δηλαδή από την σχέση (7.41) ότι εάν οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $N(\rho)$  δεν έχουν κοινά μηδενικά στο  $s = \omega$  τότε η "κρουστική" συμπεριφορά των  $\xi(t)$  και  $\xi'(t)$  που απεικονίζονται διαμέσου της (7.14) στο στοιχείο  $\xi_1(t)$  θα είναι η ίδια.

Ετσι από τις σχέσεις (7.20), (7.31) και (7.41) διαπιστώνουμε ότι μια αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η σχέση (7.14) να είναι μονομορφισμός είναι η σχέση (7.20) να ικανοποιείται και οι πίνακες  $T(s)$  και  $N(s)$  να μην έχουν κοινά μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ .

Για το αντίστροφο του θεωρήματος, ας υποθέσουμε ότι η σχέση (7.14) είναι ένας μονομορφισμός και ότι σε αντίθεση με το θεώρημα υπάρχει ένα κοινό πεπερασμένο μηδενικό στο σημείο  $s \in \mathbb{C}$  των πινάκων  $T(\rho)$  και  $N(\rho)$ . Τότε υπάρχει ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης του σύνθετου πολυωνυμικού πίνακα  $[T(\rho)^T, N(\rho)^T]^T$  (Vardulakis 1991) τέτοιος ώστε

$$\begin{bmatrix} T(\rho) \\ N(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(\rho) \\ N_0(\rho) \end{bmatrix} X(\rho) \quad (7.42)$$

όπου  $X(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{P \times P}$  είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του πίνακα  $[T(\rho)^T, N(\rho)^T]^T$  και  $T_0(\rho)$ ,  $N_0(\rho)$  είναι δεξιά πρώτοι. Εστω  $z_2(t)$  είναι μια μη μηδενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$X(\rho)z(t) = 0 \quad (7.43)$$

Εστω επίσης  $z_1(t)$  μια λύση της (7.12) η οποία απεικονίζεται διαμέσου της (7.14) στο διάνυσμα  $\xi_1(t)$ . Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το διάνυσμα  $\xi(t) = z_1(t) + z_2(t)$  επίσης

απεικονίζεται στο  $\xi_1(t)$  και συνεπώς η απεικόνιση (7.14) δεν είναι αντιστρέψιμη, το οποίο μας οδηγεί σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

Κατά τον ίδιο τρόπο εαν υποθέσουμε ότι ο πίνακας  $[T(\rho)^T, N(\rho)^T]^T$  περιέχει μηδενικά στο  $s=\omega$  τότε σύμφωνα με τον (Walker 1988) υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $Y(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times p}$  τέτοιος ώστε

$$\begin{bmatrix} T(\rho) \\ N(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(\rho) \\ N_1(\rho) \end{bmatrix} X(\rho) \quad (7.44)$$

όπου ο πίνακας  $[T_1(\rho)^T, N_1(\rho)^T]^T$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $s=\omega$ . Εαν τώρα  $z_2(t)$  είναι μια "κρουστική" λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (κεφ. 6)

$$Y(\rho)z(t) = 0 \quad (7.45)$$

και  $z_1(t)$  είναι μια "κρουστική" λύση της (7.12), τότε και η  $z_1(t)$  και η  $\xi(t) = z_1(t) + z_2(t)$  απεικονίζονται στο ίδιο διάνυσμα  $\xi_1(t)$ . Έτσι η απεικόνιση (7.14) δεν είναι αντιστρέψιμη, που ξανά μας οδηγεί σε άτοπο. Συνεπώς διατυπώσαμε με άτοπο απαγωγή από τα παραπάνω ότι οι συνθήκες του θεωρήματος 7.11 είναι εκτός από αναγκαίες και ικανές που αποδεικνύει και το θεώρημα μας.  $\square$

Θα δείξουμε τώρα πως μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα  $\xi(t)$   $t \geq 0$ , κάτω από τον αντίστροφο μετασχηματισμό του ισομορφισμού (7.14), εαν ξέρουμε το διάνυσμα  $\xi_1(t)$  για  $t > 0$ .

**Αλγόριθμος 7.12** Εαν ο πολυωνυμικός πίνακας  $[T(\rho)^T, N(\rho)^T]^T$  δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά τότε υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $\bar{R}_1(\rho)$  και  $\bar{R}_2(\rho)$  καταλλήλων διαστάσεων τέτοιοι ώστε

$$\bar{R}_1(\rho)T(\rho) + \bar{R}_2(\rho)N(\rho) = I_p \quad (7.46)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσεως (7.46) από δεξιά με το διάνυσμα  $\xi(t)$  παίρνουμε

$$\bar{R}_1(\rho)\mathcal{I}(\rho)\xi(t) + \bar{R}_2(\rho)N(\rho)\xi(t) = \xi(t) \Rightarrow \bar{R}_2(\rho)\xi_1(t) = \xi(t) \quad (7.47)$$

Επειδή το  $\xi_1(t)$  είναι γνωστό για  $t \geq 0^-$ , το  $R_2(\rho)\xi_1(t)$  ορίζεται για  $t > 0$ , και έτσι το "πεπερασμένο" μέρος του  $\xi(t)$  μπορεί να δημιουργηθεί. Εάν τώρα ο πίνακας  $[\mathcal{I}(s)^T \ N(s)^T]^T$  δεν έχει μηδενικά στο  $s = \infty$  τότε θα υπάρχουν καινουργικοί ρητοί πίνακες  $\bar{R}_1(s)$  και  $\bar{R}_2(s)$  καταλλήλων διαστάσεων τέτοιοι ώστε

$$R_1(s)\mathcal{I}(s) + R_2(s)N(s) = I_p \quad (7.48)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσεως (7.48) με  $\hat{\xi}(s)$  έχουμε

$$\begin{aligned} R_1(s)\mathcal{I}(s)\hat{\xi}(s) + R_2(s)N(s)\hat{\xi}(s) &= \hat{\xi}(s) \quad (7.17) \\ R_1(s)\hat{a}_{\mathcal{I}}(s) + R_2(s)[\hat{\xi}_1(s) + \hat{a}_N(s)] &= \hat{\xi}(s) \quad (7.49) \end{aligned}$$

Εάν αναπαραστήσουμε τα  $R_1(s)$ ,  $R_2(s)$  σύμφωνα με την σχέση (7.33), τότε από τις σχέσεις (7.36), (7.37) και (7.49) έχουμε

$$\begin{aligned} \text{pol}[R_1(s)\hat{a}_{\mathcal{I}}(s) + R_2(s)\hat{a}_N(s)] + \text{pol}[R_2(s)\hat{\xi}_1(s)] &= \text{pol}[\hat{\xi}(s)] \Rightarrow \\ \text{pol}[\hat{\xi}(s)] &= [s^{k-1}I, s^{k-2}I, \dots, I] \left[ \begin{array}{ccc|ccc} R_{01} & 0 & \dots & 0 & T_k & 0 & \dots & 0 \\ R_{11} & R_{01} & \dots & 0 & T_{k-1} & T_k & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{k-1,1} & R_{k-2,1} & \dots & R_{01} & T_1 & T_2 & \dots & T_k \end{array} \right] + \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} R_{02} & 0 & \dots & 0 & N_k & 0 & \dots & 0 \\ R_{12} & R_{02} & \dots & 0 & N_{k-1} & N_k & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{k-1,2} & R_{k-2,2} & \dots & R_{02} & N_1 & N_2 & \dots & N_k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \xi(0^-) \\ \xi^{(1)}(0^-) \\ \vdots \\ \xi^{(k-1)}(0^-) \end{array} \right] + \text{pol}[R_2(s)\hat{\xi}_1(s)] &\Rightarrow \\ \text{pol}[\hat{\xi}(s)] &= \text{pol}[R_2(s)\hat{\xi}_1(s)] \quad (7.50) \end{aligned}$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι το δεξιό μέρος της σχέσης (7.50) είναι γνωστό αφού το διάνυσμα  $\xi_1(t)$  είναι γνωστό για  $t \geq 0^-$  (και συνεπώς το διάνυσμα  $\hat{\xi}_1(s)$  είναι γνωστό). Το "κρουστικό" μέρος του  $\xi(t)$  στο  $t=0^-$  άρα υπολογίστηκε.

Αρα από τις σχέσεις (7.47) και (7.50) η πλήρης λύση  $\xi(t)$  της σχέσεως (7.12) υπολογίστηκε. Η McMillan συνθήκη (7.20) μας εγγυάται ότι η λύση  $\xi(t)$  που θα πάρουμε θα είναι μοναδική.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.13** Η απουσία των πεπερασμένων μηδενικών του πίνακα  $[T(s)^T N(s)^T]^T$  μας δίνει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη του μοναδικά ορισμένου "πεπερασμένου" μέρους του  $\xi(t)$  μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού της (7.14), ενώ η McMillan συνθήκη (7.20) μαζί με την απουσία των μηδενικών στο  $s=\infty$  του πίνακα  $[T(s)^T N(s)^T]^T$  εγγυώνται την ύπαρξη του μοναδικά ορισμένου "κρουστικού" μέρους του  $\xi(t)$  μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού της (7.14).  $\square$

Ένα παράδειγμα όπου φαίνεται ο παραπάνω αλγόριθμος είναι το παρακάτω

**Παράδειγμα 7.14** Θεωρείστε το παρακάτω ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} = 0 \quad (\text{E.2})$$

με λύση

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \xi_1(0^-) \\ \xi_3(0^-) \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

και έστω η ακόλουθη σχέση

$$y(t) = \underbrace{(1 \quad 1 \quad 0)}_{N(\rho)} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = \xi_1(t) + \xi_2(t) = e^t \xi_1(0^-) + \xi_3(0^-) \delta(t) \quad (\text{E.3})$$

Μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι

$$\delta_M \begin{bmatrix} T(\rho) \\ N(\rho) \end{bmatrix} = \delta_M \begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \\ -\bar{1} & -\bar{1} & -0 \end{bmatrix} = 2 = \delta_M \begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_M(T(\rho)) \quad (\text{E.4})$$

και έτσι η σχέση (E.3) είναι μια απεικόνιση (Θεώρημα 7.8). Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο σύνθετος πολυωνυμικός πίνακας

$$\begin{bmatrix} T(\rho) \\ N(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \\ -\bar{1} & -\bar{1} & -0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά και συνεπώς υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $R_1(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{3 \times 3}$  και  $R_2(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{3 \times 1}$  τέτοιοι ώστε

$$(R_1(\rho) \quad R_2(\rho)) \begin{bmatrix} T(\rho) \\ N(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \rho & | & 1 \\ 0 & 1 & -\rho & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \\ -\bar{1} & -\bar{1} & -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

Σύμφωνα με την σχέση (7.47) θα έχουμε ότι

$$\xi(t) = R_2(\rho) \xi_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) = \begin{bmatrix} e^t \xi_1(0^-) + \xi_3(0^-) \delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

Από αυτήν την σχέση μόνο το "πεπερασμένο" μέρος της  $\xi(t)$  μπορούμε να πάρουμε και συνεπώς

$$\xi_s(t) = \begin{bmatrix} e^t \xi_1(0-) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2.8})$$

Ο σύνθετος πίνακας  $[T(\rho)^T \ N(\rho)^T]^T$  δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$  και συνεπώς υπάρχουν δύο κανονικοί ρητοί πίνακες  $R_1(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{3 \times 3}$  και  $R_2(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)^{3 \times 1}$  τέτοιοι ώστε

$$(R_1(s) \ R_2(s)) \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Αρα από την σχέση (7.50) θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{pol}(\xi(s)) &= \text{pol}(R_2(s)\xi_1(s)) = \text{pol}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y(s) \right) = \\ &= \text{pol}\left[ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{s-1} \xi_1(0-) + \xi_3(0-) \\ 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_3(0-) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

και άρα το "κρουστικό" μέρος της  $\xi(t)$  θα είναι

$$\xi_f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_3(0-)\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

Αρα από (E.8) και (E.11) παίρνουμε την λύση  $\xi(t)$  του συστήματος (E.1)

$$\xi(t) = \xi_s(t) + \xi_f(t) = \begin{bmatrix} e^t \xi_1(0-) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_3(0-)\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \xi_1(0-) \\ \xi_3(0-)\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \square \text{ (E.12)}$$

**Παρατήρηση 7.15** Στην περίπτωση που ο πίνακας  $T(\rho)$  στην σχέση (7.12) δεν ήταν κανονικός δηλ.  $T(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} T(\rho) = r$  όπου όχι κατ'ανάγκη  $p=m=r$ , και  $N(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{q \times m}$ , τότε μια ακόμη συνθήκη θα πρέπει να προστεθεί στις συνθήκες του θεωρήματος 7.11. Η συνθήκη αυτή είναι η εξής :  $p+q \geq m$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} [T(\rho)^T N(\rho)^T]^T = m$ . Η συνθήκη αυτή μαζί με την απουσία των μηδενικών του πολυωνυμικού πίνακα  $[T(\rho)^T N(\rho)^T]^T$  στην περιοχή  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  είναι σ'αυτήν την ιδίομορφη περίπτωση αναγκαία για την ύπαρξη των δύο πολυωνυμικών  $\{\bar{R}_1(s), \bar{R}_2(s)\}$  ή αντίστοιχα κανονικών ρητών πινάκων  $\{R_1(s), R_2(s)\}$  τέτοιων ώστε να δείξουμε σύμφωνα με την απόδειξη του θεωρήματος 7.11 την αναγκαιότητα της συνθήκης. Η συνθήκη αυτή είναι επίσης ικανή, διότι εάν  $p+q \geq m$  ή/και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} [T(\rho)^T N(\rho)^T]^T < m$  τότε σύμφωνα με το κεφάλαιο 6 το ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} T(\rho) \\ N(\rho) \end{bmatrix} \xi(t) = 0 \quad (7.51)$$

θα έχει έναν μη μηδενικό χώρο λύσεων  $\hat{B}^e$  που οφείλεται στην δεξιά μηδενική δομή του πίνακα  $[T(\rho)^T N(\rho)^T]^T$  και συνεπώς θα υπάρχουν παραπάνω από ένα  $[\xi(t)] \in \hat{B}^e$ , όπου  $[\xi(t)]$  δηλώνει την κλάση ισοδυναμίας που παράγει το  $\xi(t)$ , που θα ικανοποιούν την σχέση (7.51). Αρα η σχέση (7.14) δεν θα είναι αντιστρέψιμη. Η McMillan συνθήκη (7.20) όπως αναφέραμε και προηγουμένως ισχύει και για την περίπτωση των ιδίομορφων συστημάτων. Ο παραπάνω αλγόριθμος 7.13 ισχύει και για τα ιδίομορφα συστήματα εφόσον η επιπλέον συνθήκη που αναφέραμε ισχύει και είναι αυτός που θα μας δώσει το μοναδικό διάνυσμα  $\xi(t)$  και συνεπώς από κεφάλαιο 6.6 την κλάση ισοδυναμίας  $[\xi(t)]$ , που έχει ως απεικόνιση το διάνυσμα  $\xi_1(t)$ . □



Μπορούμε να σημειώσουμε εδώ ότι εάν η σχέση (7.14) είναι ισομορφισμός μεταξύ των χώρων  $B$  και  $B_1$  ("πεπερασμένων" και "κρουστικών" μαζί) αυτό δεν συνεπάγεται ότι ο χώρος  $B_1$  μπορεί να είναι ο χώρος ενός άλλου ομογενούς συστήματος όπως έχει αναφερθεί χαρακτηριστικά στον Pernebo (1977). Το παρακάτω παράδειγμα πιστοποιεί την άποψη αυτή.

**Παράδειγμα 7.16** Θεωρείστε το ομογενή σύστημα διαφορικών εξισώσεων του παραδείγματος 7.14

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} = 0 \quad (\text{E.1})$$

με λύση

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \xi_1(0-) \\ \xi_3(0-) \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

και την ακόλουθη απεικόνιση

$$y(t) = \underbrace{(1 \quad 1 \quad 0)}_{N(\rho)} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = \xi_1(t) + \xi_2(t) = e^t \xi_1(0-) + \xi_3(0-) \delta(t) \quad (\text{E.3})$$

Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει ομογενής διαφορική εξίσωση (σύστημα  $1 \times 1$ ) τέτοιο ώστε η  $y(t)$  να είναι λύση του. Κατά τα δεδομένα όμως του Pernebo (1977) μπορούμε να θεωρήσουμε την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$T_1(\rho) x(t) = 0 \Leftrightarrow (\rho-1) x(t) = 0 \quad (\text{E.4})$$

η οποία έχει ως λύση την  $x(t) = y_s(t)$ . Ο δε γενικευμένος αντιστρέψιμος μετασχηματισμός που συνδέει τα δύο συστήματα θα είναι

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \rho-1 & -\rho^2+\rho \end{pmatrix}}_{M(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T(\rho)} = \underbrace{(\rho-1)}_{T_1(\rho)} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{N(\rho)} \quad (\text{E.5})$$

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει ιδιόμορφο ομογενή σύστημα που να έχει ως λύση την  $y(t)$ . Εάν υπήρχε έστω  $T_1(\rho)\xi_1(t)=0$  τότε θα έπρεπε ο πίνακας  $T_1(\rho)$  να έχει την μορφή στήλης και συνεπώς να μην διαθέτει μηδενική δομή στο  $s=\infty$  ή ισοδύναμα από το κεφάλαιο 6 να μην διαθέτει κρουστική συμπεριφορά.  $\square$

Ένα άλλο ερώτημα που γεννιέται από τα παραπάνω είναι εάν θεωρήσουμε το ομογενή σύστημα (7.12) και έναν ισομορφισμό της μορφής (7.14) που στέλνει τον χώρο  $B$  στον χώρο  $B_1$ , τότε ή καλύτερα κάτω από ποιές συνθήκες μπορεί να υπάρξει ένα άλλο ομογενή σύστημα με χώρο λύσεων του  $B_1$ . Μια από τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν και δεν υπάρχει στο παραπάνω παράδειγμα είναι ότι ο αριθμός των εξόδων  $\xi_1(t)$  θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος και από το πλήθος των πεπερασμένων διαιρετών του πίνακα  $T(\rho)$  και από το πλήθος των απείρων διαιρετών του ίδιου πίνακα συν ένα. Η αιτία της συνθήκης αυτής είναι ότι το καινούργιο ομογενή σύστημα, θα πρέπει να έχει την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{\infty\}$  με αυτή του πίνακα  $T(\rho)$  (εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ δύο συστημάτων τότε αυτά είναι πλήρη ισοδύναμα και συνεπώς έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{\infty\}$  (δες θεώρημα 7.19)) και συνεπώς οι διαστάσεις αυτού του συστήματος θα πρέπει να ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη.

**Παράδειγμα 7.17** Στο παράδειγμα 7.16 είχαμε ότι

$$\frac{S^{\mathbb{C}}}{T(s)}(s) = \text{diag}[1 \ 1 \ (s-1)] \quad \text{και} \quad \frac{S^{\infty}}{T(s)}(s) = \text{diag}[s \ s \ 1/s] \quad (\text{E.1})$$

Αρα μια συνθήκη έτσι ώστε να υπάρχει ένα ομογενή σύστημα με λύση την  $y(t)$  θα πρέπει το πλήθος των εξόδων  $y(t)$  να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του  $\max(1, 1+1)=2$ , όπου το πλήθος των πεπερασμένων διαιρετών είναι ένα, ενώ το πλήθος των απείρων διαιρετών είναι επίσης 1. Η συνθήκη αυτή δεν ισχύει στο σύστημα μου λόγω του ότι το πλήθος των εξόδων είναι ένα.  $\square$

### 7.3 Μια θεμελιώδης ισοδυναμία.

Εαν οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $N(\rho)$  ικανοποιούν τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας ή ισοδύναμα τις συνθήκες του θεωρήματος 7.11 τότε η σχέση (7.14) είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα απεικόνιση. Στην περίπτωση αυτή ο διανυσματικός χώρος λύσεων  $\hat{B}$  του συστήματος (7.12) (κεφ.6, Verghese 1979, Vardulakis 1991) αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο διαστάσεως  $f := \delta_M(T(s))$  (ή πιο γενικά στα ιδιόμορφα συστήματα  $f := n + \hat{q} + \hat{e}$ ), ο οποίος διατηρείται από τον ισομορφισμό (7.14) πρδ. η διάσταση παραμένει αναλλοίωτη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο  $B_1$  είναι ο χώρος λύσεων ενός δεύτερου συστήματος της μορφής (7.12). Είναι τότε λογικό να αποκαλούμε τα δύο αυτά συστήματα "ισοδύναμα". Γι'αυτόν τον λόγο δίνουμε τον παρακάτω

**Ορισμό 7.18** (Karampetakis) Θεωρείστε δύο ομογενή συστήματα  $\Sigma_1, \Sigma_2$  συνήθων και αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$T_i(\rho) \xi_i(t) = 0 \quad i=1,2 \quad (\rho=d/dt) \quad (7.52)$$

όπου  $T_i(\rho)$   $i=1,2$  είναι τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες. Τότε τα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα λέγονται **θεμελιωδώς ισοδύναμα** (*fundamentally equivalent*) εαν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" χώρων λύσεων των δύο συστημάτων της μορφής

$$\xi_2(t) = N(\rho) \xi_1(t) \quad (7.53) \quad \square$$

Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι ο ορισμός 7.18 είναι μια γενίκευση του ορισμού ισοδυναμίας του Pernebo (1977) ο οποίος δώθηκε στο λήμμα 7.1. Ας σημειώσουμε εδώ ότι ο παραπάνω ορισμός αναφέρεται τόσο στην "πεπερασμένη" συμπεριφορά όσο και στην "κρουστική" συμπεριφορά των συστημάτων σε αντίθεση με αυτόν του Pernebo (1977).

**Θεώρημα 7.19** Εστω δύο συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής (7.52). Οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι εαν και μόνο εαν τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι θεμελιώδη ισοδύναμα.

έναν ισομορφισμό μεταξύ των χώρων λύσεων  $B_1$  και  $B_2$  των δύο συστημάτων όπως αυτός του ορισμού 7.18 της θεμελιώδους ισοδυναμίας.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.21** Εστω ο μετασχηματισμός πλήρους ισοδυναμίας (7.54)

$$M(s) T_1(s) = T_2(s) N(s) \quad (7.66)$$

Ας πάρουμε επίσης μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (7.52)

$$T_i(s) \hat{\xi}_i(s) = S_{q-1} X_{T_i} \bar{\xi}_i(0-) \quad i=1,2 \quad (7.67)$$

όπου τα  $\hat{\xi}_i(s)$ ,  $S_{q-1}$ ,  $X_{T_i}$ ,  $\bar{\xi}_i(0-)$ , και  $q = \max(q_1, q_2)$  (με  $q_i$  τον μέγιστο βαθμό του πολυωνύμου  $T_i(\rho)$ ), ορίζονται κατά τρόπο ανάλογο της σχέσεως (7.18).

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δύο μέλη της σχέσεως (7.66) με  $\hat{\xi}_1(s)$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} M(s) [T_1(s) \hat{\xi}_1(s)] &= T_2(s) [N(s) \hat{\xi}_1(s)] \stackrel{(7.67)}{\Rightarrow} \\ M(s) [S_{q-1} X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-)] &= T_2(s) [\xi_2(s) + S_{q-1} X_N \bar{\xi}_1(0-)] \stackrel{(7.67)}{\Rightarrow} \\ S_{q-1} X_{T_2} \bar{\xi}_2(0-) &= M(s) [S_{q-1} X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-)] - T_2(s) [S_{q-1} X_N \bar{\xi}_1(0-)] \end{aligned} \quad (7.68)$$

Η σχέση (7.56) είναι απεικόνιση και συνεπώς σύμφωνα με την σχέση (7.22) θα έχουμε

$$\text{Rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} X_{T_1} \\ X_N \end{bmatrix} = \text{Rank}_{\mathbb{R}} [X_{T_1}] \stackrel{\exists Q}{\Rightarrow} X_N = Q X_{T_1} \quad (7.69)$$

για κάποιον σταθερό πίνακα  $Q$  και έτσι η σχέση (7.68) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\begin{aligned} S_{q-1} X_{T_2} \bar{\xi}_2(0-) &= M(s) [S_{q-1} X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-)] - T_2(s) [S_{q-1} Q X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-)] \Rightarrow \\ S_{q-1} [X_{T_2} \bar{\xi}_2(0-)] &= [M(s) S_{q-1} - T_2(s) S_{q-1} Q] [X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-)] \end{aligned} \quad (7.70)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του  $s^i$   $i=0,1,\dots,q-1$  στην σχέση (7.70) και λαμβάνοντας υπόψη μας την σχέση (7.66) παίρνουμε ότι

( $\Leftrightarrow$ ) Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός της μορφής

$$\xi_2(t) = N(\rho) \xi_1(t) \quad (7.60)$$

μεταξύ των  $\xi_i(t)$   $i=1,2$  των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα. Εστω  $\rho E_1 - A_1$  και  $\rho E_2 - A_2$  είναι δύο πλήρως ισοδύναμοι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες των  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  αντίστοιχα (κεφ.5, Hayton *et al.* 1989). Τότε υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(\rho)$  και  $N$  καθώς και  $M'$  και  $N'(\rho)$  τέτοιοι ώστε

$$M(\rho) (\rho E_1 - A_1) = T_1(\rho) N \quad (7.61)$$

και

$$M' T_2(\rho) = (\rho E_2 - A_2) N'(\rho) \quad (7.62)$$

όπου οι πίνακες  $N$  και  $M'$  είναι απαραίτητως σταθεροί πίνακες από το θεώρημα 7.8. Από την συμμετρική ιδιότητα των σχέσεων (7.61) και (7.62) έχουμε ότι οι απεικονίσεις

$$x_2(t) = N'(\rho) \xi_2(t) \quad ; \quad \xi_1(t) = N x_1(t) \quad (7.63)$$

είναι ισομορφισμοί, όπου  $x_i(t) : (\rho E_i - A_i) x_i(t) = 0 \quad i=1,2$ . Ετσι από τις σχέσεις (7.60) και (7.62) παίρνουμε τον ισομορφισμό

$$x_2(t) = [N'(\rho) \cdot N(\rho) \cdot N] x_1(t) \quad (7.64)$$

όπου τώρα ο πίνακας  $[N'(\rho) \cdot N(\rho) \cdot N]$  θα πρέπει να είναι σταθερός από το θεώρημα 7.10. Ετσι από το θεώρημα 7.4 οι πίνακες  $(\rho E_1 - A_1)$  και  $(\rho E_2 - A_2)$  θα είναι τέλεια ισοδύναμοι ή ισοδύναμα πλήρως ισοδύναμοι. Οι επόμενες σχέσεις λοιπόν ισχύουν

$$T_1(\rho) \overset{\text{πλήρως}}{\underset{\text{ισοδύναμος}}{\sim}} \rho E_1 - A_1 \overset{\text{πλήρως}}{\underset{\text{ισοδύναμος}}{\sim}} \rho E_2 - A_2 \overset{\text{πλήρως}}{\underset{\text{ισοδύναμος}}{\sim}} T_2(\rho) \quad (7.65)$$

Από την μεταβατική ιδιότητα λοιπόν της πλήρους ισοδυναμίας (Walker 1988) οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.20** Εάν στο θεώρημα 7.19, τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  συνδέονται με τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας (7.54) τότε η σχέση  $\xi_2(t) = N(\rho) \xi_1(t)$  θα είναι

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Εστω ότι οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι, τότε από τον ορισμό 3.22, υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(\rho)$  και  $N(\rho)$  τέτοιοι ώστε

$$M(\rho) T_1(\rho) = T_2(\rho) N(\rho) \quad (7.54)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με  $\xi_1(t)$  και τις δύο πλευρές της σχέσεως (7.54) παίρνουμε

$$T_2(\rho) [N(\rho) \xi_1(t)] = 0 \quad (7.55)$$

και συνεπώς η σχέση

$$\hat{\xi}_2(t) = N(\rho) \xi_1(t) \quad (7.56)$$

μας δίνει μια λύση του ομογενούς συστήματος  $\Sigma_2$ . Από τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας θα έχουμε ότι

$$\delta_M \begin{bmatrix} T_1(\rho) \\ N(\rho) \end{bmatrix} = \delta_M(T_1(\rho)) \quad (7.57)$$

το οποίο από θεώρημα 7.8 μας εγγυάται ότι η σχέση (7.56) είναι απεικόνιση. Η συνθήκη ότι ο σύνθετος πίνακας  $[T_1(\rho)^T N(\rho)^T]^T$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  μας δίνει από το θεώρημα 7.11 ότι η απεικόνιση (7.56) είναι ένας μοιμορφισμός (ο οποίος δεν είναι κατ'ανάγκη επιμορφισμός) μεταξύ των χώρων λύσεων  $B_1$ ,  $B_2$  των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα. Οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  είναι τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι και η πλήρη ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας για το σύνολο αυτών των πινάκων (Walker 1988). Έτσι από την συμμετρική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας και κατά τον ίδιο τρόπο που αναφέραμε προηγουμένως, υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M'(\rho)$  και  $N'(\rho)$  τέτοιοι ώστε

$$M'(\rho) T_2(\rho) = T_1(\rho) N'(\rho) \quad (7.58)$$

και συνεπώς η σχέση

$$\hat{\xi}_1(t) = N'(\rho) \xi_2(t) \quad (7.59)$$

είναι ένας μοιμορφισμός μεταξύ των χώρων  $B_2$  και  $B_1$  και άρα από λήμμα 2.2 οι σχέσεις (7.56) και (7.58) θα είναι ισομορφισμοί.

$$X_{T_2} \bar{\xi}_2(0-) = \left[ \begin{array}{cccc} M_0 & M_1 & \cdots & M_{q-1} \\ 0 & M_0 & \cdots & M_{q-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cccc} T_{02} & T_{12} & \cdots & T_{q-1,2} \\ 0 & T_{02} & \cdots & T_{q-2,2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{02} \end{array} \right] Q \Big] X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-) \Rightarrow$$

$$X_{T_2} \bar{\xi}_2(0-) = (\tilde{M} + \tilde{T}_2 Q) X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-) \quad (7.71)$$

όπου  $M(s) = M_0 + M_1 s + \cdots + M_f s^f$  και  $M_i = 0$  για  $i = f+1, \dots, q-1$  εάν  $f < q$ . Η σχέση (7.71) θα είναι μια ένα προς ένα και επί απεικόνιση μεταξύ των αρχικών συνθηκών των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  λόγω του ότι η απεικόνιση που χρησιμοποιήσαμε  $\xi_2(t) = N(\rho) \xi_1(t)$  είναι από το θεώρημα 7.19 ένας ισομορφισμός.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.22** Η θεμελιώδης ισοδυναμία σύμφωνα με το θεώρημα 7.19 ταυτίζεται με την πλήρη ισοδυναμία ή ισοδύναμα ορίζουν την ίδια κλάση ισοδυναμίας στο σύνολο  $\mathcal{P}'_0(m, m)$  των τετράγωνων και αντιστρέψιμων πινάκων. Συνεπώς η θεμελιώδη ισοδυναμία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την "πεπερασμένη" και "άπειρη" μηδενική δομή των πινάκων  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  που ορίζουν αντίστοιχα (κεφ.6) τον "πεπερασμένο" και "κρουστικό" χώρο λύσεων των δύο συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ .  $\square$

**Παράδειγμα 7.23** Θεωρείστε τον μετασχηματισμό

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\rho & 2\rho^2+1 \\ 0 & 1 & -\rho & 2\rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} \rho+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_1(\rho)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho+1 & 1 & \rho^2+1 \\ 0 & 1 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_2(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{N(\rho)}$$

(E.1)

που είναι εύκολο να βεβαιωθεί ότι είναι ένας μετασχηματισμός πλήρους ισοδυναμίας. Θεωρείστε επίσης το ομογενή σύστημα διαφορικών εξισώσεων  $\Sigma_1$  που αντιστοιχεί στον πίνακα  $T_1(\rho)$

$$\Sigma_1 : T_1(\rho) \mathbf{x}(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.2})$$

του οποίου ο "πεπερασμένος" και "κρουστικός" χώρος λύσεων  $B_1 = B_1^C \oplus B_1^W$  (κεφ.6) έχει ως βάση την

$$X_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t), \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta^{(1)}(t) \right\} \right\rangle \quad (\text{E.3})$$

η οποία αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες της μορφής

$$\bar{\mathbf{x}}(0-) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{E.4})$$

όπου  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  και είναι αυθαίρετα, ή ισοδύναμα

$$X_{T_1} \bar{\mathbf{x}}(0-) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{E.5})$$

Θεωρείστε τώρα την σχέση

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} =: N(\rho) \mathbf{x}(t) \quad (\text{E.6})$$



η οποία προκύπτει από τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας (E.1), σύμφωνα με το θεώρημα 7.19. Επειδή η σχέση αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας είναι ένας ισομορφισμός, όπως μας εγγυάται το θεώρημα 7.11, αλλά όπως και θα δούμε στην συνέχεια.

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση (E.6) μεταφέρει την βάση  $X_1$  του χώρου  $B_1$  σε μια άλλη βάση  $X_2$

$$X_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t), \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta^{(1)}(t) \right\rangle \quad (\text{E.7})$$

και τις αρχικές συνθήκες  $\bar{x}(0-)$  της βάσης  $X_1$  του  $\Sigma_1$  σε ένα άλλο σύνολο αρχικών συνθηκών  $[\xi(0-)^T \xi^{(1)}(0-)^T]^T$  της μορφής

$$\bar{\xi}(0-) = \begin{bmatrix} \xi(0-) \\ \xi^{(1)}(0-) \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ -1 \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \\ 1 \\ 0 \\ \zeta \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{E.8})$$

όπου  $\delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}$  είναι αυθαίρετα, ή ισοδύναμα

$$X_{T_2} \bar{\xi}(0-) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{E.9})$$

Μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι ο χώρος  $B_2$  ο οποίος παράγεται από την βάση  $X_2$  είναι ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος  $\Sigma_2$  που προκύπτει από τον πίνακα  $T_2(\rho)$

$$T_2(\rho) \xi(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho+1 & 1 & \rho^2+1 \\ 0 & 1 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.10})$$

Επειδή οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  είναι τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι, η πλήρως ισοδύναμη σχέση (E.1) θα είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Θεωρείστε λοιπόν την συμμετρική πλήρως ισοδύναμη σχέση της (E.1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M'(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} \rho+1 & 1 & \rho^2+1 \\ 0 & 1 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_2(\rho)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_1(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{N'(\rho)} \quad (\text{E.11})$$

Κατά τον ίδιο τρόπο που αναφέραμε παραπάνω, η σχέση

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_3(t) \\ \mathbf{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{bmatrix} =: N'(\rho) \xi(t) \quad (\text{E.12})$$

είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός της (E.6). Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι η σχέση (E.12) είναι ένας ισομορφισμός που στέλνει την βάση  $X_2$  στην βάση  $X_1$  και συνεπώς και τον χώρο λύσεων  $B_2$  του  $\Sigma_2$  στον χώρο λύσεων  $B_1$  του  $\Sigma_1$ . Σημειώστε ότι

$$\mathbf{x}(t) = [N'(\rho)N(\rho)] \mathbf{x}(t) \quad (\text{E.13})$$

και

$$N'(\rho)N(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I_4 \quad (\text{E.14})$$

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι

$$\xi(t) = [N(\rho) N'(\rho)] \xi(t) \quad (\text{E.15})$$

και

$$N(\rho) N'(\rho) = I_3 \quad (\text{E.16})$$

Δεδομένου ότι

$$\begin{aligned} M(\rho) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\rho & 2\rho^2+1 \\ 0 & 1 & -\rho & 2\rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rho + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rho^2 = \\ &= M_0 + M_1 \rho + M_2 \rho^2 \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned} T_2(\rho) &= \begin{bmatrix} \rho+1 & 1 & \rho^2+1 \\ 0 & 1 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rho + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rho^2 = \\ &= T_{02} + T_{12} \rho + T_{22} \rho^2 \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$N(\rho) = N \in \mathbb{R}^{3 \times 4} \stackrel{(7.69)}{\Rightarrow} Q = 0 \quad (\text{E.19})$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε το συμπέρασμα 7.21 και συνεπώς να έχουμε τον παρακάτω ισομορφισμό μεταξύ των αρχικών συνθηκών των δύο συστημάτων

$$X_{T_2} \bar{\xi}_2(0-) = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 \\ 0 & M_0 \end{bmatrix} X_{T_1} \bar{\xi}_1(0-) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} T_{22} & 0 \\ T_{12} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(0-) \\ \xi^{(1)}(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 \\ 0 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0-) \\ x^{(1)}(0-) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1(0-) \\ \xi_2(0-) \\ \xi_3(0-) \\ \xi_1^{(1)}(0-) \\ \xi_2^{(1)}(0-) \\ \xi_3^{(1)}(0-) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \times$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1(0-) \\ x_2(0-) \\ x_3(0-) \\ x_4(0-) \\ x_1^{(1)}(0-) \\ x_2^{(1)}(0-) \\ x_3^{(1)}(0-) \\ x_4^{(1)}(0-) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \xi_3(0) \\ \xi_3(0) \\ 0 \\ \xi_1(0-) + \xi_3^{(1)}(0-) \\ \xi_3^{(1)}(0-) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4(0-) \\ -x_4(0-) \\ 0 \\ x_1(0-) + x_3(0-) \\ x_3(0-) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\xi_3(0-) = -x_4(0-), \xi_3^{(1)}(0-) = x_3(0-), \xi_1(0-) = x_1(0-)$$

(E.20) □

#### 7.4 Μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich.

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich (1974) για την περίπτωση των ομογενών γραμμικών συστημάτων, η οποία θα μελετά επιπλέον και την "κρουστική" συμπεριφορά των ισοδύναμων συστημάτων κάτι που δεν είχε ληφθεί υπόψη στο παρελθόν. Θα παρατηρήσουμε ότι η καινούργια αυτή ισοδυναμία ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη καθώς και την θεμελιώδη ισοδυναμία που έχουμε αναφέρει σε προηγούμενα κεφάλαια.

Θεωρείστε ένα γραμμικό ομογενές σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$(\Sigma_1) : T(\rho) \xi(t) = 0 \quad (7.52)$$

όπου  $T(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times p}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} T(\rho) = p$ . Εστω επίσης ένα άλλο γραμμικό ομογενές σύστημα με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μέχρι πρώτου βαθμού

$$(\Sigma_2) : E \dot{x}(t) = A x(t) \quad (7.53)$$

όπου  $\rho E - A \in \mathbb{R}[\rho]^{m \times m}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}}(\rho E - A) = m$ .

Ακολουθώντας την ορολογία του Wolovich (1974) μπορούμε να προτείνουμε τον παρακάτω

**Ορισμός 7.24** (Karampetakis) Τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  των σχέσεων (7.52) και (7.53) θα ονομάζονται "**ισοδύναμα**" (equivalent) εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός της μορφής

$$\xi(t) = C x(t) \quad C \in \mathbb{R}^{p \times m} \quad (7.54)$$

μεταξύ των χώρων λύσεων  $B_1$  και  $B_2$  των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.25** Ο λόγος που θεωρήσαμε ως "ισοδύναμο" του συστήματος  $\Sigma_1$  το σύστημα  $(\rho E - A)x(t) = 0$  όπου  $\text{rank}_{\mathbb{R}} E \leq m$  και όχι ένα σύστημα της μορφής  $(\rho I_m - A)x(t) = 0$  είναι διότι στο πρώτο μπορεί να εμπεριέχεται και "πεπερασμένη" αλλά και "κρουστική" συμπεριφορά σε αντίθεση με το δεύτερο σύστημα που εμπεριέχει μόνο "πεπερασμένη" συμπεριφορά.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.26** Σύμφωνα με το θεώρημα 7.10 ο πίνακας  $C$  στην σχέση (7.54) θα πρέπει να είναι σταθερός έτσι ώστε η σχέση (7.54) να είναι απεικόνιση.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.27** Εάν  $T(\rho) = \rho E' - A'$  και τα συστήματα  $\Sigma_1, \Sigma_2$  (δες (7.52), (7.53)) είναι "ισοδύναμα" τότε οι πίνακες  $\rho E' - A'$  και  $\rho E - A$  είναι τέλεια ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Εάν  $T(\rho) = \rho E' - A'$  τότε σύμφωνα με τον ορισμό 7.3 και το θεώρημα 7.4 τα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι θεμελιώδη ισοδύναμα και συνεπώς από το λήμμα 7.5 οι πίνακες  $\rho E' - A'$  και  $\rho E - A$  θα είναι τέλεια ισοδύναμοι.  $\square$

Πάντοτε έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε από ένα σύστημα  $\Sigma_1$  της μορφής (7.52) ένα "ισοδύναμο" σύστημα  $\Sigma_2$  της μορφής (7.53), όπως φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 7.28** Κάθε σύστημα  $\Sigma_1$  της μορφής (7.52) έχει ένα "ισοδύναμο" σύστημα  $\Sigma_2$  της μορφής (7.53).

**Απόδειξη** Θεωρείστε μια "ισχυρά παρατηρήσιμη" πραγμάτωση του  $T(\rho)$  έστω  $\{I_\mu - sJ_\omega, B_\omega, C_\omega\}$  (με τον όρο "ισχυρά παρατηρήσιμη" εννοούμε ότι ο σύνθετος πίνακας  $[(I_\mu - sJ_\omega)^T C_\omega^T]^T$  δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ ), τέτοια ώστε

$$T(\rho) = C_\omega (I_\mu - sJ_\omega)^{-1} B_\omega \quad (7.55)$$

Τότε το ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$E \dot{x}(t) = A x(t) \quad (7.56)$$

όπου

$$E = \begin{bmatrix} -J_\omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+\mu) \times (p+\mu)} ; A = \begin{bmatrix} -I_\mu & -B_\omega \\ C_\omega & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p+\mu) \times (p+\mu)} \quad (7.57)$$

και

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (7.58)$$

θα έχει τις ίδιες ιδιότητες με το ομογενές σύστημα  $\Sigma_1$ . Θα δείξουμε ότι το σύστημα της μορφής (7.56) έστω  $\Sigma_2$ , είναι "ισοδύναμο" του συστήματος  $\Sigma_1$  στη σχέση (7.52). Από την σχέση (7.58) έχουμε ότι

$$\xi(t) = [0_{p\mu} \quad I_p] x(t) \quad (7.59)$$

είναι μια απεικόνιση μεταξύ των χώρων λύσεων των συστημάτων  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_1$ . Ο σύνθετος πίνακας

$$\begin{bmatrix} \rho E - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\mu - sJ_\omega & B_\omega \\ -C_\omega & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{πλήρως} \\ \sim \\ \text{ισοδύναμος} \end{matrix} \begin{bmatrix} I_\mu - sJ_\omega \\ -C_\omega \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

ικανοποιεί την McMillan συνθήκη (7.20) και δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  λόγω του ότι η πραγμάτωση  $\{I_\mu - sJ_\omega, B_\omega, C_\omega\}$  είναι ισχυρά παρατηρήσιμη και άρα από θεώρημα 7.11 η σχέση (7.59) θα είναι ένας μονομορφισμός. Μπορούμε επίσης να δούμε από τον ορισμό της σχέσεως (7.59), ότι η σχέση αυτή είναι επιπλέον και επιμορφισμός και άρα το μοντέλο (7.56) ικανοποιεί την συνθήκη του ορισμού 7.24 που αποδεικνύει το θεώρημα.  $\square$

Αυτός ο καινούργιος ορισμός ισοδυναμίας (ορισμός 7.24) είναι μια ειδική περίπτωση της θεμελιώδους ισοδυναμίας και ένας εναλλακτικός χαρακτηρισμός της πλήρους ισοδυναμίας, όπως μπορούμε να δούμε στο παρακάτω

**Θεώρημα 7.29** Τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  στις σχέσεις (7.52) και (7.53) αντίστοιχα είναι "ισοδύναμα" εάν και μόνο εάν οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $\rho E - A$  είναι πλήρως ισοδύναμοι.

**Απόδειξη**

( $\Leftarrow$ ) Θεωρείστε ότι οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $\rho E - A$  είναι πλήρως ισοδύναμοι και συνεπώς υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(\rho)$ , και  $N(\rho)$  καταλλήλων διαστάσεων τέτοιοι

ώστε

$$(M(\rho) \quad T(\rho)) \begin{bmatrix} \rho E - A \\ -N(\rho) \end{bmatrix} = 0 \quad (7.61)$$

Σύμφωνα με τις McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας θα πρέπει να έχουμε

$$\delta_M \begin{bmatrix} \rho E - A \\ -N(\rho) \end{bmatrix} = \delta_M(\rho E - A) \Leftrightarrow N(\rho) = N_0 + H \cdot E\rho \quad (7.62)$$

όπου  $H$  ένας σταθερός πίνακας, οπότε η σχέση (7.61) γράφεται ισοδύναμα ως

$$(M(\rho) \quad T(\rho)) \begin{bmatrix} \rho E - A \\ -N_0 - H \cdot E\rho \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(M(\rho) \quad T(\rho)) \begin{bmatrix} I & 0 \\ -H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho E - A \\ -N_0 - H \cdot E\rho \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(M(\rho) - T(\rho)H \quad T(\rho)) \begin{bmatrix} \rho E - A \\ -N_0 - H \cdot A \end{bmatrix} = 0 \quad (7.63)$$

το οποίο μας δίνει από το συμπέρασμα 7.20, ότι

$$\xi(t) = (N_0 + H \cdot A) x(t) \quad (7.64)$$

είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των χώρων λύσεων των δύο συστημάτων και άρα τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι "ισοδύναμα".

( $\Rightarrow$ ) Εάν τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι "ισοδύναμα" σύμφωνα με τον ορισμό 7.24, τότε προφανώς θα είναι και θεμελιώδη ισοδύναμα σύμφωνα με τον ορισμό 7.18. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα 7.19 οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $\rho E - A$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι.  $\square$

**Συμπέρασμα 7.30** Ο πίνακας  $T(\rho)$  στην σχέση (7.52) και  $\rho E - A$  στην σχέση (7.56) είναι πλήρως ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Τα συστήματα  $\Sigma_1$  στην σχέση (7.52) και  $\Sigma_2$  στην σχέση (7.56) είναι "ισοδύναμα" σύμφωνα με το θεώρημα 7.28 και άρα από το θεώρημα 7.29 οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $\rho E - A$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι.  $\square$



**Θεώρημα 7.31** Δύο πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες είναι πλήρως ισοδύναμοι εάν και μόνο εάν είναι τέλεια ισοδύναμοι.

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Θεωρείστε τους πίνακες  $T(\rho)$  και  $\rho E - A$  των σχέσεων (7.52) και (7.53). Εάν ο  $T(\rho)$  είναι πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας τότε έχουμε από το θεώρημα 7.29 ότι οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες  $T(\rho)$  και  $\rho E - A$  είναι πλήρως ισοδύναμοι και συνεπώς θα υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ των χώρων λύσεων των αντίστοιχων συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  των σχέσεων (7.52) και (7.53) της μορφής

$$x_2(t) = N x_1(t) \quad (7.65)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι θεμελιώδη ισοδύναμα ή σύμφωνα με το λήμμα 7.5 οι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί πίνακες  $T(\rho)$  και  $\rho E - A$  θα είναι τέλεια ισοδύναμοι.

( $\Leftarrow$ ) Είναι προφανές λόγω της μορφής των συνθηκών. □

Μια διαφορετική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος μπορεί κάποιος να βρεί στην εργασία των Pugh & Hayton (1990). Είναι τώρα δυνατό, βάσει των παραπάνω αποτελεσμάτων, να ορίσουμε την "ισοδυναμία" μεταξύ συστημάτων της μορφής (7.52).

**Ορισμός 7.32** (Karampetakis) Δύο γραμμικά ομογενή συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής

$$\Sigma_i: T_i(\rho) \xi_i(t) = 0 \quad i=1,2 \quad (7.66)$$

θα λέγονται "ισοδύναμα" (equivalent) εάν και μόνο εάν τα "ισοδύναμα" τους πρωτοβάθμια ομογενή συστήματα της μορφής

$$\Sigma_i': (\rho E_i - A_i) x_i(t) = 0 \quad i=1,2 \quad (7.67)$$

είναι τέτοια ώστε οι πίνακες  $\rho E_1 - A_1$  και  $\rho E_2 - A_2$  να είναι τέλεια ισοδύναμοι. □

Το θεώρημα 7.29 μπορεί να μεταφερθεί και στην περίπτωση που τα ομογενή συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι στην γενική τους μορφή (7.52).

**Θεώρημα 7.33** Δύο γενικά ομογενή συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής (7.66) είναι "ισοδύναμα" εάν και μόνο εάν οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι.

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Θεωρείστε δύο "ισοδύναμα" συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής (7.66). Εστω επίσης  $\Sigma_1'$  και  $\Sigma_2'$  τα αντίστοιχα "ισοδύναμα" τους ομογενή συστήματα της μορφής (7.67). Τότε από το θεώρημα 7.29 οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $\rho E_1 - A_1$  καθώς και  $T_2(\rho)$  και  $\rho E_2 - A_2$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι. Σύμφωνα με τον ορισμό 7.32 θα έχουμε ότι οι πολυωνυμικοί πίνακες  $\rho E_1 - A_1$  και  $\rho E_2 - A_2$  θα είναι τέλεια ισοδύναμοι ή από το θεώρημα 7.31 πλήρως ισοδύναμοι. Συνοψίζοντας τα παραπάνω θα έχουμε

$$T_1(\rho) \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \rho E_1 - A_1 \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \rho E_2 - A_2 \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} T_2(\rho) \quad (7.68)$$

Από την μεταβατική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας (για τετράγωνους και αντιστρέψιμους πολυωνυμικούς πίνακες) θα έχουμε ότι οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι.

( $\Leftarrow$ ) Εστω δύο συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής (7.66) όπου οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι και έστω  $\Sigma_1'$  και  $\Sigma_2'$  τα αντίστοιχα "ισοδύναμα" τους ομογενή συστήματα της μορφής (7.67). Από το θεώρημα 7.29 οι πίνακες  $T_1(\rho)$  και  $\rho E_1 - A_1$  καθώς και  $T_2(\rho)$  και  $\rho E_2 - A_2$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι. Άρα θα έχουμε

$$\rho E_1 - A_1 \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} T_1(\rho) \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} T_2(\rho) \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \rho E_2 - A_2 \quad (7.69)$$

από όπου σύμφωνα με την μεταβατική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας, οι πίνακες  $\rho E_1 - A_1$  και  $\rho E_2 - A_2$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι ή από το θεώρημα 7.31 τέλεια ισοδύναμοι που αποδεικνύει το αντίστροφο του θεωρήματος.  $\square$

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα αυτού του νέου είδους ισοδυναμίας είναι όπως φαίνεται από το θεώρημα 7.33 ότι ορίζει την ίδια κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η πλήρης καθώς και η θεμελιώδης ισοδυναμία και συνεπώς διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στην περιοχή  $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$  των πολυωνυμικών πινάκων  $T_1(\rho)$  και  $T_2(\rho)$  που χαρακτηρίζουν τα "ισοδύναμα" γραμμικά ομογενή συστήματα.

### 7.5 Περίληψη.

Ένας εύστοχος χαρακτηρισμός του μετασχηματισμού της πλήρους ισοδυναμίας έχει επιτευχθεί στο κεφάλαιο αυτό διαμέσου ενός ισομορφισμού μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" χώρων λύσεων των ομογενών συστημάτων που ορίζουν οι πλήρως ισοδύναμοι πολυωνυμικοί πίνακες. Ο χαρακτηρισμός αυτός μας έδωσε την ευκαιρία να δώσουμε την φυσική σημασία των συνθηκών της πλήρους ισοδυναμίας στην ειδική περίπτωση των τετράγωνων και ταυτόχρονα αντιστρέψιμων πολυωνυμικών πινάκων. Έτσι για παράδειγμα η McMillan συνθήκη (3.50γ), η οποία είχε παρουσιαστεί κάπως ανθόρμητα, φαίνεται τώρα να έχει μια αρκετά θεμελιώδη σημασία.

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι η πλήρης και η θεμελιώδης ισοδυναμία, μας δίνουν μια πλήρη εικόνα του τρόπου με τον οποίο δύο ομογενή συστήματα διαφορικών εξισώσεων μπορούν να χαρακτηριστούν ως ισοδύναμα όσον αφορά και την "πεπερασμένη" αλλά και την "κρουστική" τους συμπεριφορά. Πιο συγκεκριμένα στο πεδίο της συχνότητας η πλήρης ισοδυναμία μας δίνει μια περιγραφή ισοδυναμίας υπό την μορφή πινάκων ενώ στο πεδίο του χρόνου η θεμελιώδης ισοδυναμία μας δίνει μια περιγραφή ισοδυναμίας υπό την μορφή ισομορφισμού μεταξύ των χώρων ("κρουστικών" και "πεπερασμένων") των δύο ισοδύναμων συστημάτων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο μετασχηματισμός της πλήρους ισοδυναμίας, με τους ποικίλλους χαρακτηρισμούς του, είναι το βασικό εργαλείο μετασχηματισμών για την ταυτόχρονη μελέτη και της "πεπερασμένης" και της "κρουστικής" συμπεριφοράς γραμμικών ομογενών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

Μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich (1974) επιτεύχθηκε στην ενότητα 7.4 για ομογενή γραμμικά συστήματα και αποδείχτηκε ότι ορίζει την ίδια κλάση ισοδυναμίας

με την πλήρη ισοδυναμία ενώ αποτελεί μια ειδική περίπτωση της θεμελιώδους ισοδυναμίας. Αξιόλογα αποτελέσματα αυτού του νέου είδους ισοδυναμίας είναι α) η ταύτιση της πλήρους ισοδυναμίας με την τέλεια ισοδυναμία και β) η διατήρηση της μηδενικής δομής στο  $\mathbb{C}\{s\}$  των πολυωνυμικών πινάκων που χαρακτηρίζουν τα "ισοδύναμα" γραμμικά ομογενή συστήματα.

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence. (I)., *Journal of the Australian Mathematical Society*, Ser.B, Vol.27, pp.194–222.
- [B1] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations and the pole/zero structure at infinity of non–proper and interconnected linear multivariable systems., *Int.J.Control*, Vol.33, pp.393–411.
- [C1] Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence.(II)., *Journal of the Australian Mathematical Society*, Ser. B 27, pp.223–237.
- [H1] Hayton G.E., Fretwell P. and Pugh A.C., 1986, Fundamental equivalence of generalized state–space systems. , *IEEE Trans.Auto. Control*, Vol.AC–31, No.5, pp.431–439.
- [H2] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications., *Int.J.Control*, Vol.47, pp.53–64.
- [H3] Hayton G.E., Walker A.B., Pugh A.C., 1989, On matrix pencil equivalents of a general polynomial matrix., *Int.J.Control*, 49, 1797–1987.
- [H4] Hinrichsen D. and Pratzel–Wolters D., 1980, Solution modules and system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.32, No.5, 777–802, 1980.
- [K1] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardoulakis A.I.G., 1993, An extension of the Wolovich definition of equivalence., submitted to *IEEE Trans. Auto. Control* and to *32nd IEEE CDC*.
- [P1] Pernebo L., 1977, Notes on strict system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.25, No.1, pp.21–38.

- [P2] Pugh A.C., 1976, The McMillan degree of a polynomial system matrix., *Int.J. Control*, Vol.24, pp.129–135, 1976.
- [P3] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.27, pp.657–672.
- [P4] Pugh A.C., Hayton G.E. and Fretwell P., 1987, On transformation of matrix pencils and implications in linear system theory., *Int.J.Control*, Vol.45, pp.529–548.
- [P5] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1990, On two transformations in the generalized theory of linear systems., *Mathematics Report Number A109*, Loughborough University, Loughborough.
- [P6] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, On a fundamental notion of equivalence in linear system theory., *Second IFAC Workshop on "Systems Structure and Control"*, PERGAMON PRESS, pp.356–359.
- [P7] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1993, Notions of equivalence for general linear systems., submitted to *Int. J. Control*.
- [P8] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, A fundamental notion of equivalence for linear multivariable systems., *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, (to appear in *IEEE Trans. Auto. Control*).
- [P9] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, Interpretation of a certain McMillan degree condition appearing in Control., *Proceedings of Sixth IMA Conference on Control : Modeling, Computation, Information*.
- [P10] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, On a certain McMillan degree condition appearing in Control., submitted to *IMA Journal of Control and its Information*.
- [V1] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods*, Nelson–Wiley, London, 1991.

- [V2] Vardulakis A.I.G. and Fragulis G., 1989, Infinite elementary divisors of polynomial matrices and impulsive solutions of linear homogeneous matrix differential equations., *Circuit Systems and Signal Process*, Vol.8, 357–373.
- [V3] Verghese G.C., 1978, *Infinite Frequency Behavior in Generalized Dynamical Systems*, Ph.D.Thesis, Stanford University.
- [W1] Walker A.B., 1988, *Equivalence Transformations of Linear Systems*, Ph.D.Thesis, University of Hull.
- [W2] Wolovich W.A., 1974, *Linear Multivariable Control*, (Berlin : Springer Verlag).

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 8

### ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

- 8.1 Εισαγωγή.
- 8.2 Περιγραφή Γραμμικών Πολυμεταβλητών Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.
- 8.3 Αλγεβρική δομή Πολυωνυμικών Συστημάτων στο  $\mathbb{C}$ .
- 8.4 Αλγεβρική δομή Πολυωνυμικών Συστημάτων στο  $s=\infty$ .
- 8.5 Τετράγωνα αντίστροφα συστήματα.
- 8.6 Περίληψη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 8.1 Εισαγωγή.

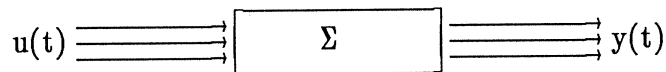
Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε μια γενική περιγραφή, υπό την μορφή πολυωνυμικών μοντέλων, των Γραμμικών Πολυμεταβλητών Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου που θα μελετήσουμε στα παρακάτω κεφάλαια. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε ορισμένα στοιχεία του γενικού αυτού πολυωνυμικού μοντέλου συστημάτων που χαρακτηρίζουν πλήρως την ομαλή και κρουστική συμπεριφορά του συστήματος. Μια γεωμετρική ερμηνεία των αναλλοίωτων μηδενικών ενός γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος, έρχεται να γενικεύσει ένα μέρος της δουλειάς των Karcnias 1975, MacFarlane & Karcnias 1976, Karcnias & Hayton 1981.

Μια ειδική κατηγορία γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων, τα τετράγωνα αντίστροφα συστήματα, που αρχικά μελετήθηκαν από τους Rosenbrock & Van Der Weiden (1977), μελετούνται στο τέλος του κεφαλαίου αυτού. Η "πεπερασμένη" και η "κρουστική" συμπεριφορά τέτοιων συστημάτων παρουσιάζει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες όπως θα δούμε στην ενότητα 8.5.



## 8.2 Περιγραφή Γραμμικών Πολυμεταβλητών Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.

Με τον όρο περιγραφή ενός συστήματος εννοούμε, γενικά, μια μαθηματική σχέση που συνδέει φυσικές ποσότητες και στοιχεία ενός συστήματος. Η μαθηματική αυτή σχέση συνθέτει το μαθηματικό μοντέλο ή πρότυπο του συστήματος. Ένα σύστημα σε λειτουργία περιλαμβάνει τα εξής τρία στοιχεία : την είσοδο  $u(t)$  (διέγερση), το σύστημα  $\Sigma$ , την έξοδο  $y(t)$  (απόκριση ή συμπεριφορά) του συστήματος.



Διάγραμμα 8.1 Περιγραφή συστήματος.

Ένα σύστημα δηλαδή είναι μια απεικόνιση  $f: X \rightarrow Y$  όπου  $X$  είναι ο χώρος εισόδων και  $Y$  είναι ο χώρος των εξόδων. Μια ειδική κατηγορία συστημάτων που θα ασχοληθούμε στην συνέχεια είναι τα γραμμικά συστήματα και είναι αυτά για τα οποία ισχύει :

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \quad \text{με } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (8.1)$$

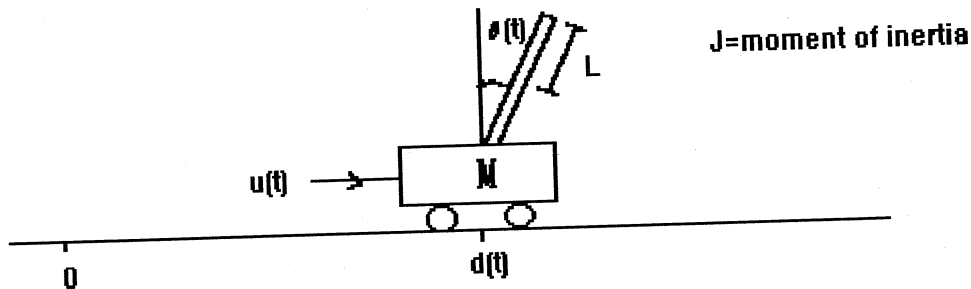
Έχει δειχθεί ότι πολλά μη γραμμικά συστήματα μπορούν να αναχθούν σε γραμμικά σε μια συγκεκριμένη περιοχή σημείου και να μελετηθούν κάτω από την θεωρία των γραμμικών συστημάτων, με αποτέλεσμα η μελέτη ενός μεγάλου πλήθους συστημάτων να ανάγεται στην μελέτη των γραμμικών συστημάτων. Ένας ακόμη διαχωρισμός συστημάτων είναι αυτός των πολυμεταβλητών συστημάτων (πολλών εισόδων – πολλών εξόδων) και των συστημάτων μιας εισόδου – μιας εξόδου. Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την κατηγορία των γραμμικών, χρονικά αμετάβλητων, πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με σταθερούς συντελεστές, συστημάτων δηλαδή που περιγράφονται με το παρακάτω μαθηματικό μοντέλο

$$A(\rho) \dot{\beta}(t) = B(\rho) u(t) \quad (8.2\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (8.2\beta)$$

όπου  $\rho := d/dt$  είναι ο τελεστής διαφόρισης,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(\rho)} A(\rho) = r$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$ ,  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ ,  $u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα εισόδου,  $u(t) \in C_p^i$  και  $\rho^i u(t)|_{t=0} =: u^{(i)}(0-)$ ,  $i=1,2,\dots,q$  είναι γνωστά για κάποια  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\beta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  είναι το διάνυσμα ψευδοκατάστασης και  $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  είναι το διάνυσμα εξόδου.

**Παράδειγμα 8.1** Το παρακάτω δυναμικό σύστημα :



περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις :

$$(J+mL^2) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - mgL \sin\theta(t) + mL \frac{d^2d(t)}{dt^2} \cos\theta(t) = 0 \quad (\text{E.1})$$

$$(M+m) \frac{d^2d(t)}{dt^2} + mL \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = u(t) \quad (\text{E.2})$$

$$y(t) = d(t) \quad (\text{E.3})$$

Εαν υποθέσουμε ότι η γωνία  $\theta(t)$  είναι πολύ μικρή έχουμε ότι  $\sin\theta(t) \cong \theta(t)$  και  $\cos\theta(t) \cong 1$  και συνεπώς το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα για γωνίες  $\theta(t)$  πολύ μικρές είναι :

$$(J+mL^2) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - mgL \theta(t) + mL \frac{d^2d(t)}{dt^2} = 0 \quad (\text{E.4})$$

$$(M+m) \frac{d^2 d(t)}{dt^2} + mL \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = u(t) \quad (\text{E.5})$$

$$y(t) = d(t) \quad (\text{E.6})$$

ή ισοδύναμα εαν  $\rho := d/dt$  ο διαφορικός τελεστής :

$$\begin{bmatrix} (J+mL^2)\rho^2 - mgL & mL\rho^2 \\ mL\rho^2 & (M+m)\rho^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.7})$$

$$y(t) = (0 \ 1) \begin{bmatrix} \theta(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.8}) \quad \square$$

**Ορισμός 8.2** Μια τετράδα πολυωνυμικών πινάκων  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$ ,  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  τέτοια ώστε  $\text{rank}_{\mathbb{R}(\rho)} A(\rho) = r$  καλείται **Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων** (Π.Π.Σ.) (Polynomial Matrix Description (PMD)) του γραμμικού συστήματος  $\Sigma$  του οποίου η δυναμική συμπεριφορά διέπεται από το σύνολο των συνήθων διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων (8.2). □

Το σύστημα των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στην σχέση (8.2) γράφεται ισοδύναμα (Verghese 1978) ως :

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & I_p \\ 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} u(t) \quad (8.3\alpha)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ I_p) \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (8.3\beta)$$

ή ισοδύναμα :

$$T(\rho) \xi(t) = \mathcal{U} u(t) \quad (8.4.\alpha)$$

$$y(t) = \mathcal{V} \xi(t) \quad (8.4.\beta)$$

όπου :

$$T(\rho) := \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & I_p \\ 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r} \times \tilde{r}} ; \mathcal{U} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r} \times m} ; \mathcal{V} := (0 \ 0 \ I_p) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times \tilde{r}} \quad (8.5)$$

με  $\tilde{r} = r + p + m$  και  $\xi(t) := [\beta(t)^T, -u(t)^T, y(t)^T]^T$  το νέο διάνυσμα ψευδοκατάστασης της καινούργιας περιγραφής.

**Ορισμός 8.3** (Verghese 1978) Η περιγραφή πολυωνυμικών πινάκων ενός γραμμικού συστήματος  $\Sigma$  της μορφής (8.3) ή ισοδύναμα (8.4) ονομάζεται **Καινική Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων** (Κ.Π.Π.Σ.) (Normalized Polynomial Matrix Description (NPMD)) του γραμμικού συστήματος  $\Sigma$ . □

**Παράδειγμα 8.4** Η καινική πολυωνυμική περιγραφή συστήματος  $\Sigma$  του παραδείγματος 8.1 είναι η παρακάτω :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} (J+mL^2)\rho^2 - mgL & mL\rho^2 & 0 & 0 \\ m\rho^2 & (M+m)\rho^2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ d(t) \\ -\bar{u}(\bar{t}) \\ -\bar{y}(\bar{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (E.1)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} \theta(t) \\ d(t) \\ -\bar{u}(\bar{t}) \\ -\bar{y}(\bar{t}) \end{bmatrix} \quad (E.2) \quad \square$$

Η κανονική πολυωνυμική περιγραφή γραμμικών συστημάτων χρησιμοποιείται όπως θα δούμε παρακάτω για την καλύτερη κατανόηση της κρουστικής συμπεριφοράς των γραμμικών συστημάτων. Εάν τώρα πάρουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των σχέσεων (8.2) υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες δηλ.  $u^{(i)}(0^-) = 0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $\beta^{(i)}(0^-) = 0 \in \mathbb{R}^r$  η σχέση (8.2) γράφεται ως

$$A(s) \hat{\beta}(s) = B(s) \hat{u}(s) \quad (8.6\alpha)$$

$$\hat{y}(s) = C(s) \hat{\beta}(s) + D(s) \hat{u}(s) \quad (8.6\beta)$$

όπου  $\hat{\beta}(s) := \mathcal{L}\{\beta(t)\}$ ,  $\hat{u}(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$ ,  $\hat{y}(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\beta(t)$ ,  $u(t)$  και  $y(t)$  αντίστοιχα. Είναι πολλές φορές βολικότερο να μελετούμε συστήματα στο πεδίο της συχνότητας από ότι στο πεδίο του χρόνου γιατί τότε τα προβλήματα μας ανάγονται σε καθαρά αλγεβρικά προβλήματα. Η σχέση (8.6) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} \quad (8.7\alpha)$$

**Ορισμός 8.5** (Rosenbrock 1970) Ο πολυωνυμικός πίνακας

$$P(s) := \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)} \quad (8.8)$$

που περιέχει όλες τις μαθηματικές πληροφορίες οι οποίες αφορούν την μελέτη του συστήματος (8.2) ονομάζεται **Rosenbrock πολυωνυμικός πίνακας** (*Rosenbrock System Matrix*) του συστήματος. □

Εάν τώρα πάρουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των σχέσεων (8.3) ή (8.4) υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες δηλ.  $u^{(i)}(0^-) = 0 \in \mathbb{R}^m$ ,  $\xi^{(i)}(0^-) = 0 \in \mathbb{R}^{\tilde{r}}$  (δηλ.

$\beta^{(i)}(0-) = 0 \in \mathbb{R}^r$  και  $u^{(i)}(0-) = 0 \in \mathbb{R}^m$ ) η σχέση (8.3) γράφεται :

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p \\ 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \hat{u}(s) \quad (8.9\alpha)$$

$$y(s) = (0 \ 0 \ I_p) \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \end{bmatrix} \quad (8.9\beta)$$

όπου  $\hat{\beta}(s) := \mathcal{L}\{\beta(t)\}$ ,  $\hat{u}(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$ ,  $\hat{y}(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $\beta(t)$ ,  $u(t)$  και  $y(t)$  αντίστοιχα. Η σχέση (8.9) γράφεται ισοδύναμα ως :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} A(s) & B(s) & 0 & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{y}(s) \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

ή

$$\begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{y}(s) \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

**Ορισμός 8.6** (Verghese 1979) Ο πολυωνυμικός πίνακας

$$\mathcal{P}(s) := \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

που περιέχει όλες τις μαθηματικές πληροφορίες οι οποίες αφορούν την μελέτη του συστήματος (8.3) (όσον αφορά την "πεπερασμένη" αλλά και την "κρουστική" συμπεριφορά του συστήματος) ονομάζεται **Καιονικός Πολυωνυμικός Πίνακας του Συστήματος**. (Normalized System Matrix).  $\square$

Παρακάτω θα αναφέρουμε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω συστημάτων.

**Ορισμός 8.7** Στην ειδική περίπτωση που η Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) έχει την μορφή :

$$\begin{aligned} A(s) &= sI_r - A \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, & B(s) &= B \in \mathbb{R}^{r \times m} \\ C(s) &= C \in \mathbb{R}^{p \times r}, & D(s) &\in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \end{aligned} \quad (8.13)$$

όπου  $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$  και συνεπώς ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος είναι ο εξής

$$P(s) := \begin{bmatrix} sI_r - A & B \\ -C & D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)} \quad (8.14)$$

τότε ονομάζουμε την Π.Π.Σ. ως Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων. Η Π.Π.Σ. του πίνακα  $P(s)$  αντιστοιχεί στις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.15\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + D(\rho)u(t) \quad (8.15\beta)$$

όπου  $x(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  καλείται το **δάνυσμα καταστάσεως** του  $\Sigma$ . Οι εξισώσεις (8.15) ονομάζονται **εξισώσεις στον χώρο των καταστάσεων**. □

**Ορισμός 8.8** Στην ειδική περίπτωση που η Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) έχει την μορφή :

$$\begin{aligned} A(s) &= sE - A \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, & B(s) &= B \in \mathbb{R}^{r \times m} \\ C(s) &= C \in \mathbb{R}^{p \times r}, & D(s) &= D \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \end{aligned} \quad (8.16)$$

όπου  $\text{rank}_{\mathbb{R}} E < r$ ,  $\det[sE - A] \neq 0$  και ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος είναι ο εξής

$$P(s) := \begin{bmatrix} sE & -A & B \\ & -C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(r+p) \times (r+m)} \quad (8.17)$$

τότε ονομάζουμε την Π.Π.Σ. ως Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Η Π.Π.Σ. του πίνακα  $P(s)$  αντιστοιχεί στις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (8.18a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (8.18\beta)$$

όπου  $x(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  καλείται το διάνυσμα καταστάσεως του  $\Sigma$ . Οι εξισώσεις (8.18) ονομάζονται εξισώσεις στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.  $\square$

**Ορισμός 8.9** Στην ειδική περίπτωση που η Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) έχει την μορφή :

$$\begin{aligned} A(s) &= A_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, & B(s) &= B_1(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m} \\ C(s) &= I_r, & D(s) &= 0_{rm} \end{aligned} \quad (8.19)$$

δηλ.  $r=p$  τότε η Π.Π.Σ. ονομάζεται ως **Αριστερά Κλασματική Π.Π.Σ.** (*left matrix fraction description*) και αντιστοιχεί στις διαφορικές εξισώσεις :

$$A_1(\rho) \beta(t) = B_1(\rho) u(t) \quad (8.20\alpha)$$

$$y(t) = \beta(t) \quad (8.20\beta) \quad \square$$

**Ορισμός 8.10** Στην ειδική περίπτωση που η Πολυωνυμική Περιγραφή Συστημάτων (Π.Π.Σ.) έχει την μορφή :



$$\begin{aligned} A(s) &= A_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, & B(s) &= I_r \\ C(s) &= B_2(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r}, & D(s) &= 0_{pr} \end{aligned} \quad (8.21)$$

δηλ.  $r=m$  τότε η Π.Π.Σ. ονομάζεται ως **Δεξιά Κλασματική Π.Π.Σ.** (*right matrix fraction description*) και αντιστοιχεί στις διαφορικές εξισώσεις :

$$A_2(\rho) \beta(t) = u(t) \quad (8.22\alpha)$$

$$y(t) = B_2(\rho) \beta(t) \quad (8.22\beta) \quad \square$$

Σημειώνουμε εδώ ότι όλες οι παραπάνω περιγραφές γραμμικών συστημάτων μπορούν να θεωρηθούν ως υποπεριπτώσεις του γενικού μοντέλου :

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (8.23\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (8.23\beta)$$

όπου  $\rho := d/dt$  είναι ο τελεστής διαφόρισης,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times n}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(\rho)} A(\rho) = \ell$ , (δηλ. ο πίνακας  $A(\rho)$  δεν είναι κατά ανάγκη τετράγωνος και αντιστρέψιμος)  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times n}$ ,  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ ,  $u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  το **διάνυσμα εισόδου**,  $u(t) \in C_p^i$  και  $\rho^i u(t)|_{t=0} =: u^{(i)}(0-)$ ,  $i=1,2,\dots,q$  είναι γνωστά για κάποια  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\beta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι το **διάνυσμα ψευδοκατάστασης** και  $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  είναι το **διάνυσμα εξόδου**. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως μια ιδίμορφη ομογενή διαφορική εξίσωση :

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (8.24)$$

και να μελετηθεί ο χώρος λύσεων—εισόδων του σύμφωνα με την θεωρία του κεφαλαίου 6.

### 8.3 Αλγεβρική δομή Πολυωνυμικών Συστημάτων στο $\mathbb{C}$ .

Εστω ένα γραμμικό πολυμεταβλητό σύστημα αυτομάτου ελέγχου που περιγράφεται με το παρακάτω μαθηματικό μοντέλο :

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (8.25\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (8.25\beta)$$

όπου  $\rho := d/dt$  είναι ο τελεστής διαφόρισης,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(\rho)} A(\rho) = r$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$ ,  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ ,  $u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  το **διάνυσμα εισόδου**,  $u(t) \in C_p^i$  και  $\rho^i u(t)|_{t=0} =: u^{(i)}(0-)$ ,  $i=1,2,\dots,q$  είναι γνωστά για κάποια  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\beta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  είναι το **διάνυσμα ψευδοκατάστασης** και  $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  είναι το **διάνυσμα εξόδου**. Στην συνέχεια θα δώσουμε μερικά χαρακτηριστικά στοιχεία Π.Π.Σ. τα οποία είναι στενά συνδεδεμένα με την "πεπερασμένη" μηδενική δομή αυτών των συστημάτων.

**Ορισμός 8.11** (Rosenbrock 1974c) Ορίζουμε ως **τάξη  $n$  (order)** ενός συστήματος τον αριθμό

$$n := \text{degree} |A(s)| = \text{degree} |T(s)| \quad (8.26) \quad \square$$

Η τάξη του γραμμικού συστήματος (8.25) όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς από το κεφάλαιο 6, συμπίπτει με την διάσταση του διανυσματικού χώρου λύσεων  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$ , της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης  $A(\rho)\beta(t)=0$  ( $T(\rho)\beta(t)=0$ ) που οφείλεται στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του πολυωνυμικού πίνακα  $A(\rho)$  ( $T(\rho)$ ). Ο διανυσματικός αυτός χώρος λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται και **ομαλός διανυσματικός χώρος λύσεων**.

**Ορισμός 8.12** (Rosenbrock 1974c) Ορίζουμε ως **βαθμό  $d_r$  (degree ή Rosenbrock degree)** του συστήματος (6.25) τον μεγαλύτερο βαθμό ανάμεσα σε όλες τις ορίζουσες της μορφής :

$$P), P_{j_1}^{i_1}), \dots, P_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_q}) \quad (8.27\alpha)$$

$$(\mathcal{P}), \mathcal{P}_{j_1}^{i_1}), \dots, \mathcal{P}_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_q}) \quad (8.27\beta)$$

όπου  $q = \min(p, m)$  και

$$P_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_q}) \quad (\mathcal{P}_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_q}) \quad (8.28)$$

δηλώνει την ορίζουσα του Rosenbrock πίνακα του συστήματος  $P(s)$  (Καινονικού Πολυωνυμικού Συστήματος) η οποία αποτελείται από τις γραμμές  $1, 2, \dots, r, r+i_1, r+i_2, \dots, r+i_q$  ( $1, 2, \dots, \tilde{r}, \tilde{r}+i_1, \tilde{r}+i_2, \dots, \tilde{r}+i_q$  όπου  $\tilde{r} = r+p+m$ ) και τις στήλες  $1, 2, \dots, r, r+j_1, r+j_2, \dots, r+j_q$  ( $1, 2, \dots, \tilde{r}, \tilde{r}+j_1, \tilde{r}+j_2, \dots, \tilde{r}+j_q$  όπου  $\tilde{r} = r+p+m$ ).  $\square$

**Ορισμός 8.13** (Rosenbrock 1974c) Εστω  $p_i(s)$  ( $p_i(s)$ ) η  $i$  στήλη του πίνακα  $P(s)$  ( $\mathcal{P}(s)$ ) και έστω  $\delta(p_i)$  ο βαθμός του  $p_i(s)$  ορίζεται ως ο μεγαλύτερος βαθμός ανάμεσα στα στοιχεία του  $p_i(s)$ . Τότε ορίζουμε ως **συμπλεκτικότητα**  $c$  του συστήματος τον αριθμό :

$$c := \sum_{i=1}^{r+m} \delta(p_i) \quad (= \sum_{i=1}^{\tilde{r}+m} \delta(p_i)) \quad (8.29) \quad \square$$

Η συμπλεκτικότητα  $c$  του συστήματος (8.25) είναι αυτή που καθορίζει τον αριθμό των αρχικών συνθηκών (όχι κατά ανάγκη ανεξαρτήτων) που χρειαζόμαστε στον μετασχηματισμό Laplace της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης :

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y(t) \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

ή ισοδύναμα :

$$\begin{bmatrix} T(\rho) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y(t) \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

**Ορισμός 8.14** (Rosenbrock 1970) Εστω

$$P(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

ο Rosenbrock πίνακας του γραμμικού συστήματος (8.25). Ορίζουμε ως **πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου (εξόδου)** (*finite input (output) decoupling zeros*) τα μηδενικά του σύνθετου πολυωνυμικού πίνακα :

$$(A(s) \ B(s)) \quad \left[ \begin{bmatrix} A(s) \\ -C(s) \end{bmatrix} \right] \quad (8.33)$$

ή ισοδύναμα :

$$(T(s) \ u) \quad \left[ \begin{bmatrix} T(s) \\ -y \end{bmatrix} \right] \quad (8.34)$$

Ορίζουμε ως **πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου** (*finite input-output decoupling zeros*) εκείνα τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου που είναι ταυτόχρονα και πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου ενώ ορίζουμε ως **πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά** του συστήματος (*finite decoupling zeros*) το σύνολο  $\{ \text{πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου} \} + \{ \text{πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου} \} - \{ \text{πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου} \}$ .  $\square$

Η ύπαρξη πεπερασμένων αποσυζευγμένων μηδενικών εισόδου και εξόδου έχει στενή σχέση με την ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα έχουμε :

**Ορισμός 8.15** (Verghese 1978, Callier & Desoer 1982) Θεωρείστε το γραμμικό πολυμεταβλητό σύστημα (8.25).

(α) Το σύστημα αυτό θα λέγεται **πεπερασμένα ελέγξιμο** (*finite controllable*) εάν και μόνο εάν υπάρχει είσοδος της μορφής  $\sum_{i=0}^m u_i \delta^{(i)}(t)$  (όπου  $u_i \in \mathbb{R}^m$ ) η οποία να παράγει κάτω από μηδενικές αρχικές συνθήκες του συστήματος (8.25α) πρδ.  $\beta^{(i)}(0^-) = 0$ , κάθε

διάνυσμα  $\beta(t)$  που ανήκει στον πεπερασμένο χώρο λύσεων  $\hat{B}^{\mathcal{C}}$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (8.25α).

(β) Το σύστημα (8.25) θα λέγεται **πεπερασμένα παρατηρήσιμο** (*finite observable*) εάν και μόνο εάν το μόνο διάνυσμα  $\beta(t)$  που ανήκει στον πεπερασμένο χώρο λύσεων  $\hat{B}^{\mathcal{C}}$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (8.25α) και ικανοποιεί την σχέση :

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) = 0_{p \times 1} \quad \forall t > 0 \quad (8.35)$$

είναι το μηδενικό διάνυσμα. □

Ο χώρος του ομογενούς συστήματος (8.25α) που οφείλεται στα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου θα είναι ο πεπερασμένος μη ελέγξιμος χώρος του συστήματος (8.25), ενώ ο χώρος του ομογενούς συστήματος (8.25α) που οφείλεται στα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου είναι ο πεπερασμένος μη παρατηρήσιμος χώρος του συστήματος (8.25).

**Θεώρημα 8.16** (Rosenbrock 1970, Verghese 1978, Callier and Desoer 1982) Το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  της σχέσης (8.25) είναι πεπερασμένα ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) εάν και μόνο εάν δεν έχει πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου (εξόδου). □

**Ορισμός 8.17** (Rosenbrock 1974c) Το γραμμικό σύστημα (8.25) θα ονομάζεται **ελάχιστης τάξης ή μη αναγώγιμο** (*least order ή irreducible*) εάν και μόνο εάν δεν έχει πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου και εξόδου ή ισοδύναμα εάν  $n = \nu(G(s))$  όπου  $G(s) := C(s)A^{-1}(s)B(s) + D(s)$ . □

**Ορισμός 8.18** (Rosenbrock 1974c) Το γραμμικό σύστημα (8.25) θα ονομάζεται **ελαχίστου βαθμού** (*least degree*) εάν και μόνο εάν είναι ελάχιστης τάξης. □

**Ορισμός 8.19** (Rosenbrock 1974c) Το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) θα ονομάζεται **ελάχιστης συμπλεκτικότητας** (*least complexity*) εάν και μόνο εάν  $c = d_r$ . □

**Ορισμός 8.20** (Rosenbrock 1974c) Το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) θα λέγεται **ελάχιστο** (minimal) εάν και μόνο εάν είναι ελαχίστης τάξης και ελαχίστης συμπλεκτικότητας ( $c = \nu(G(s)) = d_r$  όπου  $G(s) := C(s)A^{-1}(s)B(s) + D(s)$ ).  $\square$

Ένας σημαντικός ρητός πίνακας στην μελέτη γραμμικών συστημάτων της μορφής (8.25) δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 8.21** Ορίζουμε ως **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function)  $G(s)$  ενός γραμμικού συστήματος  $\Sigma$  της μορφής (8.25) τον ρητό πίνακα :

$$G(s) := C(s)A(s)^{-1}B(s) + D(s) = \mathcal{V}T(s)^{-1}\mathcal{U} \in \mathbb{R}(s)^{p \times m} \quad (8.36) \quad \square$$

Εάν πάρουμε μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (8.25) υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες  $\{\beta^{(i)}(0^-) = 0 \text{ και } u^{(i)}(0^-) = 0\}$  έχουμε ότι :

$$\hat{y}(s) = \{C(s)A^{-1}(s)B(s) + D(s)\} \hat{u}(s) \quad (8.37)$$

όπου  $\hat{y}(s)$  και  $\hat{u}(s)$  είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των  $y(t)$  και  $u(t)$ . Η συνάρτηση μεταφοράς δηλαδή του συστήματος μας δίνει μια εξωτερική εικόνα του συστήματος μια που συσχετίζει την είσοδο του συστήματος με την έξοδο του συστήματος σε αντίθεση με την ψευδοκατάσταση  $\beta(t)$  του συστήματος που μας δίνει την εσωτερική συμπεριφορά του συστήματος.

**Ορισμός 8.22** (Rosenbrock 1970) Εστω  $G(s) := C(s)A^{-1}(s)B(s) + D(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος  $\Sigma$  (8.25). Οι πόλοι της  $G(s)$  στο  $\mathbb{C}$  ονομάζονται **πεπερασμένοι πόλοι μεταφοράς του  $\Sigma$**  (finite transmission poles) ενώ τα μηδενικά της  $G(s)$  στο  $\mathbb{C}$  ονομάζονται **πεπερασμένα μηδενικά μεταφοράς του  $\Sigma$**  (finite transmission zeros).  $\square$

Η γεωμετρική ερμηνεία των πεπερασμένων πόλων και μηδενικών μεταφοράς φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα :

**Θεώρημα 8.23** (Desoer & Schulman 1974, Callier, Cheng and Desoer 1981) Εστω  $G(s) := C(s)A^{-1}(s)B(s) + D(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος  $\Sigma$  (8.25).

(α) Εάν  $p$  είναι ένας πεπερασμένος πόλος της  $G(s)$  πολ/τας  $k$  τότε υπάρχει είσοδος

$$u(t) = \sum_{i=0}^1 u_i \delta^{(i)}(t) \quad \text{με } u_i \in \mathbb{C}^m \quad (8.38)$$

τέτοια ώστε να έχω ως έξοδο

$$y(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i t^i e^{pt} + \sum_{i=0}^g \hat{u}_i \delta^{(i)}(t) \quad \forall t \geq 0, \gamma_i \in \mathbb{C}^p \quad (8.39)$$

(β) Εάν  $z$  είναι ένα μηδενικό στο  $\mathbb{C}$  της  $G(s)$  πολ/τας  $k$ , τότε υπάρχουν διανύσματα  $\xi_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $i=0,1,\dots,k-1$  τέτοια ώστε για είσοδο :

$$u(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i t^i e^{zt} + \sum_{i=0}^1 u_i \delta^{(i)}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (8.40)$$

να έχω ως έξοδο :

$$y(t) = \sum_{i=0}^g \hat{u}_i \delta^{(i)}(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (8.41) \quad \square$$

Δύο επίσης χρήσιμα χαρακτηριστικά στην μελέτη συστημάτων είναι οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος που ορίστηκαν από τον Rosenbrock (1973, 1974).

**Ορισμός 8.24** (Rosenbrock 1973, 1974a) Εστω το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) και  $P(s)$  στην σχέση (8.32) ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος. Ορίζουμε ως πεπερασμένους πόλους του συστήματος  $\Sigma$  (*finite system poles*) τα πεπερασμένα μηδενικά του πίνακα  $A(s)$  (ή ισοδύναμα  $T(s)$ ). □

**Ορισμός 8.25** (Rosenbrock 1973, 1974a) Εστω το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) και  $P(s)$  στην σχέση (8.32) ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος. Εστω επίσης οι ορίζουσες του  $P(s)$  της μορφής (8.28). Εστω  $\tilde{q}$  ικανοποιεί την σχέση  $0 \leq \tilde{q} \leq \min(p,m)$  και είναι η μεγαλύτερη τιμή του  $q$  για την οποία υπάρχει μια ορίζουσα αυτής της μορφής που δεν ταυτίζεται με το

μηδέν. Εστω  $\phi(s)$  ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των οριζουσών για τις οποίες ισχύει  $q=\tilde{q}$  και οι οποίες δεν ταυτίζονται με το μηδέν. Τότε τα μηδενικά του  $\phi(s)$  είναι τα πεπερασμένα μηδενικά του συστήματος (*finite system zeros*).  $\square$

Μια ιδιαίτερη σχέση συνδέει τα πεπερασμένα μηδενικά μεταφοράς, τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά και τα πεπερασμένα μηδενικά του συστήματος όπως επίσης και τους πεπερασμένους πόλους μεταφοράς, τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά και τους πεπερασμένους πόλους του συστήματος και φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 8.26** (Rosenbrock 1970, 1974a)

$$\begin{aligned} \{\text{Πεπερασμένα μηδενικά του } \Sigma\} &= \{\text{Πεπερασμένα μηδενικά μεταφοράς του } \Sigma\} + \\ &+ \{\text{Πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma\} \end{aligned} \quad (8.42)$$

$$\begin{aligned} \{\text{Πεπερασμένοι πόλοι του } \Sigma\} &= \{\text{Πεπερασμένοι πόλοι μεταφοράς του } \Sigma\} + \\ &+ \{\text{Πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma\} \end{aligned} \quad (8.43) \quad \square$$

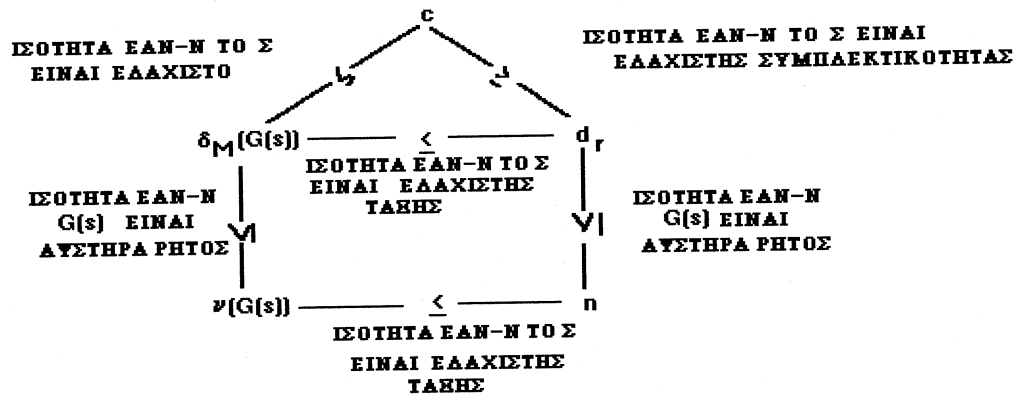
Όλα τα χαρακτηριστικά ενός γραμμικού συστήματος της μορφής (8.25) συνδέονται μεταξύ τους όπως έχει δειχθεί από τον Pugh (1974), MacFarlane and Karcnias (1976), Rosenbrock (1970,1974) και Verghese (1978) και φαίνονται στο παρακάτω θεώρημα :

**Θεώρημα 8.27** Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν μεταξύ των πεπερασμένων χαρακτηριστικών στοιχείων ενός γραμμικού συστήματος της μορφής (8.25) :

$$\begin{aligned} n &= \nu(G(s)) + \# \text{ πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \\ d_r &= \delta_M(G(s)) + \# \text{ πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \end{aligned} \quad (8.44) \quad \square$$

Συνοψίζοντας από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε το παρακάτω διάγραμμα





Διάγραμμα 8.3 Σχέσεις μεταξύ των πεπερασμένων χαρακτηριστικών στοιχείων του  $\Sigma$ .

Μια άλλη κατηγορία μηδενικών που παρουσιάζονται σε Π.Π.Σ. είναι η εξής

**Ορισμός 8.28** (Rosenbrock 1973, Walker 1988, MacFarlane & Karcnias 1976) Ορίζουμε ως πεπερασμένα αναλλοίωτα μηδενικά του συστήματος  $\Sigma$  (*finite invariant zeros*) τα πεπερασμένα μηδενικά του πίνακα Rosenbrock του συστήματος  $\Sigma$ .  $\square$

**Ορισμός 8.29** (MacFarlane & Karcnias 1976) Εστω το σύστημα (8.25) του οποίου ο Rosenbrock πολυωνυμικός πίνακας  $P(s)$  είναι ο πίνακας (8.32). Σε κάθε πεπερασμένο αναλλοίωτο μηδενικό  $z_i$  του συστήματος  $\Sigma$  αντιστοιχεί ένα διάνυσμα  $[\beta_{0i}^T, u_{0i}^T]^T$  τέτοιο ώστε

$$\begin{bmatrix} A(z) & B(z) \\ -C(z) & D(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{0i} \\ -u_{0i} \end{bmatrix} = 0 \quad (8.45)$$

Τα διανύσματα  $[\beta_{0i}^T, u_{0i}^T]^T$  θα ονομάζεται διανύσματα αναλλοίωτων μηδενικών-διευθύνσεων (*invariant zero-direction vectors*).  $\square$

Μια ερμηνεία των πεπερασμένων αναλλοίωτων μηδενικών για Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων έχουν δώσει οι Karcnias (1975) καθώς και MacFarlane & Karcnias (1976) διαμέσου του προβλήματος της μηδενικής εξόδου (*output zeroing problem*). Μια γενίκευση

αυτών των αποτελεσμάτων για συστήματα της μορφής (8.25) δίνουμε στο παρακάτω θεώρημα. Εστω

$$z = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \beta(t) \\ -u(t) \end{array} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \begin{array}{c} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{array} \right] \mid \left[ \begin{array}{cc} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \hat{\beta}(s) \\ -\hat{u}(s) \end{array} \right] = 0 \right\} \quad (8.46\alpha)$$

$$z_u = -\pi_u z \quad \text{και} \quad z_\beta = \pi_\beta z \quad (8.46\beta)$$

$$[a] = a \oplus z, \quad [a]_u = a \oplus z_u, \quad [a]_\beta = a \oplus z_\beta \quad (8.46\gamma)$$

όπου  $\pi_\beta((\beta(t))^T, (-u(t))^T)^T : (\beta(t))^T, (-u(t))^T \in z \rightarrow \beta(t)$  και  $\pi_u((\beta(t))^T, (-u(t))^T)^T : (\beta(t))^T, (-u(t))^T \in z \rightarrow -u(t)$ .

**Θεώρημα 8.30** Εστω ότι ο Rosenbrock πίνακας  $P(s)$  (8.32), του συστήματος (8.25) έχει ένα πολλαπλό αναλλοίωτο μηδενικό  $z$ , με πεπερασμένους στοιχειώδεις διαιρέτες βαθμών  $\sigma_i$ ,  $i=z, z+1, \dots, r+\rho$  (όπου  $r+\rho-z+1$  δηλώνει την γεωμετρική πολλαπλότητα του  $z$  και  $r+\rho$  δηλώνει την φυσική τάξη του πίνακα  $P(s)$ ). Τότε θα υπάρχει ένα πλήθος εισόδων της μορφής

$$[u_{iq}(t)]_u = \left[ \sum_{j=0}^{\sigma_i-1-q} u_{ij} \frac{t^{\sigma_i-q-j-1}}{(\sigma_i-q-j-1)!} e^{zt} \right]_u \quad q=0,1,\dots,\sigma_i-1 \quad i=z,z+1,\dots,r+\rho \quad (8.47\alpha)$$

τέτοια ώστε η ψευδοκατάσταση του συστήματος  $\Sigma$  να είναι της μορφής

$$[\beta_{iq}(t)]_\beta = \left[ \sum_{j=0}^{\sigma_i-1-q} \beta_{ij} \frac{t^{\sigma_i-q-j-1}}{(\sigma_i-q-j-1)!} e^{zt} \right]_\beta \quad q=0,1,\dots,\sigma_i-1 \quad i=z,z+1,\dots,r+\rho \quad (8.47\beta)$$

όπου τα διανύσματα  $[\beta_{ij}^T, -u_{ij}^T]^T$   $i=z, z+1, \dots, r+\rho$  αποτελούν πεπερασμένη αλυσίδα Jordan μήκους  $\sigma_i$  και η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 0 \quad (8.48)$$

**Απόδειξη**

Εστω το ομογενές σύστημα συνήθων και αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων

$$P(\rho) \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (8.49)$$

Ο πολυωνυμικός πίνακας  $P(\rho)$  έχει ένα πεπερασμένο μηδενικό  $z$  πολ/τας  $\sigma_i$ ,  $i=z, z+1, \dots, r+\rho$  στο οποία θα αντιστοιχεί από Πρόταση 6.6 και Σημείωση 6.41 μια αλυσίδα Jordan

$$\begin{bmatrix} \beta_{i0} \\ u_{i0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ u_{i1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \beta_{i\sigma_i-1} \\ u_{i\sigma_i-1} \end{bmatrix} \quad (8.50)$$

μήκους  $\sigma_i$  και στην οποία θα αντιστοιχούν οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς συστήματος (8.49)

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{bmatrix} \beta_{i\sigma_i-1}(t) \\ u_{i\sigma_i-1}(t) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \beta_{i1}(t) \\ u_{i1}(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_{i0}(t) \\ u_{i0}(t) \end{bmatrix} \right] = \\ & = \left[ \begin{bmatrix} \beta_{i0} \\ u_{i0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ u_{i1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \beta_{i\sigma_i-1} \\ u_{i\sigma_i-1} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & \frac{t!}{1} & \dots & \frac{t^{\sigma_i-2}}{(\mu-1)!} & \frac{t^{\sigma_i-1}}{\mu!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{\sigma_i-3}}{(\mu-2)!} & \frac{t^{\sigma_i-2}}{(\mu-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_0 t} \quad (8.51) \end{aligned}$$

Αρα θα υπάρχουν  $u(t)$  και  $\beta(t)$  της μορφής (8.46) και (8.47) αντίστοιχα που θα μας δώσουν απόκριση μηδενική που αποδεικνύει το θεώρημα.  $\square$

**Παρατήρηση 8.31** Από το παραπάνω θεώρημα παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας διανυσματικός χώρος εισόδων

$$u_0^C = \langle [u_{iq}(t)]_u = \left[ \sum_{j=0}^{\sigma_i-1-q} u_{ij} \frac{t^{\sigma_i-q-j-1}}{(\sigma_i-q-j-1)!} e^{zt} \right]_u \text{ όπου } q=0,1,\dots,\sigma_i-1 \text{ } i=z,z+1,\dots,r+\rho \rangle \quad (8.52)$$

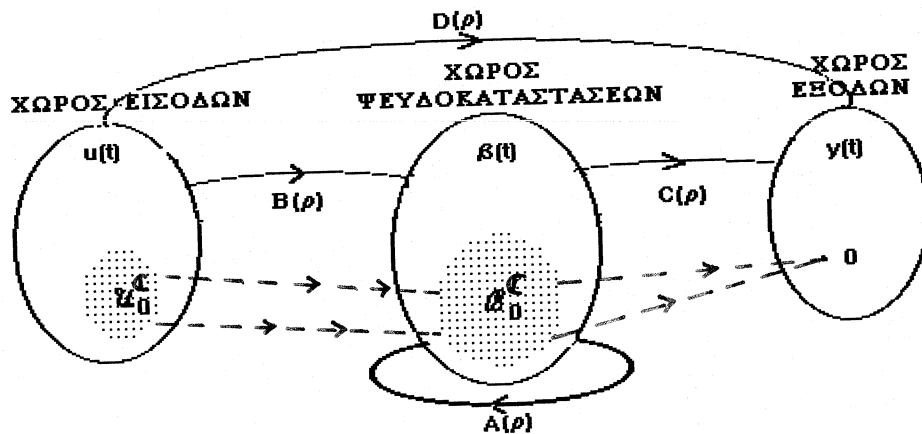
οι οποίες μας δίνουν ως απόκριση διαμέσου της (8.25α) τον διανυσματικό χώρο ψευδοκαταστάσεων

$$B_0^C = \langle [\beta_{iq}(t)]_\beta = \left[ \sum_{j=0}^{\sigma_i-1-q} \beta_{ij} \frac{t^{\sigma_i-q-j-1}}{(\sigma_i-q-j-1)!} e^{zt} \right]_\beta \text{ } q=0,1,\dots,\sigma_i-1 \text{ } i=z,z+1,\dots,r+\rho \rangle \quad (8.53)$$

και στην συνέχεια διαμέσου της (8.25β) τον διανυσματικό χώρο εξόδων

$$Y_0 = \{0\} \quad (8.54)$$

Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου μπορεί να περιγραφεί συνεπώς από το παρακάτω διάγραμμα



Διάγραμμα 8.4 Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου. □

Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή με ένα τελευταίο χαρακτηριστικό των Π.Π.Σ. που δίνεται από τον παρακάτω

**Ορισμό 8.32** Ορίζουμε ως *δυναμικούς δείκτες εισόδων (εξόδων)* (input (output) dynamical indices) τους ελαχίστους δείκτες στηλών (αντ. γραμμών) των σύνθετων πινάκων

$$(T(s) \quad \mathcal{U}) \quad \left[ \text{αντ.} \begin{bmatrix} T(s) \\ -\mathcal{V} \end{bmatrix} \right] \quad (8.55)$$

όπου οι πίνακες  $T(s)$ ,  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  έχουν οριστεί στην σχέση (8.5). □

Στο παρακάτω παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε μια πλήρη εικόνα των χαρακτηριστικών στοιχείων που αναφέραμε παραπάνω.

**Παράδειγμα 8.33** Θεωρήστε την παρακάτω πολυωνυμική περιγραφή ενός συστήματος  $\Sigma$

$$\begin{bmatrix} \rho^2+4\rho+3 & \rho+2 \\ \rho+3 & \rho+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho+3 \end{bmatrix} u(t) \quad (E.1)$$

$$y(t) = (0 \quad \rho+2) \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} \quad (E.2)$$

Ο Rosenbrock πίνακας της παραπάνω πολυωνυμικής περιγραφής θα είναι

$$P(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} s^2+4s+3 & s+2 & 0 \\ s+3 & s+2 & s+3 \\ \hline -0 & -s-2 & 0 \end{array} \right] \quad (E.3)$$

Τα χαρακτηριστικά του παραπάνω συστήματος θα είναι

- α) Η τάξη του  $\Sigma$  θα είναι  $n = 3$ .
- β) Η συμπλεκτικότητα του  $\Sigma$  θα είναι ίση με  $c=4$ .
- γ) Ο Rosenbrock βαθμός του  $\Sigma$  θα είναι  $d_r = 4 = c_{ελ}$ .
- δ) Τα πεπερασμένα μηδενικά του συστήματος θα ταυτίζονται σ'αυτήν την περίπτωση με τα αναλλοίωτα μηδενικά του  $\Sigma$  και θα είναι  $\{-1, -3, -3, -2\}$ .
- ε) Οι πεπερασμένοι πόλοι του συστήματος  $\Sigma$  θα είναι  $\{0, -2, -3\}$ .
- ζ) Η συνάρτηση μεταφοράς του  $\Sigma$  θα είναι

$$G(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s} \quad (\text{E.4})$$

και συνεπώς

- ζ(1) Τα πεπεραμένα μηδενικά μεταφοράς θα είναι  $\{-1, -3\}$ .  
 ζ(2) Οι πεπερασμένοι πόλοι μεταφοράς θα είναι  $\{0\}$ .  
 ζ(3) Η ελάχιστη τάξη του  $\Sigma$  θα είναι ίση με  $\nu(G(s))=1$
- η) Τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου θα είναι  $\{-3\}$ .  
 θ) Τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου θα είναι  $\{-2, -3\}$ .  
 ι) Τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου θα είναι  $\{-3\}$ .  
 κ) Τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά θα είναι  $\{-2, -3\}$ .  
 λ) Ο δυναμικός δείκτης εισόδου θα είναι το 2.  
 μ) Ο δυναμικός δείκτης εξόδου θα είναι το 1.

Ο ρόλος των αναλλοίωτων μηδενικών  $\{-1, -3, -3, -2\}$  είναι ο εξής :

Θεωρείστε το παρακάτω ομογενές σύστημα :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \rho^2+4\rho+3 & \rho+2 & 0 \\ \rho+3 & \rho+2 & \rho+3 \\ \hline 0 & -\rho-2 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.5})$$

του οποίου μια βάση του χώρου λύσεων του που οφείλεται στην μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ , προκύπτει βάσει της πρότασης 6.6 και είναι η εξής

$$B = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-3t}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} \right\rangle \quad (\text{E.6})$$

Εχουμε δηλαδή ότι για γραμμικό συνδιασμό των εισόδων της μορφής

$$\begin{aligned} u(t) &= -\kappa(1 \cdot e^{-3t}) - \lambda(3 \cdot e^{-3t}) - \mu(-1 \cdot e^{-t}) - \nu(0 \cdot e^{-2t}) = \\ &= -(\kappa+3\lambda)e^{-3t} + \mu e^{-t} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

θα πάρουμε ως ψευδοκατάσταση  $\xi(t)$  του συστήματος την εξής

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \nu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} = \\ &= \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \nu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

και ως έξοδο την

$$y(t) = 0 \quad (\text{E.9})$$

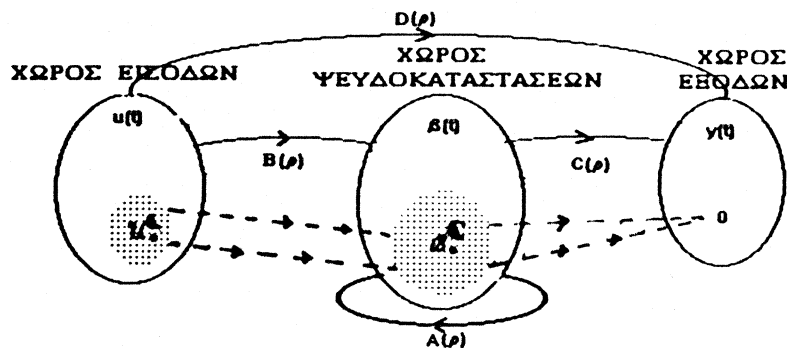
Εαν δηλώσουμε τον διανυσματικό χώρο εισόδων

$$U_0^{\mathbb{C}} = \langle e^{-3t}, e^{-t} \rangle \quad (\text{E.10})$$

οι οποίες διαμέσου της σχέσης (E.1) μας δίνουν τον χώρο των ψευδοκαταστάσεων  $B_0^{\mathbb{C}}$

$$B_0^{\mathbb{C}} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \right\rangle \quad (\text{E.11})$$

και στην συνέχεια την μηδενική έξοδο  $y(t)=0$  τότε έχουμε σχηματικά το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου



Διάγραμμα 8.5 Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου στο πρδ. 8.33. □

#### 8.4 Αλγεβρική δομή Πολυωνυμικών Συστημάτων στο $s=\infty$ .

Η ανάγκη μας πιο μεθοδικής μελέτης της "κρουστικής" συμπεριφοράς ορισμένων γραμμικών συστημάτων, η οποία παρουσιάζεται κάτω από συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες του συστήματος οδήγησε στην δημιουργία ορισμένων χαρακτηριστικών γνωρισμάτων αυτών των συστημάτων (πρδ. Verghese 1978). Τα χαρακτηριστικά αυτά γνωρίσματα που αφορούν την "κρουστική" συμπεριφορά συστημάτων παρουσιάζουμε σε αυτήν την ενότητα. Θεωρείστε λοιπόν το σύστημα  $\Sigma$  της σχέσεως (8.25), με πίνακα Rosenbrock του  $P(s)$  στην σχέση (8.32), κανονικό πολυωνυμικό πίνακα του συστήματος του πίνακα (8.12) και συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος του πίνακα (8.36).

**Ορισμός 8.34** (Verghese 1978) Καλούμε *γενικευμένη τάξη*  $f$  (*generalized order*) του συστήματος  $\Sigma$  τον αριθμό

$$f := \delta_M(T(s)) = n + \sum_{i=k+1}^r \hat{q}_i \quad (8.56)$$

όπου  $n$  είναι η τάξη του πίνακα  $T(s)$  (ή  $A(s)$ ) και  $\hat{q}_r \geq \hat{q}_{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} > 0$  είναι οι τάξεις των μηδενικών στο  $s=\infty$  του πίνακα  $T(s)$ . □

Η γενικευμένη τάξη του γραμμικού συστήματος (8.25) ή ισοδύναμα της κανονικής μορφής (8.4) του συστήματος (8.25), όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς από την σημείωση 6.42, συμπίπτει με την διάσταση του διανυσματικού χώρου λύσεων  $\hat{B} = \hat{B}^c \oplus \hat{B}^\infty$ , της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης  $T(\rho)\beta(t)=0$ . Ο διανυσματικός χώρος λύσεων  $\hat{B}^\infty$  που οφείλεται στην μηδενική δομή στο  $s=\infty$  του πίνακα  $T(\rho)$  ονομάζεται *κρουστικός* χώρος λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (8.25α) και έχει διάσταση ίση με  $\sum_{i=k+1}^r \hat{q}_i$  (δες κεφ. 6.3).

**Ορισμός 8.35** (Verghese 1978) Εστω

$$\mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -Y & 0 \end{bmatrix} \quad (8.57)$$



ο καινουργικός πολυωνυμικός πίνακας του συστήματος  $\Sigma$ . Ορίζουμε ως **αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου (εξόδου) στο  $s=\infty$**  (*infinite input (output) decoupling zeros*) τα μηδενικά στο  $s=\infty$  του σύνθετου πολυωνυμικού πίνακα :

$$(T(s) \ U) \quad \left[ \begin{array}{c} T(s) \\ -\gamma \end{array} \right] \quad (8.58)$$

Ορίζουμε ως **αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου στο  $s=\infty$**  (*infinite input-output decoupling zeros*) εκείνα τα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στο  $s=\infty$  που είναι ταυτόχρονα και αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου στο  $s=\infty$  ενώ ορίζουμε ως **αποσυζευγμένα μηδενικά στο  $s=\infty$**  του συστήματος (*infinite decoupling zeros*) το σύνολο  $\left\{ \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στο } s=\infty \} + \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου στο } s=\infty \} - \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου στο } s=\infty \} \right\}$ .  $\square$

Παρόμοια αποτελέσματα και ορισμούς με αυτούς της ενότητας 8.2 έχουμε και εδώ.

Πιο συγκεκριμένα

**Ορισμός 8.36** (Verghese 1978) Θεωρείστε το γραμμικό σύστημα (8.25) ή ισοδύναμα την καινουργική του μορφή (8.4).

(α) Το σύστημα αυτό θα λέγεται **ελέγξιμο στο  $s=\infty$**  (*infinite controllable*) εάν και μόνο εάν υπάρχει είσοδος της μορφής  $\sum_{i=0}^m u_i \delta^{(i)}(t)$  (όπου  $u_i \in \mathbb{R}^m$ ) η οποία να παράγει κάτω από μηδενικές αρχικές συνθήκες του συστήματος (8.4α) π.δ.  $\beta^{(i)}(0-)=0$ , κάθε διάνυσμα  $\xi(t)$  που ανήκει στον κρουστικό χώρο λύσεων  $\hat{B}^\infty$ , της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (8.4α).

(β) Το σύστημα (8.4) θα λέγεται **παρατηρήσιμο στο  $s=\infty$**  (*infinite observable*) εάν και μόνο εάν το μόνο διάνυσμα  $\xi(t)$  που ανήκει στον κρουστικό χώρο λύσεων  $\hat{B}^\infty$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (8.4α) και ικανοποιεί την σχέση :

$$y(t) = \gamma \xi(t) = 0_p \quad \forall t > 0 \quad (8.59)$$

είναι το μηδενικό διάνυσμα.

(γ) Το σύστημα (8.4) θα λέγεται απλά **ελέγξιμο** (*controllable*) εαν-ν είναι και πεπερασμένα ελέγξιμο και ελέγξιμο στο  $s=\infty$ , ενώ **παρατηρήσιμο** (*observable*) εαν-ν είναι και πεπερασμένα παρατηρήσιμο και παρατηρήσιμο στο  $s=\infty$ .  $\square$

Ο χώρος του ομογενούς συστήματος (8.4α) που οφείλεται στα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στο  $s=\infty$  (αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ) θα είναι ο **μη ελέγξιμος χώρος στο  $s=\infty$**  (μη ελέγξιμος χώρος) του συστήματος (8.25), ενώ ο χώρος του ομογενούς συστήματος (8.4α) που οφείλεται στα αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου στο  $s=\infty$  (αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ) είναι ο **μη παρατηρήσιμος χώρος στο  $s=\infty$**  (μη παρατηρήσιμος χώρος) του συστήματος (8.25).

**Θεώρημα 8.37** (Verghese 1978) Το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  της σχέσης (8.25) είναι ελέγξιμο στο  $s=\infty$  (παρατηρήσιμο στο  $s=\infty$ ) εαν-ν δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου (εξόδου) στο  $s=\infty$ , ενώ ελέγξιμο (παρατηρήσιμο) εαν-ν δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου (εξόδου) στην περιοχή  $\mathbb{C}\{s\}$ .  $\square$

**Ορισμός 8.38** (Verghese 1978) Το γραμμικό σύστημα (8.25) θα ονομάζεται **μη αναγώγιμο στο  $s=\infty$**  (γενικευμένης ελάχιστης τάξης ή ισχυρά μη αναγώγιμο) (*infinite irreducible* (*generalized least order* ή *strongly irreducible*)) εαν-ν δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου και εξόδου στο  $s=\infty$  (στο  $\mathbb{C}\{s\}$  ή ισοδύναμα εαν-ν  $f=\delta_M(G(s))$ ).  $\square$

**Ορισμός 8.39** (Karampetakis) Το γραμμικό σύστημα (8.25) θα ονομάζεται **γενικευμένου ελαχίστου βαθμού** (*generalized least degree*) εαν-ν είναι γενικευμένης ελάχιστης τάξης.  $\square$

**Ορισμός 8.40** (Karampetakis) Το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) θα ονομάζεται **γενικευμένης ελάχιστης συμπλεκτικότητας** (*generalized least complexity*) εαν-ν  $c=f$ .  $\square$

Είναι ευκολοτόητο από τον ορισμό 8.40 ότι ένα σύστημα θα είναι γενικευμένης ελαχίστης συμπλεκτικότητας εαν-ν το πλήθος των αρχικών συνθηκών (c στο πλήθος)  $[\beta(0-)^T, u(0-)^T]^T$  που χρειαζόμαστε για την επίλυση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y(t) \end{bmatrix} \quad (8.60)$$

ταυτίζονται με το πλήθος των γραμμικά ανεξαρτήτων αρχικών συνθηκών (f στο πλήθος) της μορφής  $X_p[\tilde{\beta}(0-)^T, \tilde{u}(0-)^T]^T$  (όπου  $X_p$  ο Toeplitz πίνακας που σχηματίζεται από τον πίνακα  $P(\rho)$  (δες 7.19)) που χρειαζόμαστε για την επίλυση του συστήματος (8.60).

**Παράδειγμα 8.41** (Rosenbrock 1974) Θεωρείστε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \rho+1 & \rho^3 \\ 0 & \rho+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (E.1)$$

$$y(t) = (1 \ 0) \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \rho+1 & \rho^3 & 0 \\ 0 & \rho+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y(t) \end{bmatrix} \quad (E.2)$$

με συμπλεκτικότητα  $c=4$ . Είναι φανερό ότι οι αρχικές συνθήκες που χρειαζόμαστε για την επίλυση αυτού του συστήματος είναι οι  $\xi_1(0-)$ ,  $\xi_2(0-)$ ,  $\xi_2^{(1)}(0-)$  και  $\xi_2^{(2)}(0-)$ .

Εστω τώρα

$$\begin{aligned} P(\rho) &= \left[ \begin{array}{cc|c} \rho+1 & \rho^3 & 0 \\ 0 & \rho+1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rho + \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rho^3 = \\ &= P_0 + P_1 \rho + P_2 \rho^2 + P_3 \rho^3 \quad (E.3) \end{aligned}$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες συνθήκες που χρειάζονται για την επίλυση του συστήματος (E.2) είναι οι εξής :

$$\begin{bmatrix} P_3 & 0 & 0 \\ P_2 & P_3 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}(0-) \\ \bar{\xi}^{(1)}(0-) \\ \bar{\xi}^{(2)}(0-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \bar{0} & \bar{0} & | & 0 & \bar{1} & \bar{0} & | & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \bar{0} & \bar{0} & | & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & | & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(0-) \\ \xi_2(0-) \\ -u(0-) \\ \hline \xi_1^{(1)}(0-) \\ \xi_2^{(1)}(0-) \\ -u^{(1)}(0-) \\ \hline \xi_1^{(2)}(0-) \\ \xi_2^{(2)}(0-) \\ -u^{(2)}(0-) \end{bmatrix} =$$

$$= [\xi_2(0-), 0, 0, \xi_2^{(1)}(0-), 0, 0, \xi_1(0-)+\xi_2^{(2)}(0-), \xi_2(0-), 0]^T \quad (E.4)$$

ή ισοδύναμα οι  $\xi_2(0-)$ ,  $\xi_2^{(1)}(0-)$  και  $\xi_1(0-)+\xi_2^{(2)}(0-)$ , και είναι στο πλήθος ίσες με  $f=3$  (γενικευμένη τάξη του  $P(s)$ ). Το σύστημα δεν είναι γενικευμένης ελάχιστης συμπλεκτικότητας επειδή  $c=4 \neq 3=f$ .  $\square$

Ένας αλγόριθμος που εξετάζει εάν ένα σύστημα είναι γενικευμένης ελάχιστης συμπλεκτικότητας είναι ο εξής

**Αλγόριθμος 8.42** Εστω ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος

$$P(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ p_1(s) & p_2(s) & \dots & p_{r+m}(s) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s^{\delta(p_1(s))} & & & \\ & s^{\delta(p_2(s))} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s^{\delta(p_{r+m}(s))} \end{bmatrix} P_{hc} + \hat{P}(s) \quad (8.61)$$

όπου  $p_i(s)$  είναι η  $i$  στήλη του πίνακα  $P(s)$ , ενώ  $\delta(p_i(s))$  είναι ο μέγιστος βαθμός αυτής της στήλης. Ο πίνακας  $\hat{P}(s)$  περιέχει στήλες  $\hat{p}_i(s)$  με βαθμό μικρότερο του  $\delta(p_i(s))$ . Θεωρείστε τις  $k$  στήλες του  $P(s)$  για τις οποίες ισχύει  $\delta(p_i(s)) > 0$  και έστω  $\tilde{P}_{hc} \in \mathbb{R}^{(r+p) \times k}$  είναι το μέρος εκείνο του πίνακα  $P_{hc}$  που αντιστοιχεί στις στήλες αυτές.

Τότε θα έχουμε ότι το σύστημα  $\Sigma$  θα είναι γενικευμένης ελαχίστης τάξης εαν  $-\nu$  ο πίνακας  $\tilde{P}_{hc}$  έχει πλήρη τάξη.

**Απόδειξη** Εαν ο πίνακας  $\tilde{P}_{hc}$  έχει πλήρη τάξη τότε θα υπάρχει μια  $k \times k$  ορίζουσα του πίνακα αυτού η οποία είναι διάφορη του μηδενός. Εαν πάρω την αντίστοιχη αυτής της ορίζουσας στον πίνακα  $P(s)$  θα παρατηρήσω ότι ο βαθμός αυτής της ορίζουσας είναι ίσος με  $c$ , που είναι και ο μέγιστος βαθμός που μπορεί να έχει μια ορίζουσα του πίνακα  $P(s)$ . Αρα ο McMillan βαθμός του πίνακα  $P(s)$  ή ισοδύναμα του πίνακα  $T(s)$  (οι σταθερές δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό) θα είναι ίσος με  $c$ .

Εστω τώρα ότι  $f=c$  και ότι ο πίνακας  $\tilde{P}_{hc}$  δεν έχει πλήρη τάξη και συνεπώς οποιαδήποτε ορίζουσα του πίνακα  $P(s)$  και να πάρουμε θα έχει βαθμό μικρότερο του  $c$  και συνεπώς  $f < c$  που αντιβαίνει στην υπόθεση μας.  $\square$

Εναν αντίστοιχο αλγόριθμο για την ελάχιστη συμπλεκτικότητα ενός συστήματος πρότεινε ο Rosenbrock (1974).

**Παράδειγμα 8.43** Θεωρείστε τον πίνακα Rosenbrock του παραδείγματος 8.41. Ο πίνακας  $\tilde{P}_{hc}$  που αντιστοιχεί στον πίνακα  $P(s)$  θα είναι ο

$$\tilde{P}_{hc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

ο οποίος δεν έχει πλήρη τάξη και συνεπώς το σύστημα μου δεν θα είναι γενικευμένης ελάχιστης συμπλεκτικότητας, από αλγόριθμο 8.42. Αυτό φάνηκε και στο πρδ. 8.41.  $\square$

**Ορισμός 8.44** (Karampetakis) Το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) θα λέγεται *γενικευμένα ελάχιστο* (*generalized minimal*) εαν και μόνο εαν είναι γενικευμένης ελαχίστης τάξης και γενικευμένης ελαχίστης συμπλεκτικότητας ( $f = \delta_M(G(s)) = c$ ).  $\square$

**Ορισμός 8.45** (Verghese 1978) Εστω  $G(s) := C(s)A^{-1}(s)B(s) + D(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος  $\Sigma$  (8.25). Οι πόλοι της  $G(s)$  στο  $s = \infty$  ονομάζονται *πόλοι μεταφοράς του  $\Sigma$  στο  $s = \infty$*  (*infinite transmission poles*) ενώ τα μηδενικά της  $G(s)$  στο  $s = \infty$  ονομάζονται *μηδενικά μεταφοράς του  $\Sigma$  στο  $s = \infty$*  (*infinite transmission zeros*).  $\square$

Η γεωμετρική ερμηνεία των πόλων και μηδενικών μεταφοράς στο  $s = \infty$  φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα :

**Θεώρημα 8.46** (Pugh & Krishnaswamy 1985) Εστω  $G(s) := C(s)A^{-1}(s)B(s) + D(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος  $\Sigma$  (8.25).

(α) Εαν  $p$  είναι ένας πόλος της  $G(s)$  στο  $s = \infty$  τάξης  $q$  τότε υπάρχει είσοδος

$$u(t) = \sum_{i \geq 0} \eta_i t^i + \sum_j \sum_k \varepsilon_{jk} t^{k-1} e^{s_j t} \quad \text{με } \eta_i, \varepsilon_{jk} \in \mathbb{C}^m \quad (8.62)$$

τέτοια ώστε να έχω ως έξοδο την

$$y(t) = \sum_{i=0}^{q-1} \zeta_i \delta^{(i)}(t) + \sum_g \sum_h \rho_{gh} t^h e^{s_g t} \quad \zeta_i, \rho_{gh} \in \mathbb{C}^p \quad (8.63)$$

(β) Εαν  $z$  είναι ένα μηδενικό στο  $s = \infty$  της  $G(s)$  τάξης  $q$ , τότε υπάρχει μια είσοδος  $u(t)$  της μορφής

$$u(t) = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i \delta^{(i)}(t) + \sum_j \sum_k \beta_{jk} t^{k-1} e^{s_j t} \quad \text{με } \alpha_i, \beta_{jk} \in \mathbb{R}^m \quad (8.64)$$

τέτοια ώστε η έξοδος μου να μην περιέχει κρουστικούς όρους.  $\square$

Δύο επίσης χρήσιμα χαρακτηριστικά στην μελέτη συστημάτων είναι οι πόλοι και τα μηδενικά του συστήματος που ορίστηκαν από τους Verghese & Kailath (1979), Ferreira (1980), Bosgra & Van Der Weiden (1981), Walker (1988).

**Ορισμός 8.47** (Verghese & Kailath 1979) Εστω το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) ή ισοδύναμα (8.4) και  $P(s)$  στην σχέση (8.32) ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος. Ορίζουμε ως πόλους του συστήματος  $\Sigma$  στο  $s=\infty$  (*infinite system poles*) τα μηδενικά του πίνακα  $T(s)$  στο  $s=\infty$ . □

Λόγω του ότι ο ορισμός του Ferreira (1980) όσον αφορά τα μηδενικά ενός συστήματος στο  $s=\infty$  δεν ικανοποιεί την ισότητα (8.65) (δες Walker 1988) και ο ορισμός των Bosgra & Van Der Weiden (1981) αναφέρεται στον Rosenbrock πίνακα του συστήματος που δίνει επίσης λάθος αποτελέσματα όσον αφορά την σχέση (8.65) (δες Walker 1988), ο Walker (1988) πρότεινε τον παρακάτω

**Ορισμός 8.48** (Walker 1988) Εστω το γραμμικό σύστημα  $\Sigma$  (8.25) και  $\mathcal{P}(s)$  στην σχέση (8.12) ο καιονικός πολυωνυμικός πίνακας του συστήματος. Θεωρείστε τις ορίζουσες του  $\mathcal{P}(s)$  τάξης  $\tilde{r}+\rho-k$  (όπου  $\tilde{r}=\tilde{r}+p+m$  και  $\tilde{r}+\rho$  είναι η τάξη του Rosenbrock πίνακα  $P(s)$ ) οι οποίες είναι τέτοιες ώστε τουλάχιστον  $\tilde{r}-k$  γραμμές και στήλες μεταξύ των γραμμών και στηλών  $1,2,\dots,\tilde{r}$  του  $\mathcal{P}(s)$  χρησιμοποιούνται για την δημιουργία μιας τέτοιας ορίζουσας. Εστω  $\delta_{s(\tilde{r}+\rho-k)}$  είναι ο μεγαλύτερος βαθμός αυτών των οριζουσών για  $k=0,1,\dots,n_s$ , όπου  $n_s$  είναι η ελάχιστη τιμή του  $k$  τέτοια ώστε το  $\delta_{s(\tilde{r}+\rho-k)}$  να ταυτίζεται με τον McMillan βαθμό του πίνακα  $P(s)$ . Τότε ο  $P(s)$  θα έχει  $n_s$  μηδενικά στο  $s=\infty$  με πολλαπλότητες  $(\delta_{s(\tilde{r}+\rho-n_s)}-\delta_{s(\tilde{r}+\rho-n_s+1)}), \dots, (\delta_{s(\tilde{r}+\rho-1)}-\delta_{s(\tilde{r}+\rho)})$  αντίστοιχα. □

Μια ιδιαίτερη σχέση συνδέει τα μηδενικά μεταφοράς στο  $s=\infty$ , τα αποσυζευγμένα μηδενικά στο  $s=\infty$  και τα μηδενικά του συστήματος στο  $s=\infty$  όπως επίσης και τους πόλους μεταφοράς στο  $s=\infty$ , τα αποσυζευγμένα μηδενικά στο  $s=\infty$  και τους πόλους του συστήματος στο  $s=\infty$  και φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 8.49** (Verghese 1978, Walker 1988)

$$\begin{aligned} \#\{\text{μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\} &= \#\{\text{μηδενικά μεταφοράς του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\} + \\ &+ \#\{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\} \end{aligned} \quad (8.65)$$

$$\begin{aligned} \{\text{πόλοι του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\} &= \{\text{πόλοι μεταφοράς του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\} + \\ &+ \{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\} \end{aligned} \quad (8.66)$$

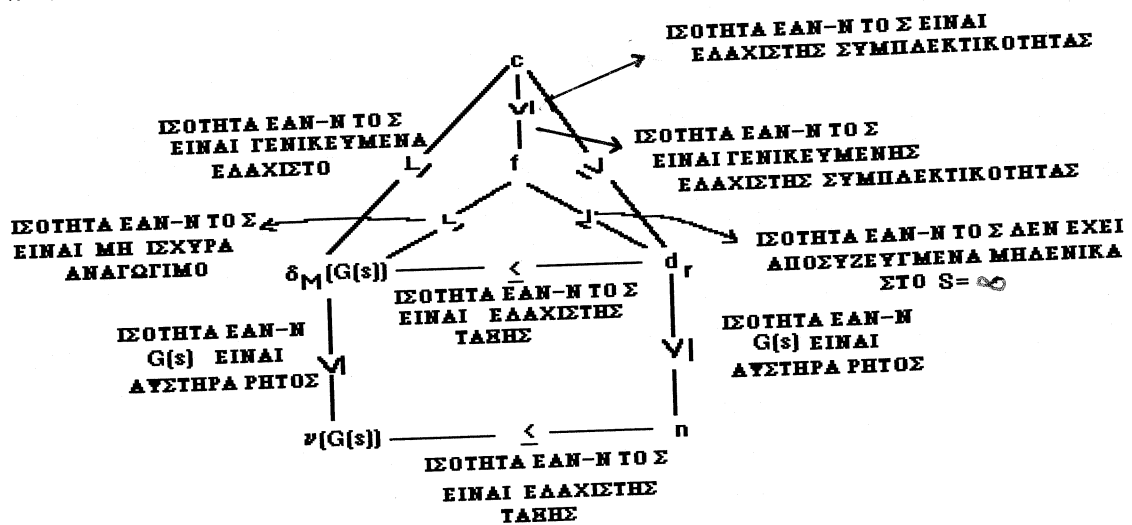
όπου # δηλώνει το συνολικό πλήθος, λαμβάνοντας υπόψη και την πολλαπλότητα.  $\square$

Όλα τα χαρακτηριστικά στο  $s=\infty$  ενός γραμμικού συστήματος της μορφής (8.25) συνδέονται μεταξύ τους όπως φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 8.50** Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν μεταξύ των χαρακτηριστικών στοιχείων στο  $s=\infty$  ενός γραμμικού συστήματος της μορφής (8.25) :

$$\begin{aligned} f &= \delta_M(G(s)) + \#\{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s \in \mathbb{C}U\{\infty\}\} \\ f &= d_r + \#\{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\} \end{aligned} \quad (8.67) \quad \square$$

Συνοψίζοντας από τις σχέσεις των ενότητων 8.3 και 8.4 παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα



**Διάγραμμα 8.6** Σχέσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών στοιχείων του  $\Sigma$ .



Μια άλλη κατηγορία μηδενικών που παρουσιάζονται σε Π.Π.Σ. είναι η εξής

**Ορισμός 8.51** (Walker 1988) Ορίζουμε ως *αναλλοίωτα μηδενικά του συστήματος Σ στο  $s=\infty$*  (*infinite invariant zeros*) τα μηδενικά του πίνακα Rosenbrock  $P(s)$  (ή ισοδύναμα του καινούριου πίνακα  $\mathcal{P}(s)$ ) του συστήματος Σ στο  $s=\infty$ .  $\square$

**Ορισμός 8.52** Εστω το σύστημα (8.25) του οποίου ο Rosenbrock πολυωνυμικός πίνακας  $P(s)$  είναι ο πίνακας (8.32). Σε κάθε αναλλοίωτο μηδενικό στο  $s=\infty$  του συστήματος Σ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα  $[\beta_{0i}^{\infty T}, u_{0i}^{\infty T}]^T$  τέτοιο ώστε

$$\tilde{P}(0) \begin{bmatrix} \beta_{0i}^{\infty} \\ -u_{0i}^{\infty} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{A}(0) & \tilde{B}(0) \\ -\tilde{C}(0) & \tilde{D}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{0i}^{\infty} \\ -u_{0i}^{\infty} \end{bmatrix} = 0 \quad (8.68)$$

όπου  $\tilde{P}(z)$  είναι ο δυικός πολυωνυμικός πίνακας του  $P(z)$  (δες (6.61)). Τα διανύσματα  $[\beta_{0i}^{\infty T}, u_{0i}^{\infty T}]^T$  θα ονομάζονται *διανύσματα αναλλοίωτων μηδενικών-διευθύνσεων στο  $s=\infty$*  (*invariant infinite zero-direction vectors*).  $\square$

Μια ερμηνεία των αναλλοίωτων μηδενικών στο  $s=\infty$  για Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων έχουν δώσει οι Karcnias & Hayton (1981) διαμέσου του προβλήματος της *μηδενικής εξόδου (output zeroing problem)*. Μια γενίκευση αυτών των αποτελεσμάτων για συστήματα της μορφής (8.25) δίνουμε με το παρακάτω

**Θεώρημα 8.53** Εστω ότι

$$S_{P(s)}^{\infty}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_k}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+2}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_{r+q}}}, 0_{p-q \times m-q} \right] \quad (8.69)$$

είναι η Smith μορφή στο  $s=\infty$  του Rosenbrock πίνακας  $P(s)$  (8.32), του συστήματος (8.25),

όπου  $\rho$  είναι τέτοιο ώστε  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} P(s) = r + \rho$ . Τότε θα υπάρχει ένα πλήθος εισόδων της μορφής

$$[u_{iq}^w(t)]_u = \left[ \sum_{j=0}^q u_{i,j}^w \delta^{(q-j)}(t) \right]_u \quad q=0,1,\dots,\hat{q}_i-1 \quad i=k+1,k+2,\dots,r+\rho \quad (8.70)$$

τέτοια ώστε η ψευδοκατάσταση του συστήματος  $\Sigma$  να είναι της μορφής

$$[\beta_{iq}^w(t)]_\beta = \left[ \sum_{j=0}^q \beta_{i,j}^w \delta^{(q-j)}(t) \right]_\beta \quad q=0,1,\dots,\hat{q}_i-1 \quad i=k+1,k+2,\dots,r+\rho \quad (8.71)$$

όπου τα διανύσματα  $[\beta_{ij}^w{}^\top, -u_{ij}^w{}^\top]^\top \quad i=k+1,\dots,r+\rho$  αποτελούν μια πεπερασμένη αλυσίδα Jordan μήκους  $q_1 + \hat{q}_i$  του δυικού πίνακα  $\tilde{P}(z)$  και η έξοδος του συστήματος να είναι

$$y(t) = 0 \quad (8.72)$$

**Απόδειξη** Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται κατά τον ίδιο τρόπο με το θεώρημα 8.30 εαν λάβουμε υπόψη μας την Πρόταση 6.19 και την σημείωση 6.41, όπου φαίνεται ο τρόπος κατασκευής των λύσεων  $[(\beta_{iq}^w(t)^\top, -u_{iq}^w(t)^\top)^\top]$  του συστήματος (8.49) και συνεπώς και των  $[u_{iq}^w(t)]_u$  και  $[\beta_{iq}^w(t)]_\beta$  για  $q=0,1,\dots,\hat{q}_i-1$  και  $i=k+1,k+2,\dots,r+\rho$ .  $\square$

**Παρατήρηση 8.54** Από το παραπάνω θεώρημα παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας διανυσματικός χώρος εισόδων

$$U_0^w = \langle [u_{iq}^w(t)]_u = \left[ \sum_{j=0}^q u_{i,j}^w \delta^{(q-j)}(t) \right]_u \quad \text{όπου } q=0,1,\dots,\hat{q}_i-1 \quad i=k+1,k+2,\dots,r+\rho \rangle \quad (8.73)$$

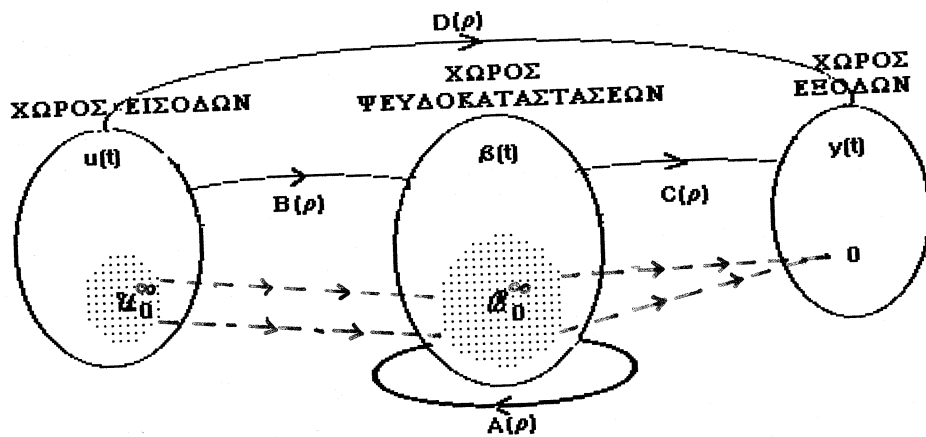
οι οποίες μας δίνουν ως απόκριση διαμέσου της (8.25α) τον διανυσματικό χώρο ψευδοκαταστάσεων

$$B_0^w = \langle [\beta_{iq}^w(t)]_\beta = \left[ \sum_{j=0}^q \beta_{i,j}^w \delta^{(q-j)}(t) \right]_\beta \quad q=0,1,\dots,\hat{q}_i-1 \quad i=k+1,k+2,\dots,r+\rho \rangle \quad (8.74)$$

και στην συνέχεια διαμέσου της (8.25β) τον διανυσματικό χώρο εξόδων

$$Y_0 = \{0\} \quad (8.75)$$

Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου λόγω των αναλλοίωτων μηδενικών στο  $s=\infty$  μπορεί να περιγραφεί συνεπώς από το παρακάτω διάγραμμα



**Διάγραμμα 8.7** Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου λόγω των αναλλοίωτων μηδενικών του  $\Sigma$  στο  $s=\infty$ . □

Θέλοντας να δώσουμε μια ουσιαστική λύση στο πρόβλημα της μηδενικής εξόδου δίνουμε τον παρακάτω ορισμό

**Ορισμός 8.55** (Karampetakis) Ορίζουμε ως **αναλλοίωτους ελάχιστους δείκτες στηλών (γραμμών)** (*invariant right (left) indices*) του συστήματος  $\Sigma$  τους ελάχιστους δείκτες στηλών (γραμμών) του Rosenbrock πίνακα  $P(s)$  του συστήματος (8.25). □

**Παρατήρηση 8.56** Εάν  $P(s)$  είναι ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος (8.25), τάξης  $r+p$ . Τότε υπάρχει μια ελάχιστη βάση του δεξιά μηδενικού χώρου του  $P(s)$  αποτελούμενη από  $m-r$  πολωνυμικά διανύσματα

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_i^\epsilon(s) \\ -\hat{u}_i^\epsilon(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{i0}^\epsilon \\ -\hat{u}_{i0}^\epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{i1}^\epsilon \\ -\hat{u}_{i1}^\epsilon \end{bmatrix} s + \dots + \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{i\epsilon i}^\epsilon \\ -\hat{u}_{i\epsilon i}^\epsilon \end{bmatrix} s^{\epsilon i} \quad (8.76\alpha)$$

με  $i=r+\rho+1, \dots, r+m$  τα οποία είναι τέτοια ώστε

$$P(s) \begin{bmatrix} \hat{\beta}_i^\epsilon(s) \\ -\hat{u}_i^\epsilon(s) \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_i^\epsilon(s) \\ -\hat{u}_i^\epsilon(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (8.76\beta)$$

Τότε από τα δυικά πολυώνυμα των  $[\beta_i^\epsilon(s)^T, -u_i^\epsilon(s)^T]^T$  μπορούμε βάση της σχέσεως (6.101) να κατασκευάσουμε τις αναλλοίωτες μηδενικές-διευθύνσεις στο  $s=\alpha$ ,  $[\beta_{i\epsilon_i}^\epsilon{}^T, -u_{i\epsilon_i}^\epsilon{}^T]^T$ .  $\square$

Μια ερμηνεία των αναλλοίωτων ελαχίστων δεικτών στηλών για Π.Π.Σ. δίνεται διαμέσου του προβλήματος της μηδενικής εξόδου (output zeroing problem) από το παρακάτω

**Θεώρημα 8.57** Εστω ότι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες στηλών ενός συστήματος  $\Sigma$  είναι οι  $\epsilon_{r+\rho+1}, \epsilon_{r+\rho+2}, \dots, \epsilon_{r+m}$  (όπως ορίστηκαν από την σχέση (8.76α)) όπου  $\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} P(s) = r+\rho$ . Τότε θα υπάρχει ένα πλήθος εισόδων της μορφής

$$[u_{iq}^\epsilon(t)]_u = \left[ \sum_{j=0}^q u_{i, \epsilon_i - j}^\epsilon \delta^{(q-j)}(t) \right]_u \quad q=0,1,\dots,\hat{\epsilon}_i-1 \quad i=r+\rho+1, r+\rho+2, \dots, r+m \quad (8.77)$$

τέτοια ώστε η ψευδοκατάσταση του συστήματος  $\Sigma$  να είναι της μορφής

$$[\beta_{iq}^\epsilon(t)]_\beta = \left[ \sum_{j=0}^q \beta_{i, \epsilon_i - j}^\epsilon \delta^{(q-j)}(t) \right]_\beta \quad q=0,1,\dots,\hat{\epsilon}_i-1 \quad i=r+\rho+1, r+\rho+2, \dots, r+m \quad (8.78)$$

όπου τα διανύσματα  $[\beta_{ij}^\epsilon{}^T, -u_{ij}^\epsilon{}^T]^T$   $i=r+\rho+1, \dots, r+m$  αποτελούν μια πεπερασμένη αλυσίδα Jordan μήκους  $q_i + \hat{\epsilon}_i$  του δυικού πίνακα  $\tilde{P}(z)$  και έχουν οριστεί στην σχέση (8.76α), και η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = 0 \quad (8.79)$$

**Απόδειξη** Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται κατά τον ίδιο τρόπο με το θεώρημα 8.30 εάν λάβουμε υπόψη μας την Πρόταση 6.25 και την σημείωση 6.41, όπου φαίνεται ο τρόπος

κατασκευής των λύσεων  $[(\beta_{iq}^\epsilon(t)^T, (-u_{iq}^\epsilon(t))^T)^T]$  του συστήματος (8.49) και συνεπώς των  $[\beta_{iq}^\epsilon(t)]_\beta$  και  $[u_{iq}^\epsilon(t)]_u$  για  $q=0,1,\dots,\hat{\epsilon}_i-1$  και  $i=r+\rho+1,r+\rho+2,\dots,r+m$ . □

**Παρατήρηση 8.58** Από το παραπάνω θεώρημα παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας διανυσματικός χώρος εισόδων

$$U_0^\epsilon = \langle [u_{iq}^\epsilon(t)]_u = [\sum_{j=0}^q u_{i,\epsilon_i-j}^\epsilon \delta^{(q-j)}(t)]_u \text{ όπου } q=0,1,\dots,\hat{\epsilon}_i-1 \text{ } i=r+\rho+1,r+\rho+2,\dots,r+m \rangle \tag{8.80}$$

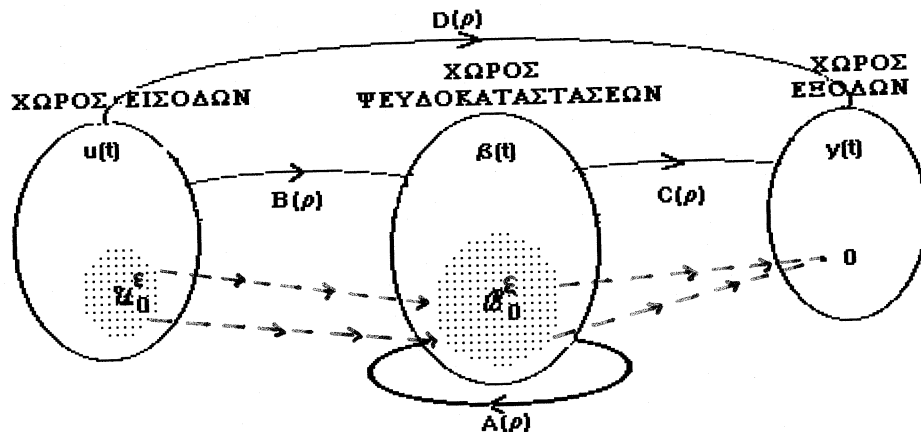
οι οποίες μας δίνουν ως απόκριση διαμέσου της (8.25α) τον διανυσματικό χώρο ψευδοκαταστάσεων

$$B_0^\epsilon = \langle [\beta_{iq}^\epsilon(t)]_\beta = [\sum_{j=0}^q \beta_{i,\epsilon_i-j}^\epsilon \delta^{(q-j)}(t)]_\beta \text{ } q=0,1,\dots,\hat{\epsilon}_i-1 \text{ } i=r+\rho+1,r+\rho+2,\dots,r+m \rangle \tag{8.81}$$

και στην συνέχεια διαμέσου της (8.25β) τον διανυσματικό χώρο εξόδων

$$Y_0 = \{0\} \tag{8.82}$$

Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου λόγω των αναλλοίωτων ελαχίστων δεικτών στηλών μπορεί να περιγραφεί συνεπώς από το παρακάτω διάγραμμα



**Διάγραμμα 8.8**

Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου λόγω των αναλλοίωτων ελαχίστων δεικτών στηλών.

□

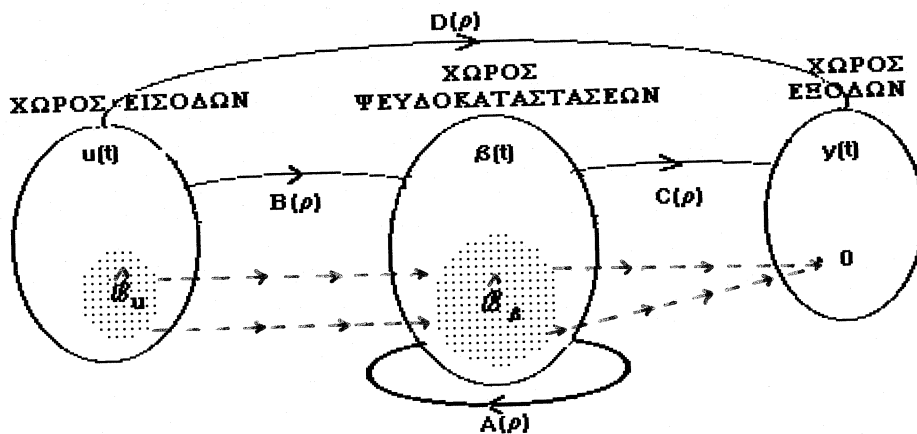
**Παρατήρηση 8.59** Οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες γραμμών μας δίνουν βάση του θεωρήματος 6.30 μια ικανή και αναγκαία συνθήκη την οποία πρέπει να πληρούν οι αρχικές συνθήκες  $\beta(0-)$ ,  $u(0-)$  και οι παράγωγοι τους έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (8.83)$$

να έχει λύση ή ισοδύναμα το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου να έχει λύση.  $\square$

Συνοψίζοντας από τις παρατηρήσεις 8.31, 8.54 και 8.58 έχουμε το παρακάτω

**Συμπέρασμα 8.60** Εστω το γραμμικό ομογενές σύστημα (8.83). Σύμφωνα με την ενότητα 6.6 ο διανυσματικός χώρος αυτού του ομογενούς συστήματος θα είναι έστω  $\hat{B}$  και θα έχει διάσταση ίση με  $f := \hat{n} + \hat{q} + \hat{e}$ , όπου ( $\hat{n}$ ,  $\hat{q}$  και  $\hat{e}$  είναι αντίστοιχα το συνολικό πλήθος των αναλλοίωτων μηδενικών στο  $\mathbb{C}$ , στο  $s=\rho$  και των ελαχίστων δεικτών στηλών του  $\Sigma$  αντίστοιχα). Εάν δηλώσω με  $\hat{B}_\beta$  την προβολή του  $\hat{B}$  στο σύνολο των  $[\beta(t)]$  και  $\hat{B}_u$  την προβολή του  $\hat{B}$  στο σύνολο των  $[-u(t)]$  τότε για κάθε διάνυσμα  $[-u(t)] \in \hat{B}_u$  θα έχουμε ως έξοδο του συστήματος (8.25α) την ψευδοκατάσταση  $[\beta(t)] \in \hat{B}_\beta$  η οποία θα έχει την ίδια μορφή με την είσοδο  $[u(t)]$  και μηδενική έξοδο  $y(t)$  στο σύστημα (8.25β). Αυτή θα είναι και η λύση του προβλήματος της μηδενικής εξόδου.



**Διάγραμμα 8.9** Το γενικό πρόβλημα της μηδενικής εξόδου.  $\square$

Για την καλύτερη κατανόηση της ενότητας 8.3 παρουσιάζουμε τα παρακάτω παραδείγματα.

**Παράδειγμα 8.61** Θεωρείστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \rho+1 & \rho^3+2\rho^2 \\ \rho^2+3\rho+2 & \rho^4+4\rho^3+4\rho^2+\rho+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2+1 \\ \rho^3+2\rho^2+\rho+3 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.1})$$

$$y(t) = (-\rho^2-3\rho-1 \quad -\rho^4-4\rho^3-4\rho^2+1) \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{bmatrix} + (\rho^3+2\rho^2+\rho+2) u(t)$$

Ο κανονικός πολυωνυμικός πίνακας του συστήματος θα είναι

$$\mathcal{P}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} s+1 & s^3+2s^2 & s^2+1 & 0 & 0 \\ s^2+3s+2 & s^4+4s^3+4s^2+s+2 & s^3+2s^2+s+3 & 0 & 0 \\ s^2+3s+1 & s^4+4s^3+4s^2-1 & s^3+2s^2+s+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.2})$$

Τα χαρακτηριστικά του παραπάνω συστήματος στο  $s=\infty$  θα είναι

- α) Η γενικευμένη τάξη  $f$ , θα είναι ίση με  $f=4$ .
- β) Το σύστημα  $\Sigma$  έχει ένα αποσυζευγμένο μηδενικό εισόδου στο  $s=\infty$  πολ/τας 2, ενώ δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου, με συνέπεια τα αποσυζευγμένα μηδενικά του στο  $s=\infty$  να ταυτίζονται με τα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στο  $s=\infty$ . Το σύστημα  $\Sigma$  άρα θα είναι παρατηρήσιμο στο  $s=\infty$ , ενώ μη ελέγξιμο στο  $s=\infty$  σύμφωνα με το θεώρημα 8.37.
- γ) Η συμπλεκτικότητα του συστήματος είναι  $c=9 \neq 4=f$  και συνεπώς το σύστημα δεν είναι γενικευμένης ελάχιστης συμπλεκτικότητας.

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^3+s^2 & | & s^3+s^2-1 & s^3-s \\ \hline -s^2-s & | & -s^2-s & -s^2+1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$S_{P(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad S_{P(s)}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} s^3+s^2 & | & s^3+s^2-1 & s^3-s \\ \hline -s^2-s & | & -s^2-s & -s^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s+1 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = 0_{2 \times 1} \quad (\text{E.3})$$

Συνεπώς το σύστημα (E.1) θα έχει ένα πεπερασμένο αναλλοίωτο μηδενικό στο  $s=-1$ , πολ/τας 1 ( $n=1$ ), ένα αναλλοίωτο μηδενικό στο  $s=\infty$ , πολ/τας 1 ( $\hat{q}=1$ ) και έναν αναλλοίωτο ελάχιστο δείκτη στηλών βαθμού 1 ( $\hat{e}=1$ ). Θεωρήστε τώρα την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\begin{bmatrix} \rho^3+\rho^2 & | & \rho^3+\rho^2-1 & \rho^3-\rho \\ \hline -\rho^2-\rho & | & -\rho^2-\rho & -\rho^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u_1(t) \\ -u_2(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.4})$$

Ο χώρος  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$  που παράγεται λόγω της μηδενικής δομής στο  $\mathbb{C}$  του  $P(s)$  έχει διάσταση  $n=1$  και είναι σύμφωνα με την θεωρία του κεφαλαίου 6 (δες σημείωση 6.41) ο εξής

$$\hat{B}^{\mathbb{C}} := B^{\mathbb{C}}/\mathbb{R} = \left\{ \lambda \left[ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \right] \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{E.5})$$

όπου

$$B^{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda \left[ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta^{(1)}(t)+\delta(t))u(t-\tau)d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(t)u(t-\tau)d\tau \end{bmatrix} \right] \right\} \quad (\text{E.6})$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $u(t)$  αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση. Ο χώρος  $\hat{B}^{\infty}$  που παράγεται λόγω της μηδενικής δομής στο  $s=\infty$  του  $P(s)$  έχει διάσταση  $\hat{q}=1$  και είναι ο εξής



δ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$G(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \quad (\text{E.3})$$

Άρα το  $\Sigma$  έχει ένα μηδενικό μεταφοράς στο  $s=0$ , ενώ κανέναν πόλο μεταφοράς στο  $s=0$ .

ε) Έχουμε ότι

$$S_T^0(s) = \begin{bmatrix} s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

και συνεπώς οι πόλοι του συστήματος στο  $s=0$  είναι ένας πολ/τας 2. Τα μηδενικά του συστήματος στο  $s=0$  είναι ένα πολ/τας 3 και ταυτίζονται με τα αναλλοίωτα μηδενικά του συστήματος (λόγω του ότι ο πίνακας  $P(s)$  είναι τετράγωνος).

η) Είναι φανερό μα που ο πίνακας  $P(s)$  του συστήματος είναι τετράγωνος και αντιστρέψιμος ότι δεν υπάρχουν αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες στηλών και γραμμών.  $\square$

**Παράδειγμα 8.62** Θεωρείστε το σύστημα  $\Sigma$

$$(\rho^3 + \rho^2) \beta(t) = (\rho^3 + \rho^2 - 1 \quad \rho^3 - \rho) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.1a})$$

$$y(t) = (\rho^2 + \rho) \beta(t) + (-\rho^2 - \rho \quad -\rho^2 + 1) \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.1b})$$

του οποίου ο Rosenbrock πίνακας είναι ο

$$\hat{B}^{\omega} := B^{\omega}/R = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{E.7})$$

όπου

$$B^{\omega} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta^{(1)}(t) + \delta(t)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(t) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{E.8})$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $u(t)$  αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση. Ο χώρος  $\hat{B}^{\epsilon}$  που παράγεται λόγω της δεξιάς μηδενικής δομής του  $P(s)$  έχει διάσταση  $\hat{\epsilon} = 1$  και είναι ο εξής

$$\hat{B}^{\epsilon} := B^{\epsilon}/R = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{E.9})$$

όπου

$$B^{\epsilon} = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta^{(1)}(t) + \delta(t)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(t) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{E.10})$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}$  και  $u(t)$  αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση. Το σύνολο λύσεων του (E.1) είναι το

$$\begin{aligned} B &= \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t), \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t), \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta^{(1)}(t) + \delta(t)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(t) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\{ \lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t (-\delta^{(1)}(t) + \delta(t)) u(t-\tau) d\tau \\ 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(t) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

όπου  $\lambda_i \in \mathbb{R}$   $i=1,2,3$  και  $u(t)$  αυθαίρετη πραγματική συνάρτηση, ενώ ο χώρος λύσεων  $\hat{B} = B/R$  του (E.4) έχει γενικευμένη τάξη  $f = n + \hat{q} + \hat{\epsilon} = 1 + 1 + 1 = 3$  και είναι ο

$$\hat{B} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t), \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t) \right\rangle \quad (\text{E.12})$$

Μπορούμε λοιπόν εδώ να πούμε σύμφωνα με το συμπέρασμα 8.60 ότι για κάθε είσοδο  $[u(t)] = [(u_1(t)^T, u_2(t)^T)^T] \in \hat{B}_u$  της μορφής

$$[u(t)]_u = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \delta(t) \in \hat{B}_u \quad (\text{E.13})$$

ή ισοδύναμα για κάθε είσοδο  $u(t) = (u_1(t)^T, u_2(t)^T)^T$  της μορφής

$$u(t) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t) + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \int_{0^-}^t \delta(t) u(t-\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

θα έχω ως απόκριση  $[\beta(t)]_\beta \in \hat{B}_\beta$  του συστήματος (E.1α), την

$$[\beta(t)]_\beta = \{ -\lambda_1 [e^{-t}]_\beta + (\lambda_2 - \lambda_3) [\delta(t)]_\beta \} \quad (\text{E.15})$$

ή ισοδύναμα την

$$\beta(t) = -\lambda_1 e^{-t} + (\lambda_2 - \lambda_3) \delta(t) + \int_{0^-}^t (-\delta^{(1)}(t) + \delta(t)) u(t-\tau) d\tau \quad (\text{E.16})$$

και ως έξοδο την

$$y(t) = 0 \quad (\text{E.17})$$

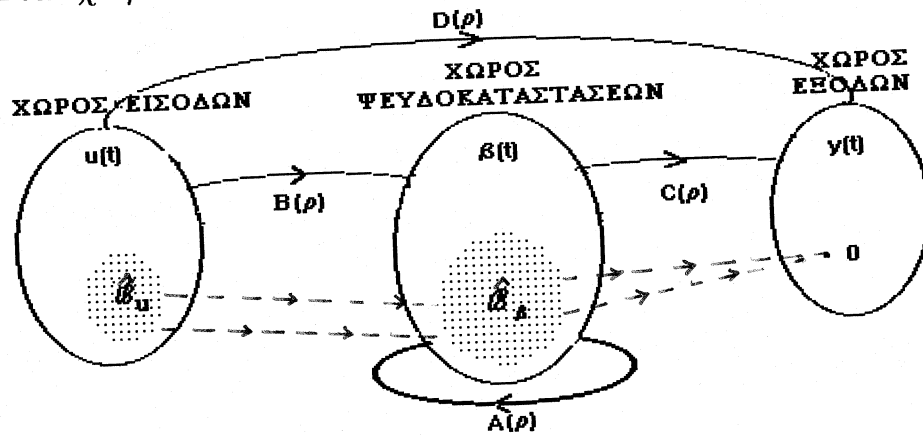
Εαν δηλώσουμε δηλαδή τον χώρο

$$\hat{B}_u = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t), \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \delta(t) \right\rangle \quad (\text{E.18})$$

διαστάσεως 3 και τον χώρο

$$\hat{B}_\beta = \langle [e^{-t}]_\beta, [\delta(t)]_\beta \rangle \quad (\text{E.19})$$

διαστάσεως 2 θα έχουμε



Διάγραμμα 8.10 Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου. □

Παράδειγμα 8.63 Θεωρήστε την παρακάτω πολυωνυμική περιγραφή συστήματος

$$(\rho^3 + \rho^2) \beta(t) = (-\rho^2 - \rho)u(t) \quad (\text{E.1}\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \rho^2 - \rho^3 \\ \rho - \rho^3 \end{bmatrix} \beta(t) + \begin{bmatrix} -\rho^2 - \rho \\ -\rho^2 + 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.1}\beta)$$

της οποίας ο Rosenbrock πίνακας είναι ο εξής

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|c} s^3 + s^2 & -s^2 - s \\ \hline -s^3 + s^2 - 1 & -s^2 - s \\ s^3 - s & -s^2 + 1 \end{array} \right] \quad (\text{E.2})$$

όπου

$$S_{P(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S_{P(s)}^{\omega}(s) = \begin{bmatrix} s^3 & 0 \\ 0 & 1/s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$(-s+1 \ 0 \ s) \left[ \begin{array}{c|c} s^3+s^2 & -s^2-s \\ \hline -s^3+s^2-1 & -s^2-s \\ \hline s^3-s & -s^2+1 \end{array} \right] = 0_{1 \times 3} \quad (\text{E.3})$$

Συνεπώς το σύστημα (E.1) θα έχει ένα πεπερασμένο αναλλοίωτο μηδενικό στο  $s=-1$ , πολ/τας 1 ( $n=1$ ), ένα αναλλοίωτο μηδενικό στο  $s=\infty$  πολ/τας 1 ( $\hat{q}=1$ ) και έναν αναλλοίωτο ελάχιστο δείκτη γραμμών βαθμού 1 ( $\hat{\eta}=1$ ). Θεωρήστε την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$\left[ \begin{array}{c|c} \rho^3+\rho^2 & -\rho^2-\rho \\ \hline -\rho^3+\rho^2-1 & -\rho^2-\rho \\ \hline \rho^3-\rho & -\rho^2+1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E.4})$$

Ο χώρος  $\hat{B}^{\mathbb{C}}$  που παράγεται λόγω της μηδενικής δομής στο  $\mathbb{C}$  του  $P(s)$  έχει διάσταση  $n=1$ , όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από την θεωρία του κεφαλαίου 6 και είναι ο εξής :

$$\hat{B}^{\mathbb{C}} = \left\{ \lambda \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \equiv \left\{ \lambda \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = B^{\mathbb{C}} \quad (\text{E.5})$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ο χώρος  $\hat{B}^{\infty}$  που παράγεται λόγω της μηδενικής δομής του  $P(s)$  στο  $s=\infty$  είναι ο :

$$\hat{B}^{\infty} = \left\{ \lambda \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \delta(t), \lambda \in \mathbb{R} \right\} \equiv \left\{ \lambda \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \delta(t), \lambda \in \mathbb{R} \right\} = B^{\infty} \quad (\text{E.6})$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$  και έχει διάσταση  $\hat{q}=1$ . Μια καινή και αναγκαία συνθήκη, η οποία προκύπτει από το θεώρημα 6.30, για να έχει το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου λύση είναι να ικανοποιείται η παρακάτω σχέση μεταξύ των αρχικών συνθηκών

$$u(0-) + u^{(1)}(0-) + \beta^{(1)}(0-) + \beta^{(2)}(0-) = 0 \quad (\text{E.7})$$

Ο χώρος λύσεων του ομογενούς συστήματος (E.4) θα είναι ο εξής

$$\hat{B} = \left\langle \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] e^{-t}, \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \delta(t) \right\rangle \equiv \left\{ \lambda_1 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] e^{-t} + \lambda_2 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \delta(t) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{B} \quad (\text{E.8})$$

και θα έχει διάσταση ίση με  $f = n + \hat{q} = 2$ . Θα έχουμε λοιπόν για είσοδο  $u(t)$  της μορφής

$$[u(t)]_u = \lambda_1 [e^{-t}]_u + \lambda_2 [\delta(t)]_u \equiv \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 \delta(t) \quad (\text{E.9})$$

που ανήκει στον χώρο  $\hat{B}_u$ , την ψευδοκατάσταση

$$[\beta(t)]_\beta = [0]_\beta \equiv 0 \quad (\text{E.10})$$

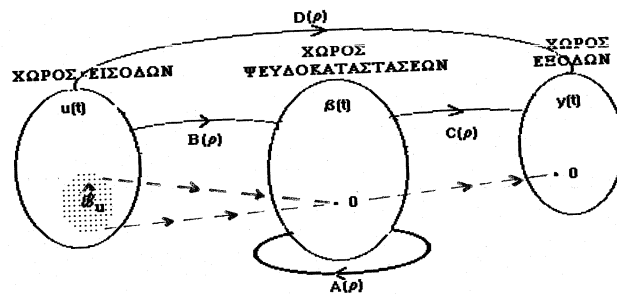
και ως έξοδο την

$$y(t) = 0 \quad (\text{E.11})$$

Εαν δηλώσουμε δηλαδή με

$$\hat{B}_u = \langle e^{-t}, \delta(t) \rangle$$

θα έχουμε



Διάγραμμα 8.11 Το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου.

□

### 8.5 Τετράγωνα αντίστροφα συστήματα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα χαρακτηριστικά στοιχεία στο  $s=\infty$  μιας ιδιαίτερης κατηγορίας συστημάτων, τα τετράγωνα αντίστροφα συστήματα (*square inverse systems*), των οποίων οι πεπερασμένες ιδιότητες μελετήθηκαν από τους Rosenbrock & Van Der Weiden (1977). Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι όσον αφορά τι εννοούμε όταν λέμε τετράγωνο αντίστροφο σύστημα ενός συστήματος  $\Sigma$  δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 8.63** (Rosenbrock & Van Der Weiden 1977) Θεωρείστε το γραμμικό πολυμεταβλητό σύστημα  $\Sigma$  της σχέσεως (8.2). Εάν υποθέσουμε

- (α) ότι  $p=m$  πρδ. ο αριθμός των εισόδων του συστήματος είναι ίσος με τον αριθμό εξόδων.
- (β) η συνάρτηση μεταφοράς του  $\Sigma$ , έστω  $G(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times p}$  είναι αντιστρέψιμη δηλ.  $\det[G(s)] \neq 0$ .

Τότε ένας πίνακας Rosenbrock με συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)^{-1}$  είναι ο παρακάτω

$$P'(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A(s) & B(s) & 0 \\ -C(s) & D(s) & -I_p \\ \hline 0 & I_p & 0 \end{array} \right] \quad (8.84)$$

Το σύστημα  $\Sigma'$  του οποίου ο πίνακας Rosenbrock είναι ο πίνακας  $P'(s)$  ονομάζεται τετράγωνο αντίστροφο σύστημα (*square inverse system*) του  $\Sigma$ . □

Η σχέση που συνδέει τα αποσυζευγμένα μηδενικά των  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  δίνεται από το παρακάτω

**Θεώρημα 8.64** Τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  έχουν τα ίδια αποσυζευγμένα μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  πρδ. τα ίδια αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου, εξόδου και εισόδου-εξόδου στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ .

**Απόδειξη** Τα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου του  $\Sigma'$  στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  είναι αντίστοιχα τα μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  του σύνθετου πίνακα

$$(T'(s) \quad u') = \left[ \begin{array}{cccc|c} A(s) & B(s) & 0 & 0 & 0 \\ -C(s) & D(s) & -I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 & I_p \end{array} \right] \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{αυστηρά}}{\sim}} \left[ \begin{array}{cc|c} T(s) & u & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p \end{array} \right] \quad (8.85)$$

και άρα τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  θα έχουν τα ίδια αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ . Ακολουθώντας ίδια βήματα μπορούμε να δείξουμε ότι τα αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου των δύο συστημάτων στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  ταυτίζονται.

Εαν μετακινήσουμε όλα τα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  από το σύστημα  $\Sigma'$  και συνεπώς όλα τα μηδενικά στο  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  από τον σύνθετο πίνακα (8.85) για να αφήσουμε τον πίνακα

$$(T'_1(s) \quad u'_1) \underset{\text{ισοδύναμος}}{\overset{\text{αυστηρά}}{\sim}} \left[ \begin{array}{cc|c} T_1(s) & u_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p \end{array} \right] \quad (8.86)$$

όπου ο πίνακας  $(T'_1(s) \quad u'_1)$  είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης όλων των αποσυζευγμένων μηδενικών εισόδου (στο  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ ) από τον πίνακα  $(T(s) \quad u)$ . Θεωρείστε τον πίνακα

$$\left[ \begin{array}{c} T'_1(s) \\ \gamma' \end{array} \right] \quad (8.87)$$

Τα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου (στο  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ ) του  $\Sigma'$  είναι τα μηδενικά (στο  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ ) του πίνακα  $(T'(s)^T \quad \gamma'^T)^T$  ή ισοδύναμα του πίνακα  $(T(s)^T \quad \gamma^T)^T$ , τα οποία δεν είναι μηδενικά του σύνθετου πίνακα (8.87) ή ισοδύναμα του πίνακα  $(T'_1(s)^T \quad \gamma'^T)^T$ . Έτσι τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  έχουν τα ίδια αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου-εξόδου στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$ .  $\square$



**Συμπέρασμα 8.65** Είναι εύκολο να δει κανείς από την σχέση (8.85) ότι οι σύνθετοι πίνακες  $(T'(s) \ U')$  και  $(T(s) \ U)$  θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στην περιοχή  $\mathbb{C}\{w\}$  και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών. Άρα τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  θα έχουν τους ίδιους δυναμικούς δείκτες εισόδων. Ομοια μπορούμε να δείξουμε ότι τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  έχουν τους ίδιους δυναμικούς δείκτες εξόδων.  $\square$

**Θεώρημα 8.66** Τα πεπερασμένα μηδενικά μεταφοράς του  $\Sigma'$  (μηδενικά μεταφοράς στο  $s=w$ ) ταυτίζονται με τους πεπερασμένους πόλους μεταφοράς του  $\Sigma$  (πόλους μεταφοράς στο  $s=w$ ), ενώ οι πεπερασμένοι πόλοι μεταφοράς του  $\Sigma'$  (πόλοι μεταφοράς στο  $s=w$ ) ταυτίζονται με τα πεπερασμένα μηδενικά μεταφοράς του  $\Sigma$  (μηδενικά μεταφοράς στο  $s=w$ ).  
**Απόδειξη** Η συνάρτηση μεταφοράς του  $\Sigma$  είναι  $G(s)$  ενώ του  $\Sigma'$  είναι  $G(s)^{-1}$  και συνεπώς από το θεώρημα 2.34 οι πόλοι του  $G(s)$  στο  $\mathbb{C}\{w\}$  θα ταυτίζονται με τα μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{w\}$  του  $G(s)^{-1}$  καθώς και τα μηδενικά του  $G(s)$  στο  $\mathbb{C}\{w\}$  θα ταυτίζονται με τους πόλους του  $G(s)^{-1}$  στο  $\mathbb{C}\{w\}$  που αποδεικνύει το θεώρημα.  $\square$

**Θεώρημα 8.67** (Rosenbrock & Van Der Weiden 1977) Η δομή των πεπερασμένων μηδενικών του  $\Sigma'$  (συμπεριλαμβανομένης και της πολλαπλότητας) είναι ισόμορφη με την δομή των πεπερασμένων πόλων του  $\Sigma$ , ενώ η δομή των πεπερασμένων πόλων του  $\Sigma'$  είναι ισόμορφη με την δομή των πεπερασμένων μηδενικών του  $\Sigma$ .  $\square$

**Θεώρημα 8.68** Το συνολικό πλήθος των μηδενικών του  $\Sigma'$  στο  $s=w$  (συμπεριλαμβανομένης και της πολλαπλότητας) ταυτίζεται με το συνολικό πλήθος των πόλων του  $\Sigma$  στο  $s=w$ , ενώ το συνολικό πλήθος των πόλων του  $\Sigma'$  στο  $s=w$  ταυτίζεται με το συνολικό πλήθος των μηδενικών του  $\Sigma$  στο  $s=w$ .

**Απόδειξη** Από το θεώρημα 8.49 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \#\{\text{μηδενικά του } \Sigma' \text{ στο } s=w\} &\equiv \#\{\text{μηδενικά του } G^{-1}(s) \text{ στο } s=w\} + \\ &\quad + \#\{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma' \text{ στο } s=w\} \end{aligned}$$

$\begin{array}{l} \text{θεώρημα 8.64} \\ \Leftrightarrow \\ \text{θεώρημα 8.66} \end{array}$

$$\begin{aligned}
\#\{\text{μηδενικά του } \Sigma' \text{ στο } s=\omega\} &\equiv \{\#\text{ πόλοι του } G(s) \text{ στο } s=\omega\} + \\
&+ \#\{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s=\omega\} \equiv \\
&\equiv \#\{\text{πόλοι του } \Sigma \text{ στο } s=\omega\}
\end{aligned} \tag{8.88}$$

όπου  $\#\{\cdot\}$  δηλώνει το συνολικό πλήθος συμπεριλαμβανομένης και της πολλαπλότητας.  
Εντελώς όμοια έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\#\{\text{πόλοι του } \Sigma' \text{ στο } s=\omega\} &\equiv \#\{\text{πόλοι του } G^{-1}(s) \text{ στο } s=\omega\} + \\
&+ \#\{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma' \text{ στο } s=\omega\} \quad \begin{array}{l} \text{θεώρημα 8.64} \\ \Leftrightarrow \\ \text{θεώρημα 8.66} \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\#\{\text{πόλοι του } \Sigma' \text{ στο } s=\omega\} &\equiv \#\{\text{μηδενικά του } G(s) \text{ στο } s=\omega\} + \\
&+ \#\{\text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s=\omega\} \equiv \\
&\equiv \#\{\text{μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } s=\omega\}
\end{aligned} \tag{8.89} \quad \square$$

**Πρόταση 8.69** Το σύνολο των πεπερασμένων πόλων (πόλων στο  $s=\omega$ ) του  $\Sigma'$  ταυτίζεται με το σύνολο των πεπερασμένων αναλλοίωτων μηδενικών (αναλλοίωτων μηδενικών στο  $s=\omega$ ) του  $\Sigma$ . Το σύνολο των πεπερασμένων πόλων (πόλων στο  $s=\omega$ ) του  $\Sigma$  ταυτίζεται με το σύνολο των πεπερασμένων αναλλοίωτων μηδενικών (αναλλοίωτων μηδενικών στο  $s=\omega$ ) του  $\Sigma'$ .

**Απόδειξη** Από τον ορισμό 8.47 έχουμε ότι

$$\{\text{πόλοι στο } \mathbb{C}U\{\omega\} \text{ του } \Sigma'\} \equiv \{\text{μηδενικά στο } \mathbb{C}U\{\omega\} \text{ του } \begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 & 0 \\ -C(s) & D(s) & -I_p & 0 \\ 0 & I_p & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix}\} \tag{8.90}$$

Εχουμε επίσης ότι

$$\begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 & 0 \\ -C(s) & D(s) & -I_p & 0 \\ 0 & I_p & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\text{ισοδύναμος}} \underset{\text{αυστηρά}}{\begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 & 0 \\ -C(s) & D(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}} \quad (8.91)$$

Αρα

$$\{\text{πόλοι στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \text{ του } \Sigma'\} \equiv \{\text{μηδενικά στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \text{ του } \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix}\} \quad (8.92)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία μπορούμε να αποδείξουμε την αντίστοιχη πρόταση για τους πόλους του  $\Sigma$  στο  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\}$ . □

**Θεώρημα 8.70** Τα συστήματα  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  έχουν την ίδια γενικευμένη τάξη  $f$ , συμπλεκτικότητα  $c$ , και τον ίδιο βαθμό  $d_R$  (Rosenbrock degree).

**Απόδειξη** Εχουμε σύμφωνα με τον ορισμό 8.34 και 8.47 ότι

$$\begin{aligned} f_{\Sigma'} &= \# \{ \text{μηδενικά του } T'(s) \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} = \\ &= \# \{ \text{πόλοι του } \Sigma' \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} \stackrel{\text{θεώρημα 8.49}}{=} \\ &= \# \{ \text{πόλοι του } G^{-1}(s) \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} + \# \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma' \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} = \\ &\stackrel{(\text{Θεώρημα 2.34})}{=} \# \{ \text{μηδενικά του } G(s) \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} + \\ &\stackrel{(\text{Θεώρημα 8.64})}{=} \# \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} = \\ &\stackrel{(\text{Θεώρημα 2.35})}{=} \# \{ \text{πόλοι του } G(s) \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} + \\ &+ \# \{ \text{αποσυζευγμένα μηδενικά του } \Sigma \text{ στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \#\{ \text{πόλοι του } \Sigma \text{ στο } \mathbb{C}U\{\infty\} \} = \#\{ \text{μηδενικά του } T(s) \text{ στο } \mathbb{C}U\{\infty\} \} = \\
&= \mathbf{f}_{\Sigma}
\end{aligned} \tag{8.93}$$

Η συμπλεκτικότητα  $c$  και ο βαθμός  $d_R$  των  $\Sigma$  και  $\Sigma'$  ταυτίζονται σύμφωνα με τους Rosenbrock & Van Der Weiden (1977) και έτσι το θεώρημα αποδείχτηκε.  $\square$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε αντίθεση με την γενικευμένη τάξη του  $\Sigma'$  η οποία ταυτίζεται με την γενικευμένη τάξη του  $\Sigma$ , η τάξη του  $\Sigma'$  δεν ταυτίζεται πάντα με την τάξη του  $\Sigma$  όπως φαίνεται και στο παρακάτω παράδειγμα.

**Παράδειγμα 8.71** Θεωρείστε τον Rosenbrock πίνακα ενός συστήματος  $\Sigma$ , έστω

$$P(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} s^2+5s+6 & s+1 & \\ \hline -2s-5 & 3s+2 & \end{array} \right] \tag{E.1}$$

με τάξη  $n_{\Sigma} = \deg|s^2+5s+6| = 2$ . Εστω επίσης ο Rosenbrock πίνακας του αντίστροφου συστήματος  $\Sigma'$ , του  $\Sigma$

$$P'(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \tag{E.2}$$

με τάξη  $n_{\Sigma'} = \deg|P(s)| = 3 \neq 2 = n_{\Sigma}$ . Παρ'όλα αυτά έχουμε ότι  $\mathbf{f}_{\Sigma'} = 3 = \mathbf{f}_{\Sigma}$  το οποίο επιβεβαιώνει το θεώρημα 8.70.  $\square$

Οποιοδήποτε αποτέλεσμα αφορά την τάξη και την γενικευμένη τάξη του τετράγωνου αντίστροφου συστήματος  $\Sigma'$ , αφορά εξίσου την ελάχιστη τάξη  $\nu(G^{-1}(s))$  και την γενικευμένη ελάχιστη τάξη  $\delta_M(G^{-1}(s))$  του  $\Sigma'$  όπως φαίνεται και στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 8.72** (Rosenbrock & Van Der Weiden 1977) Οι συναρτήσεις μεταφοράς των  $\Sigma$  και  $\Sigma'$ ,  $G(s)$  και  $G^{-1}(s)$  αντίστοιχα έχουν τον ίδιο McMillan βαθμό πρδ.  $\delta_M(G(s)) \equiv \delta_M(G^{-1}(s))$ , και όχι κατ'ανάγκη τον ίδιο ελάχιστο βαθμό πρδ.  $\nu(G(s)) (= \eta \neq) \nu(G^{-1}(s))$ .  $\square$

Εαν θελήσουμε να κάνουμε μια περίληψη των παραπάνω αποτελεσμάτων θα πάρουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$f_{\Sigma'} \equiv f_{\Sigma}$$

$$c_{\Sigma'} \equiv c_{\Sigma}$$

$$d_R(\Sigma') \equiv d_R(\Sigma)$$

$$n_{\Sigma'} (\neq \eta =) n_{\Sigma}$$

ελάχιστη τάξη του  $\Sigma'$  ( $\neq \eta =$ ) ελάχιστη τάξη του  $\Sigma$

γενικευμένη ελάχιστη τάξη του  $\Sigma'$   $\equiv$  γενικευμένη ελάχιστη τάξη του  $\Sigma$

{αποσ. μηδ. του  $\Sigma'$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }  $\equiv$  {αποσ. μηδ. του  $\Sigma$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }

{δυν. δείκτες εισόδων (εξόδων) του  $\Sigma'$ }  $\equiv$  {δυν. δείκτες εισόδων (εξόδων) του  $\Sigma$ }

{μηδενικά (πόλοι) μεταφ. του  $\Sigma'$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }  $\equiv$  {πόλοι (μηδενικά) μεταφ. του  $\Sigma$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }

{πόλοι (μηδενικά) του  $\Sigma'$  στο  $\mathbb{C}$ }  $\equiv$  {μηδενικά (πόλοι) του  $\Sigma$  στο  $\mathbb{C}$ }

$\#\{\text{πόλοι (μηδενικά) του } \Sigma' \text{ στο } s=\infty\} \equiv \#\{\text{μηδενικά (πόλοι) του } \Sigma \text{ στο } s=\infty\}$

{πόλοι του  $\Sigma'$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }  $\equiv$  {αναλλοίωτα μηδενικά του  $\Sigma$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }

{πόλοι του  $\Sigma$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }  $\equiv$  {αναλλοίωτα μηδενικά του  $\Sigma'$  στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ }

**Διάγραμμα 8.12** Σχέσεις μεταξύ των χαρακτηριστικών αναλλοίωτων των  $\Sigma$  και  $\Sigma'$ .

Θέλουμε εδώ να διευκρινίσουμε ότι όταν λέμε ταύτιση των πόλων στο  $s=\infty$  ενός πίνακα  $A(s)$  με τα μηδενικά στο  $s=\infty$  ενός άλλου πίνακα  $B(s)$  εννοούμε ότι οι τάξεις των πόλων στο  $s=\infty$  του  $A(s)$ , έστω  $q_i(A)$  ταυτίζονται με τις τάξεις των μηδενικών στο  $s=\infty$  του  $B(s)$ , έστω  $\hat{q}_i(B)$ .

### 8.6 Περίληψη.

Το κεφάλαιο αυτό είχε έναν εισαγωγικό χαρακτήρα στην περιγραφή γραμμικών πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με σταθερούς συντελεστές. Ένα πλήθος χαρακτηριστικών στοιχείων που περιγράφουν ένα γραμμικό σύστημα τόσο όσον αφορά την πεπερασμένη δομή του όσο και την δομή του στο  $s=\omega$ , δίνεται αντίστοιχα στις ενότητες 8.2 και 8.3.

Το κεφάλαιο αυτό όμως εκτός από εισαγωγικό χαρακτήρα είχε ως σκοπό και την εύρεση μιας λύσης στο πρόβλημα της μηδενικής εξόδου (*output-zeroing problem*) που παρουσιάστηκε από τους Karcaniyas (1975), MacFarlane & Karcaniyas (1976), Karcaniyas & Hayton (1981). Στις ενότητες 8.2 και 8.3 λοιπόν, βλέπουμε βάσει της θεωρίας του έκτου κεφαλαίου, μια γεωμετρική ερμηνεία των αναλλοίωτων μηδενικών στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$  ενός συστήματος, ένα αποτέλεσμα που έχει θεωρηθεί από τον Walker (1988) ανεξερεύνητο έως τώρα. Ένα καινούργιο χαρακτηριστικό που ορίζουμε στην ενότητα 8.3 είναι οι αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες στηλών (γραμμών), οι οποίοι έχουν ως σκοπό να βοηθήσουν στην πλήρη λύση του προβλήματος της μηδενικής εξόδου. Ένα ερώτημα που γεννιέται από αυτό το κεφάλαιο και αφήνεται για μελλοντική έρευνα είναι ποιά θα είναι η διάσταση των χώρων  $\hat{B}_u$  και  $\hat{B}_\beta$  στο συμπέρασμα 8.60 ;

Τέλος μια ειδική κατηγορία συστημάτων, τα τετράγωνα αντίστροφα συστήματα, μελετούνται στην ενότητα 8.4. Πιο συγκεκριμένα η σχέση μεταξύ των χαρακτηριστικών στοιχείων ενός συστήματος  $\Sigma$  στο  $\mathbb{C}\{\omega\}$  και του αντίστροφου του, έστω  $\Sigma'$  (στην περίπτωση που οι ιδιότητες (α) και (β) του ορισμού 8.63 ικανοποιούνται) μελετήθηκε, με συνέπεια την γενίκευση της δουλειάς των Rosenbrock & Van Der Weiden (1977) που αφορούσε μόνο τα πεπερασμένα χαρακτηριστικά αυτών των συστημάτων.

**BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [B1] Blomberg H. and Ylinen R., 1983, *Algebraic Theory of Multivariable Linear Systems.*, Academic Press, New York.
- [B2] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1980, Input-output invariants for linear multivariable systems., *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-25**, pp.20.
- [B3] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations in generalized state-space form for polynomial matrices and the definitions of poles zeros and decoupling zeros at infinity., *Int.J.Control*, **33**, pp.393-411.
- [B4] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations and the pole/zero structure at infinity of non-proper and interconnected linear multivariable systems., *Proc. Joint Automatic Control Conf. TA-4E.1*, American Automatic Control Council, Charlottesville, V.A..
- [C1] Callier F.M., Cheng V.H.L. and Desoer C.A., 1981, Dynamic interpretation of poles and transmission zeros for distributed multivariable systems., *IEEE Trans. Circuit & Systems*, **CAS-28**, pp.300-307.
- [C2] Callier F.M. and Desoer C.A., 1982, *Multivariable Feedback Systems.*, New York : Springer Verlag.
- [C3] Chen C.T., 1984, *Linear System Theory and Design.*, Holt, Reinehart and Winston, New York.
- [C4] Commault C. and Dion J.M., 1981, Structure at infinity of linear multivariable systems. A geometric approach., *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-27**, pp.693.
- [D1] Desoer C.A. and Schulman J.D., 1974, Zeros and poles of transfer functions and their dynamical interpretation., *IEEE Trans. Circuits & Systems*, **CAS-21**, pp.3-8.
- [F1] Ferreira P.M., 1980, Infinite system zeros., *Int.J.Control*, **32**, pp.731-735.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

- [K2] Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1993, Structural properties of inverse linear systems., accepted to *IEEE Mediterranean Symposium on New Directions in Control Theory and Applications*, Crete, Greece, 21–23 June, 1993.
- [K3] Karcanias N., 1975, *Geometric theory of zeros and its use in feedback analysis.*, Ph.D. Thesis, University of Manchester, Elec. Eng. Dept., U.K., pp.245–247.
- [K4] Karcanias N. and Kouvaritakis B., 1979, The output zeroing problem and its relationship to the invariant zero structure., *Int.J.Control*, **30**, pp.395–415.
- [K5] Karcanias N. and Hayton G.E., 1981, State–space and transfer function invariant infinite zeros : A unified approach., *Joint Automatic Control Conf. TA4C*, Charlottesville, V.A..
- [M1] MacFarlane A.G.J. and Karcanias N., 1976, Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex–variable theory., *Int.J.Control*, **24**, pp.33–74.
- [M2] Molinari B.P., 1978, Structural invariants of linear multivariable systems., *Int.J.Control*, **28**, pp.493–510.
- [M3] Morf M., 1975, Extended system and transfer function matrices and system equivalence., in *Proceedings of the 1975 IEEE Conference on Decision and Control*, Houston, pp.199–206.
- [M4] Morse A.S., 1973, Structural invariants of linear multivariable systems., *SIAM J.Control*, **11**, pp.446–465.
- [P1] Pugh A.C., 1974, Structural properties of linear multivariable systems., *Int.J.Control*, **20**, pp.191–202.
- [P2] Pugh A.C., 1976, The McMillan degree of a polynomial system matrix., *Int.J.Control*, **24**, pp.129–135.
- [P3] Pugh A.C., 1977, Transmission and system zeros., *Int.J.Control*, **26**, pp.315–324.
- [P4] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, On the zeros and poles of a rational matrix., *Int.J.Control*, **30**, pp.213–226.



- [P5] Pugh A.C. and Krishnaswamy V., 1985, Algebraic and dynamic characterizations of poles and zeros at infinity., *Int.J.Control*, **42**, pp.1145–1153.
- [P6] Pugh A.C. and Hayton G.E., The extended state space and matrix pencils.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State–Space and Multivariable Theory*, Wiley, New York.
- [R2] Rosenbrock H.H., 1973, The zeros of a system., *Int.J.Control*, **18**, pp.297–299.
- [R3] Rosenbrock H.H., 1974a, Correction to "The zeros of a system.", *Int.J.Control*, **20**, pp.525–527.
- [R4] Rosenbrock H.H., 1974b, Structural properties of linear dynamical systems., *Int.J.Control*, **20**, pp.191–202.
- [R5] Rosenbrock H.H., 1974c, Order, degree and complexity., *Int.J.Control*, **19**, pp.323–331.
- [R6] Rosenbrock H.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1977, Inverse systems., *Int.J.Control*, **25**, pp.389–392.
- [S1] Schrader C.B. and Sain M.K., 1989, Research on system zeros., *Int.J.Control*, **50**, pp.1407–1433.
- [S2] Suda N. and Mutsuyoshi E., 1978, Invariant zeros and input–output structure of linear time invariant systems., *Int.J.Control*, **28**, pp.525–596.
- [V1] Van Der Weiden A.J.J. and Bosgra O.H., 1979, The determination of structural properties of a linear multivariable system by operation of system similarity. 1. Stricly proper systems., *Int.J.Control*, **29**, pp.835.
- [V2] Van Der Weiden A.J.J. and Bosgra O.H., 1979, The determination of structural properties of a linear multivariable system by operation of system similarity. 2. Nonproper systems in generalized state–space form., *Int.J.Control*, **32**, pp.489.
- [V3] Van Der Weiden A.J.J., 1983, *The use of structural properties in linear multivariable control system design.*, Ph.D.Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [V4] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods.*, Nelson–Wiley, London.

- [V5] Verghese G.C., Lèvy B. and Kailath T., 1978, Generalized state–space systems., *Proc. 1978 IEEE Conf. on Decision and Control*; New York, pp.518.
- [V6] Verghese G.C., 1978, *Infinite frequency behavior in generalized dynamical systems.*, Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford ,California, USA.
- [V7] Verghese G.C. and Kailath T., 1979, Impulsive behaviour in dynamical systems : Structure and significance., *Proc. Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Vol.3, P.Dewilde, Ed. ; North Hollywood, Ca., Western Periodicals Co., p.162.
- [V8] Verghese G.C., Van Dooren P.M. and Kailath T., 1979, Properties of the system matrix of a generalized state–space system., *Int.J.Control*, 30, pp.235–243.
- [W1] Walker A.B., 1988, *Equivalence Transformations for Linear Systems. Ph.D.* dissertation, Hull University, Hull, England.
- [W2] Wonham W.M., 1979, *Linear Multivariable Control : A geometric approach.*, Second Edition, Vol.10, Applications of Mathematic Series, New York : Springer–Verlag.
- [W3] Wolovich W.A., *Linear Multivariable Systems.*, Applied Mathematical Sciences, Vol.11, Springer Verlag : New York.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 9

### ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

- 9.1 Εισαγωγή.
- 9.2 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί Π.Π.Σ. στο  $\mathbb{C}$ .
- 9.3 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί Π.Π.Σ. στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ .
  - 9.3.1 Εξέλιξη ισοδύναμων μετασχηματισμών συστημάτων στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ .
  - 9.3.2 Αναγωγή μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.
    - 9.3.2α Ισοδύναμο μοντέλο Verghese (1978).
    - 9.3.2β Ισοδύναμο μοντέλο Bosgra & Van Der Weiden (1981)
    - 9.3.2γ Ισοδύναμο μοντέλο Zhang (1989).
    - 9.3.2δ Ισοδύναμο μοντέλο Tan & Vandewall (1988)
    - 9.3.2ε Ισοδύναμο μοντέλο Vardulakis (1991).
    - 9.3.2στ Σύγκριση πλήρως ισοδύναμων συστημάτων.
  - 9.3.3 Αριστερές και δεξιές κλασματικές Π.Π.Σ. και πλήρης ισοδυναμία συστημάτων.
  - 9.3.4 Τετράγωνα αντίστροφα συστήματα και πλήρη ισοδυναμία συστημάτων.
- 9.4 Περίληψη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 9.1 Εισαγωγή.

Όπως είδαμε στο 8<sup>ο</sup> κεφάλαιο, η περιγραφή ενός γραμμικού πολυμεταβλητού συστήματος με σταθερούς συντελεστές, μέσω του πολυωνυμικού πίνακα του συστήματος μας δίνει αρκετά πλεονεκτήματα. Μεταξύ αυτών

- 1) Ο πολυωνυμικός πίνακας του συστήματος μας δίνει μαθηματικές πληροφορίες σχετικές με το σύστημα.
- 2) Οι πόλοι και τα μηδενικά τα οποία έχουν σχέση με το σύστημα, προκύπτουν από ορισμένους υποπίνακες του πολυωνυμικού πίνακα του συστήματος.
- 3) Επίσης πράξεις οι οποίες μπορούν να γίνουν στο σύστημα, μπορούν να αναπαρασταθούν με μετασχηματισμούς του πολυωνυμικού πίνακα του συστήματος.

Ενα φυσικό σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί με πολλών ειδών πολυωνυμικές περιγραφές ή ισοδύναμα με διαφορετικούς πίνακες Rosenbrock. Ενα βασικό ερώτημα συνεπώς που γεννιέται είναι πότε μπορούμε να πούμε ότι δύο συστήματα είναι ισοδύναμα ή αλλιώς πότε δύο πίνακες συστημάτων Rosenbrock περιγράφουν το ίδιο σύστημα ; Ενδιαφέρον παρουσιάζει αυτό το ερώτημα, λόγω του ότι η λύση του μας δίνει την ευκαιρία να μετασχηματίζουμε το σύστημα μας σε μορφές απλές, οι οποίες έχουν μελετηθεί κατά το μεγαλύτερο μέρος τους από την επιστημονική κοινότητα. Κλασσικό τέτοιο πρόβλημα είναι η αναγωγή μιας πολυωνυμικής περιγραφής ενός συστήματος (Π.Π.Σ.) σε μια πολυωνυμική περιγραφή στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.

Η λύση του προβλήματος της ισοδυναμίας δύο Π.Π.Σ., ανάγεται όπως θα δούμε παρακάτω, στην εύρεση πολυωνυμικών μετασχηματισμών μεταξύ των πινάκων Rosenbrock των δύο συστημάτων που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά αυτών των συστημάτων πρδ. γενικευμένη τάξη, βαθμός Rosenbrock, αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου και εξόδου, κ.λ.π..

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου αυτού θα μελετήσουμε ισοδυναμίες συστημάτων που έχουν ως σκοπό να διατηρήσουν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  ενός συστήματος *πρδ.* τάξη  $n$ , βαθμός  $d_{\mathbb{R}}$ , πεπερασμένα μηδενικά και πόλοι μεταφοράς, πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου, εξόδου και εισόδου–εξόδου, πεπερασμένα αναλλοίωτα μηδενικά. Το είδος αυτών των ισοδυναμιών έχει μελετηθεί από πλήθος επιστημόνων, μεταξύ αυτών Rosenbrock (1970, 1977), Wolovich (1974), Morf (1975), Fuhrmann (1977), Levy et al. (1977), Pernebo (1977), Pugh & Shelton (1978), Kailath (1980), Smith (1981).

Η μελέτη της δομής συστημάτων στο  $s=\infty$ , που άρχισε να εμφανίζεται με τον Verghese (1978), κατεύθυνε αντίστοιχα και τις έρευνες στις ισοδυναμίες Π.Π.Σ.. Έτσι οι Anderson et al. (1985), Pugh et al. (1987), Hayton et al. (1986, 1990) δίνουν μια γενίκευση των παραπάνω μετασχηματισμών, με μετασχηματισμούς που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\{s\}$  *πρδ.* γενικευμένη τάξη, αποσυζευγμένα μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ , κ.λ.π.. Μια παρουσίαση αυτών των αποτελεσμάτων μαζί με ορισμένους καινούργιους ορισμούς και αποτελέσματα θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε στην ενότητα 9.3. Τα καινούργια αυτά αποτελέσματα αφορούν τον προσδιορισμό της ισοδυναμίας που συνδέει αριστερές ή δεξιές Π.Π.Σ., την αναγωγή Π.Π.Σ. σε ισοδύναμες περιγραφές στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων καθώς και την γενίκευση της ισοδυναμίας Morf (Morf (1975), Levy et al. (1977)).

## 9.2 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί Π.Π.Σ. στο $\mathbb{C}$ .

Στην ενότητα αυτή θα προπαθήσουμε να δώσουμε μια περίληψη των γνωστών ισοδυναμιών Π.Π.Σ. που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}$ . Θα ξεκινήσουμε από την πιο απλή περιγραφή συστήματος που περιέχει μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  : την πολυωνυμική περιγραφή συστήματος στον χώρο των καταστάσεων. Θεωρείστε λοιπόν την παρακάτω πολυωνυμική περιγραφή ενός συστήματος :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (9.1\alpha)$$

$$y(t) = C x(t) + D(\rho) u(t) \quad (9.1\beta)$$

όπου  $\rho = d/dt$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  και  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ .

**Ορισμός 9.1** (Rosenbrock 1970) Δύο πολυωνυμικές περιγραφές συστημάτων στον χώρο των καταστάσεων της μορφής (9.1), και ίδιων διαστάσεων πρδ.  $n_1 = n_2 = n$ ,  $p_1 = p_2 = p$ ,  $m_1 = m_2 = m$ , θα ονομάζονται *όμοιες* (*system similar*) εάν υπάρχει ένας σταθερός, τετράγωνος και αντιστρέψιμος πίνακας  $H$  τέτοιος ώστε :

$$\begin{bmatrix} sI_n - A_1 & B_1 \\ -C_1 & D_1(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_n - A_2 & B_2 \\ -C_2 & D_2(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.2) \quad \square$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός αποτελεί ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού μετασχηματισμού που αφορά γενικές Π.Π.Σ. της μορφής

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (9.3\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (9.3\beta)$$

όπου  $\rho = d/dt$ ,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$  και  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ . Εστω  $n := \deg |A(s)|$  η τάξη του παραπάνω συστήματος. Προφανώς θα έχουμε είτε  $r > n$ , είτε  $r = n$ ,

είτε  $r < n$ . Εάν  $r < n$  τότε μεγαλώνουμε τον πίνακα Rosenbrock του συστήματος, προσθέτοντας  $q-r$  μονάδες στην διαγώνιο του  $P(s)$ , όπου  $q \geq n = \deg |A(s)|$ , έτσι ώστε να πάρουμε την γενικευμένη μορφή του πίνακα Rosenbrock

$$P_e(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{q-r} & 0_{q-r,r} & 0_{q-r,m} \\ \hline 0_{r,q-r} & A(s) & B(s) \\ \hline 0_{p,q-r} & -C(s) & D(s) \end{array} \right] \quad (9.4)$$

Η πράξη αυτή είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση αλγεβρικών εξισώσεων στο σύστημα (9.3α) της μορφής

$$\beta_1(t) = 0_{q-r,m} u(t), \quad y(t) = 0_{p,q-r} \beta_1(t) + C(\rho)\beta(t) + D(\rho)u(t) \quad (9.5)$$

**Ορισμός 9.2** (Rosenbrock 1970, 1977) Εστω δύο συστήματα  $\Sigma_1, \Sigma_2$  της μορφής (9.3) με γενικευμένους πίνακες Rosenbrock

$$P_{ei}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{q-r_i} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_i(s) & B_i(s) \\ \hline 0 & -C_i(s) & D_i(s) \end{array} \right] \quad i=1,2 \quad (9.6)$$

όπου  $A_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_i \times r_i}$ ,  $B_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_i \times m}$ ,  $C_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r_i}$ ,  $D_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $n_i = \deg |A_i(s)|$  και  $q \geq \max\{n_1, n_2\}$ . Τότε τα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **αυστηρά ισοδύναμα (A.I.)** (*strictly system equivalent*) εάν και μόνο εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$ ,  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}$ , και  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|c} I_{q-r_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_1(s) & B_1(s) \\ \hline 0 & -C_1(s) & D_1(s) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{q-r_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_2(s) & B_2(s) \\ \hline 0 & -C_2(s) & D_2(s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.7) \quad \square$$

Ορισμένες από τις ιδιότητες της αυστηρής ισοδυναμίας φαίνονται στο παρακάτω θεώρημα :

**Θεώρημα 9.3** (Rosenbrock 1970, 1977)

- α) Η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτα τα παρακάτω χαρακτηριστικά ενός συστήματος
- α1) την τάξη  $n = \deg |A(s)|$  και τον βαθμό  $d_R$  ενός συστήματος,
  - α2) την συνάρτηση μεταφοράς  $G(s) = C(s)A(s)^{-1}B(s) + D(s)$ ,
  - α3) την ελάχιστη τάξη  $\nu(G(s))$  και την γενικευμένη ελάχιστη τάξη  $\delta_M(G(s))$ ,
  - α4) τους πεπερασμένους πόλους και μηδενικά μεταφοράς,
  - α5) τα πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου, εξόδου και εισόδου-εξόδου,
  - α6) τους πεπερασμένους πόλους και μηδενικά του συστήματος,
- με άλλα λόγια διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του συστήματος.
- β) Η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων ταυτίζεται με την ομοιότητα συστημάτων όταν τα ισοδύναμα συστήματα είναι της μορφής (9.1).
- γ) Η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων και συνεπώς από (β) και η ομοιότητα συστημάτων είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των πολυωνυμικών πινάκων συστημάτων. □

Η μετάβαση από μια γενική πολυωνυμική περιγραφή συστήματος σε μια περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων είναι πάντα δυνατή όπως φαίνεται από το παρακάτω

**Θεώρημα 9.4** (Rosenbrock 1970, Vardulakis 1991) Κάθε γενικευμένη πολυωνυμική περιγραφή συστήματος (δες 9.4) είναι αυστηρά ισοδύναμη με μια πολυωνυμική περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων. □



Στο παραπάνω θεώρημα δεν αναφέρουμε τον τρόπο μετασχηματισμού μας τέτοιας πολυωνυμικής περιγραφής στον χώρο των καταστάσεων μα που παρακάτω θα δώσουμε άλλους αλγόριθμους αναγωγής γενικών Π.Π.Σ. σε Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Ενδεικτικά μόνο αναφέρουμε τα δύο παρακάτω χαρακτηριστικά παραδείγματα αναγωγής Π.Π.Σ. σε Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων.

**Παράδειγμα 9.5** Θεωρείστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} \rho+1 & \rho^3+2\rho^2 \\ \rho^2+3\rho+2 & \rho^4+4\rho^3+4\rho^2+\rho+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2+1 \\ \rho^3+2\rho^2+\rho+3 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.1})$$

$$y(t) = (-\rho^2-3\rho-1 \quad -\rho^4-4\rho^3-4\rho^2+1) \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{bmatrix} + (\rho^3+2\rho^2+\rho+2) u(t)$$

Ο Rosenbrock πίνακας του παραπάνω συστήματος είναι ο

$$P(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} \rho+1 & \rho^3+2\rho^2 & \rho^2+1 \\ \rho^2+3\rho+2 & \rho^4+4\rho^3+4\rho^2+\rho+2 & \rho^3+2\rho^2+\rho+3 \\ \hline \rho^2+3\rho+1 & \rho^4+4\rho^3+4\rho^2-1 & \rho^3+2\rho^2+\rho+2 \end{array} \right] \quad (\text{E.2})$$

Εχουμε ότι  $n = \deg |A(s)| = \deg |s^2+3s+2| = 2 \equiv 2 = r$  και συνεπώς η γενικευμένη μορφή του πίνακα Rosenbrock του συστήματος θα είναι  $P_e(s) = P(s)$ . Η παρακάτω αυστηρή ισοδυναμία

$$\begin{bmatrix} -\rho-3 & 1 & | & 0 \\ -\rho-2 & 1 & | & 0 \\ \hline \rho^2-2\rho-8 & 3-\rho & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho+1 & \rho^3+2\rho^2 & | & \rho^2+1 \\ \rho^2+3\rho+2 & \rho^4+4\rho^3+4\rho^2+\rho+2 & | & \rho^3+2\rho^2+\rho+3 \\ \hline \rho^2+3\rho+1 & \rho^4+4\rho^3+4\rho^2-1 & | & \rho^3+2\rho^2+\rho+2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \rho+1 & 0 & | & -1 \\ 0 & \rho+2 & | & 1 \\ \hline 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\rho^2-\rho+2 & | & 1-\rho \\ 0 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

συνδέει την πολυωνυμική περιγραφή (E.1) με την παρακάτω πολυωνυμική περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.4})$$

$$y(t) = (-1 \ 1) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι και το σύστημα (E.1) και το σύστημα (E.4) έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ . Παρ'όλα αυτά όμως το σύστημα (E.1) διαθέτει και μηδενική δομή στο  $s=\infty$  (δες Παράδειγμα 8.61) πρδ. γενικευμένη τάξη  $f=4$ , σε αντίθεση με το σύστημα (E.4) που δεν διαθέτει μηδενική δομή στο  $s=\infty$  πρδ.γενικευμένη τάξη  $f=2$ . Παρατηρούμε δηλαδή ότι παρ'όλο που ο μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  του συστήματος, δεν διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή του συστήματος στο  $s=\infty$ .  $\square$

**Παράδειγμα 9.6** Θεωρήστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$(\rho^2+5\rho+6) \beta(t) = (\rho+1) u(t) \quad (\text{E.1})$$

$$y(t) = (-2\rho+5) \beta(t) + (3\rho+2) u(t)$$

Ο Rosenbrock πίνακας του παραπάνω συστήματος θα είναι ο

$$P(s) = \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & | & s+1 \\ -2s-5 & | & 3s+2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Εχουμε ότι  $r=1 < 2 = \deg |s^2+5s+6|$ . Εστω  $q=2 = \deg |s^2+5s+6|$ . Θεωρήστε τον γενικευμένο

πίνακα Rosenbrock του παραπάνω συστήματος

$$P_e(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2+5s+6 & s+1 \\ \hline 0 & -2s-5 & -3s+2 \end{array} \right] \quad (\text{E.3})$$

Η παρακάτω αυστηρή ισοδυναμία

$$\left[ \begin{array}{cc|c} s+2 & 1 & 0 \\ s+3 & 1 & 0 \\ \hline -2 & -0 & -1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2+5s+6 & s+1 \\ \hline 0 & -2s-5 & -3s+2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} s+2 & 0 & -1 \\ 0 & s+3 & -2 \\ \hline -9 & -11 & -3s \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & s+3 & 1 \\ 1 & s+2 & 1 \\ \hline -0 & -0 & -1 \end{array} \right] \quad (\text{E.4})$$

συνδέει την γενικευμένη πολυωνυμική περιγραφή (E.1) με την ισοδύναμη πολυωνυμική περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.5})$$

$$y(t) = (9 \quad -11) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + (3\rho) u(t)$$

Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι οι δύο αυτές Π.Π.Σ. έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ . Ένα μειονέκτημα της παραπάνω αυστηρής ισοδυναμίας είναι ότι δεν συνδέει ευθέως τον πίνακα Rosenbrock του αρχικού συστήματος με τον πίνακα Rosenbrock του ισοδύναμου συστήματος (E.5).  $\square$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω δύο παραδείγματα ότι δύο είναι τα μειονεκτήματα της αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων :

- 1) Δεν συνδέει με έναν μετασχηματισμό τους πίνακες Rosenbrock ισοδύναμων συστημάτων, αλλά συνδέει τους γενικευμένους πίνακες Rosenbrock.
- 2) Δεν διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $s=\infty$  των ισοδύναμων συστημάτων.

Την λύση στο πρώτο μειονέκτημα της ανστηρής ισοδυναμίας έδωσε πρώτος ο Fuhrmann (1977) με τον παρακάτω ορισμό ισοδυναμίας συστημάτων

Εστω  $P(p,m)$  το σύνολο των  $(r+p) \times (r+m)$  πινάκων Rosenbrock της μορφής (8.32) όπου  $r,p,m \in \mathbb{I}^+$ .

**Ορισμός 9.7** (Fuhrmann 1977) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in P \times P$

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \\ -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} \quad i=1,2 \quad (9.8)$$

όπου  $A_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_i \times r_i}$ ,  $B_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_i \times m}$ ,  $C_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r_i}$ ,  $D_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $p,m \in \mathbb{I}^+$  είναι σταθερά και  $r_i$   $i=1,2$  είναι οποιοδήποτε θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε τα  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα ονομάζονται *γενικευμένα ανστηρά ισοδύναμα* (Fuhrmann system equivalent or extended strictly system equivalent) εάν και μόνο εάν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times r_1}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r_1}$ ,  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times r_1}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix}}_{(r_2+p) \times (r_1+p)} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ -C_1(s) & D_1(s) \end{bmatrix}}_{(r_1+p) \times (r_1+m)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \\ -C_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix}}_{(r_2+p) \times (r_2+m)} \underbrace{\begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix}}_{(r_2+m) \times (r_1+m)} \quad (9.9)$$

και

$$M(s), A_2(s) \text{ είναι αριστερά πρώτοι} \quad (9.10)$$

$$A_1(s), N(s) \text{ είναι δεξιά πρώτοι} \quad (9.11) \quad \square$$

Το ίδιο είδος ισοδυναμίας μελέτησαν αργότερα και οι Pugh & Shelton (1978) καθώς και ο Smith (1981) δίνοντας αρκετά ενδιαφέροντα αποτελέσματα που συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 9.8** (Fuhrmann 1977, Pugh & Shelton 1978, Smith 1981)

α) Η γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων είναι μια σχέση ισοδυναμίας και η κλάση ισοδυναμίας που ορίζει στο σύνολο  $P$ , έστω  $\Gamma_F$ , ταυτίζεται με την κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων, έστω  $\Gamma_R$

$$\Gamma_R \equiv \Gamma_F$$

β) Η γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων ταυτίζεται με την ομοιότητα συστημάτων όταν τα ισοδύναμα συστήματα έχουν ίδιες διάστασεις ( $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ) και είναι της μορφής (9.1).

γ) Κάθε πολυωνυμική περιγραφή συστήματος είναι γενικευμένα αυστηρά ισοδύναμη με μια πολυωνυμική περιγραφή στον χώρο των καταστάσεων.

δ) Δύο Π.Π.Σ. είναι γενικευμένα αυστηρά ισοδύναμες εάν—ν οποιοσδήποτε γενικευμένα αυστηρά ισοδύναμες πραγματώσεις τους στον χώρο των καταστάσεων είναι όμοιες.

ε) Η γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  ισοδύναμων συστημάτων.  $\square$

**Παράδειγμα 9.9** Θεωρείστε το παράδειγμα 9.6. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι πίνακες Rosenbrock των συστημάτων (E.1) και (E.5) συνδέονται ευθέως διαμέσου της γενικευμένης αυστηρής ισοδυναμίας

$$\left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} s^2+5s+6 & s+1 \\ \hline -2s-5 & 3s+2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} s+2 & 0 & -1 \\ 0 & s+3 & -2 \\ \hline -9 & -11 & -3s \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} s+3 & 1 \\ s+2 & 1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{E.1})$$

σε αντίθεση με την αυστηρή ισοδυναμία όπου κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό (δες πρδ. 9.6).  $\square$

Στην περίπτωση τώρα που τα συστήματα που μελετούμε περιγράφονται από αριστερές ή δεξιές κλασματικές πολυωνυμικές περιγραφές, τότε η γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία παίρνει μια ειδική μορφή η οποία περιγράφεται από τους Kailath (1980) και Smith (1981). Πιο συγκεκριμένα έστω

$$L = \left\{ P(s) = \begin{bmatrix} A_L(s) & B_L(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} \mid A_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}, \text{rank}_{\mathbb{R}} A_L(s) = p, B_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \right\} \\ \subseteq \mathbb{R}[s]^{2p \times (p+m)} \quad (9.12)$$

το σύνολο των πινάκων Rosenbrock αριστερών κλασματικών πολυωνυμικών περιγραφών και

$$R = \left\{ P(s) = \begin{bmatrix} A_R(s) & I_m \\ -B_R(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} \mid A_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}, \text{rank}_{\mathbb{R}} A_R(s) = m, B_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m} \right\} \\ \subseteq \mathbb{R}[s]^{(p+m) \times 2m} \quad (9.13)$$

το σύνολο των πινάκων Rosenbrock δεξιών κλασματικών πολυωνυμικών περιγραφών.

**Ορισμός 9.10** (Kailath 1980, Smith 1981) Έστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in R \times R$

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_{Ri}(s) & I_m \\ -B_{Ri}(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} \in R \quad i=1,2 \quad (9.14)$$

Τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα ονομάζονται **αντιστρέψιμα ισοδύναμοι** (*unimodular equivalent*) εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πολυωνυμικός πίνακας  $T_R(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιος ώστε

$$\begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R1}(s) & I_m \\ -B_{R1}(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_R(s) & 0_{m,m} \\ 0_{m,m} & I_m \end{bmatrix} \quad \square \quad (9.15)$$

**Ορισμός 9.11** (Kailath 1980, Smith 1981) Έστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in L \times L$

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_{Li}(s) & B_{Li}(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} \in L \quad i=1,2 \quad (9.16)$$

Τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα ονομάζονται *αντιστρέψιμα ισοδύναμοι* (*unimodular equivalent*) εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πολυωνυμικός πίνακας  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  τέτοιος ώστε

$$\begin{bmatrix} A_{L2}(s) & B_{L2}(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_L(s) & 0_{p,p} \\ 0_{p,p} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{L1}(s) & B_{L1}(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} \quad (9.17) \quad \square$$

Οι ιδιότητες της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας συγκεντρώνονται στο παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 9.12** (Kailath 1980, Smith 1981)

α) Η αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων είναι μια σχέση ισοδυναμίας και η κλάση ισοδυναμίας που ορίζει στο σύνολο  $R(L)$ , έστω  $\Gamma_{UE}$ , ταυτίζεται με την κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία και η αυστηρή ισοδυναμία

$$\Gamma_{UE} \equiv \Gamma_R \equiv \Gamma_F$$

β) Έστω

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} A_L(s) & B_L(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} \in R \quad \text{και} \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} A_R(s) & I_m \\ -B_R(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} \in L \quad (9.18)$$

Τότε

$$P_1(s) \underset{\substack{\text{Αντ.} \\ \text{ισοδ.}}}{\sim} P_2(s) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_L(s) A_R(s) = A_L(s) B_R(s) \\ B_L(s), A_L(s) \text{ είναι αριστερά πρώτοι} \\ A_R(s), B_R(s) \text{ είναι δεξιά πρώτοι} \end{array} \right\} \quad (9.19) \quad \square$$

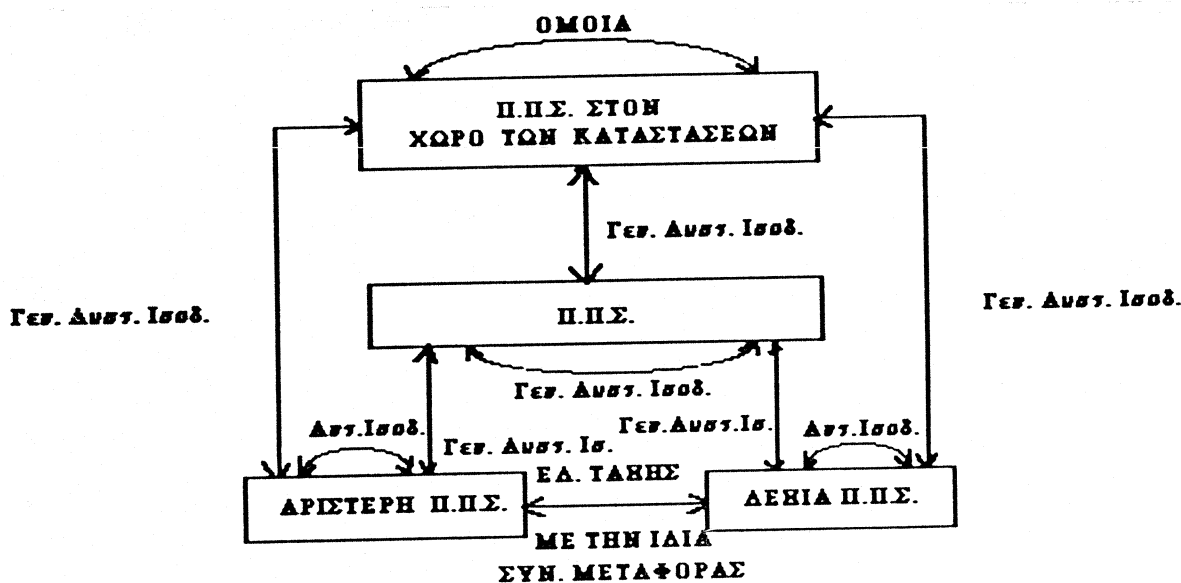
Ένα επίσης σημαντικό αποτέλεσμα που συνδέει μη αναγώγιμες Π.Π.Σ. δίνεται από το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 9.13** Έστω  $P_i(s) = \{A_i(s), B_i(s), C_i(s), D_i(s)\} \in P$  για  $i=1,2$  είναι δύο μη αναγώγιμες Π.Π.Σ. Τότε

$$P_1(s) \underset{\text{Γεν. Αυστ. Ισοδ.}}{\sim} P_2(s) \Leftrightarrow G_1(s) = G_2(s) \quad (9.20)$$

όπου  $G_i(s) = C_i(s)A_i(s)^{-1}B_i(s) + D_i(s)$ . □

Ολη η παραπάνω θεωρία συνοψίζεται στο παρακάτω διάγραμμα



**Διάγραμμα 9.1** Οι ειδικές μορφές της γεν. αυστ. ισοδυναμίας για Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων και δεξιά και αριστερά κλασματικές Π.Π.Σ..



### 9.3 Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί Π.Π.Σ. στο $\mathbb{C}\{s\}$ .

Όπως είδαμε στην ενότητα 9.2 ο μετασχηματισμός της γενικευμένης αυστηρής ισοδυναμίας έχει ως ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων, όχι κατ'ανάγκη ιδίων διαστάσεων, στο  $\mathbb{C}$ . Πρόσφατες έρευνες (Rosenbrock 1974, Verghese 1978, Verghese *et al.* 1979, 1981, Pugh & Ratcliffe 1979, Van Der Weiden *et al.* 1979, 1980, Bosgra & Van Der Weiden 1981) παρ'όλα αυτά έδειξαν την ύπαρξη μιας επιπρόσθετης κρουστικής συμπεριφοράς σε Π.Π.Σ. η οποία οφείλεται στην μηδενική δομή στο  $s=\infty$  αυτών των συστημάτων (Παράδειγμα 8.61). Η ανάγκη λοιπόν της μελέτης της δομής συστημάτων στο  $s=\infty$ , ταυτόχρονα με την δομή στο  $\mathbb{C}$ , οδήγησε στην αναζήτηση καινούργιων ισοδύναμων μετασχηματισμών συστημάτων εφόσον ο μετασχηματισμός της γενικευμένης αυστηρής ισοδυναμίας δεν ικανοποιούσε αυτήν την ιδιότητα (δες Παράδειγμα 9.5). Σκοπός λοιπόν αυτής της ενότητας είναι να μας παρουσιάσει την συνεχή εξέλιξη των μετασχηματισμών που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και στην συνέχεια να επισφραγίσει τα αποτελέσματα αυτά με ορισμένα πρωτότυπα αποτελέσματα στο πεδίο αυτό.

Η ενότητα αυτή χωρίζεται σε τρεις επιμέρους ενότητες. Στην πρώτη υποενότητα παρουσιάζουμε την συνεχή εξέλιξη των μετασχηματισμών αυτών. Στην δεύτερη υποενότητα παρουσιάζουμε ορισμένους τρόπους αναγωγής γενικών Π.Π.Σ. σε Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, ενώ στην τρίτη υποενότητα παρουσιάζουμε ένα καινούργιο είδος ισοδυναμίας για αριστερές και δεξιές κλασματικές Π.Π.Σ..

#### 9.3.1 Εξέλιξη ισοδύναμων μετασχηματισμών συστημάτων στο $\mathbb{C}\{s\}$ .

Οι πιο απλές μορφές Π.Π.Σ. που διαθετούν και πεπερασμένη αλλά και κρουστική συμπεριφορά και συνεπώς μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  είναι οι Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και είναι οι πρώτες που μελετήθηκαν (Rosenbrock 1974, Verghese *et al.* 1978, 1979, 1981) :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.21\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (9.21\beta)$$

όπου  $E, A \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{\mu \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times \mu}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  και  $\det |sE - A| \neq 0$ . Πρώτος ο Rosenbrock (1974) πρότεινε τον παρακάτω ορισμό ισοδυναμίας για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων :

**Ορισμός 9.14** (Rosenbrock 1974) Δύο πολυωνυμικές περιγραφές συστημάτων στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της μορφής (9.21) και ιδίων διαστάσεων  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ,  $p_1 = p_2 = p$ ,  $m_1 = m_2 = m$ , θα ονομάζονται **αυστηρά όμοιες** (*restrictly system equivalent*) εάν και μόνο εάν υπάρχουν τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι πίνακες  $M, N \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$  τέτοιοι ώστε :

$$\begin{bmatrix} sE_2 & -A_2 & B_2 \\ -C_2 & & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE_1 & -A_1 & B_1 \\ -C_1 & & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.22) \quad \square$$

Ο μετασχηματισμός της αυστηρής ομοιότητας συστημάτων αποτελεί ειδική περίπτωση ενός πιο γενικού μετασχηματισμού που αφορά γενικές Π.Π.Σ. της μορφής (9.3) και δίνεται από τον παρακάτω

**Ορισμός 9.15** (Bosgra & Van Der Weiden 1981) Εστω δύο συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής (9.3) με πίνακες Rosenbrock

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \\ -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} \quad i=1,2 \quad (9.23)$$

όπου  $A_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}$ ,  $B_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m}$ ,  $C_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r}$ ,  $D_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $p, m, r \in \mathbb{Z}^+$ . Τότε τα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **αυστηρά όμοια** (*restrictly system equivalent*) εάν και μόνο εάν υπάρχουν πίνακες  $M, N \in \mathbb{R}^{r \times r}$  ( $\det[M] \neq 0$  και  $\det[N] \neq 0$ ),  $X \in \mathbb{R}^{p \times r}$  και  $Y \in \mathbb{R}^{r \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ X & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ -C_1(s) & D_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \\ -C_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.24) \quad \square$$

Η αυστηρή ομοιότητα για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  πρδ.

- 1) γενικευμένη τάξη  $f$ , γενικευμένη ελάχιστη τάξη  $\delta_M(G(s))$ , βαθμός  $d_R$ ,
- 2) συνάρτηση μεταφοράς  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$ ,
- 3) πόλους και μηδενικά μεταφοράς στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- 4) αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου, εξόδου και εισόδου-εξόδου στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- 5) πόλους και μηδενικά του συστήματος στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- 6) δυναμικούς δείκτες εισόδου-εξόδου.

Δύο σοβαρά μειονέκτημα της αυστηρής ομοιότητας συστημάτων είναι τα εξής :

- 1) Συνδέει Π.Π.Σ. ιδίων διαστάσεων,
- 2) Είναι πολύ περιοριστική για γενικές Π.Π.Σ. λόγω του ότι οι πίνακες  $M$ ,  $N$ ,  $X$  και  $Y$  είναι σταθεροί (στο πρδ. 9.5 δεν υπάρχουν σταθεροί πίνακες  $M$ ,  $N$ ,  $X$  και  $Y$  τέτοιοι ώστε να πάρω μια ισοδύναμη Π.Π.Σ. είτε στον χώρο των καταστάσεων είτε στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων).

Την απάντηση στο πρώτο μειονέκτημα έρχεται να δώσει ο Verghese *et al.* (1978, 1981) με τον μετασχηματισμό της ισχυρής ισοδυναμίας που δίνεται παρακάτω.

**Ορισμός 9.16** (Verghese *et al.* 1978, 1981) Οι πράξεις που χρησιμοποιούνται στον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} sE_2 & -A_2 & B_2 \\ -C_2 & & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE_1 & -A_1 & B_1 \\ -C_1 & & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (9.25)$$

όπου  $M$  και  $N$  είναι σταθεροί, τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι πίνακες και  $X$  και  $Y$  είναι σταθεροί πίνακες τέτοιοι ώστε

$$XE_2 = 0, \quad E_1Y = 0 \quad (9.26)$$

οινομάζονται πράξεις ισχυρής ισοδυναμίας (*operations of strong equivalence*).  $\square$

**Ορισμός 9.17** (Verghese *et al.* 1978, 1981) Δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, έστω  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , θα ονομάζονται **ισχυρά ισοδύναμες** (*strongly equivalent*) εαν έπειτα από μια σειρά πράξεων ισχυρής ισοδυναμίας και εφόσον και από τα δύο συστήματα έχουν αφαιρεθεί οι μη δυναμικές μεταβλητές, τα καινούργια συστήματα  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$  συνδέονται με πράξεις ισχυρής ισοδυναμίας.  $\square$

Η ισχυρή ισοδυναμία έχει το πλεονέκτημα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathcal{C}\{s\}$  Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, όχι κατ'ανάγκη των ίδιων διαστάσεων (Verghese *et al.* 1978, 1981). Ένα μειονέκτημα της παρ'όλα αυτά είναι ότι δεν συνδέει ευθέως τους Rosenbrock πίνακες ισοδύναμων συστημάτων. Το μειονέκτημα αυτό και συνεπώς και την ολοκλήρωση της θεωρίας περί ισοδύναμων συστημάτων στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων έρχονται να δώσουν οι Taylor & Pugh (1985), Pugh *et al.* (1987) με τον ορισμό της τέλει ισοδυναμίας.

**Ορισμός 9.18** (Pugh *et al.* 1987) Έστω δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  με πίνακες Rosenbrock

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} sE_i - A_i & B_i \\ -C_i & D_i \end{bmatrix} \quad i=1,2 \quad (9.27)$$

Τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **τέλεια ισοδύναμα** (*completely system equivalent*), εαν και μόνο εαν υπάρχουν σταθεροί πίνακες  $M$ ,  $N$ ,  $X$  και  $Y$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE_1 - A_1 & B_1 \\ -C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE_2 - A_2 & B_2 \\ -C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

όπου ο μετασχηματισμός

$$M (sE_1 - A_1) = (sE_2 - A_2) N \quad (9.29)$$

είναι ένας τέλει ισοδύναμος μετασχηματισμός (δες ορισμό 3.18).  $\square$

Εδώ μπορούμε να αναφέρουμε ότι της τέλειας ισοδυναμίας προηγήθηκε η σταθερή ισοδυναμία (*constant system equivalence*) από τους Anderson *et al.* (1985) η οποία ταυτιζόταν με την ισχυρή ισοδυναμία και της οποίας το μόνο μειονέκτημα ήταν ότι συνέδεε τους πίνακες Rosenbrock των συστημάτων αποτελούμενων από επιπλέον διαγώνια μοναδιαία μπλόκ συμβατών διαστάσεων με τον μετασχηματισμό των συστημάτων. Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού της τέλειας ισοδυναμίας συνοψίζονται στο παρακάτω

**Θεώρημα 9.19** (Taylor & Pugh 1985, Pugh *et al.* 1987)

- 1) Η τέλεια ισοδυναμία συστημάτων ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας, έστω  $\Gamma_{\text{CSE}}$  στο σύνολο  $P'(p,m)$  των  $(r+p) \times (r+m)$  Rosenbrock πινάκων Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, η οποία ταυτίζεται με την κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η ισχυρή ισοδυναμία συστημάτων στο ίδιο σύνολο, έστω  $\Gamma_{\text{SE}}$ .

$$\Gamma_{\text{CSE}} \equiv \Gamma_{\text{SE}}$$

- 2) Η τέλεια ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\}$ .
- 3) Δύο ισχυρά μη αναγώγιμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων είναι ισχυρά ισοδύναμες και συνεπώς από (1) τέλεια ισοδύναμες εάν  $n$  έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. □

Το πρόβλημα λοιπόν της ισοδυναμίας Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, λύθηκε ουσιαστικά από τους Taylor & Pugh (1985), Pugh *et al.* (1987). Ένα ανοικτό ερώτημα λοιπόν που απομένει είναι τι μετασχηματισμοί διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή γενικών Π.Π.Σ. στο  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\}$ . Είδαμε στο παράδειγμα 9.5 ότι ο μετασχηματισμός της ανστηρής ομοιότητας ο οποίος προτάθηκε από τους Bosgra & Van Der Weiden (1981) δεν δίνει λύση στο πρόβλημα μας. Την λύση στο πρόβλημα αυτό πρώτοι έδωσαν οι Anderson *et al.* (1985), με την γενίκευση του ορισμού της ισχυρής ισοδυναμίας. Πιο συγκεκριμένα θεωρείστε δύο γενικές Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής

$$A_i(\rho) \beta_i(t) = B_i(\rho) u(t) \quad i=1,2 \quad (9.30\alpha)$$

$$y(t) = C_i(\rho) \beta_i(t) + D_i(\rho) u(t) \quad (9.30\beta)$$

όπου  $A_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_i \times r_i}$ ,  $B_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_i \times m}$ ,  $C_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r_i}$ ,  $D_i(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $p, m \in \mathbb{I}^+$  είναι σταθερά και  $i=1,2$ . Οι πίνακες Rosenbrock των παραπάνω συστημάτων είναι οι εξής

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \\ -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} \in P \times P \quad i=1,2 \quad (9.31)$$

Θεωρείστε επίσης τις κανονικές μορφές των παραπάνω συστημάτων

$$T_i(\rho) \xi_i(t) = U_i u(t) \quad (9.32\alpha)$$

$$y(t) = V_i \xi_i(t) \quad (9.32\beta)$$

με κανονικούς πίνακες συστημάτων

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} T_i(s) & U_i \\ -V_i & 0 \end{bmatrix} \in P \times P \quad i=1,2 \quad (9.33)$$

**Ορισμός 9.20** (Anderson *et al.* 1985) Τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **πολυωνυμικά ισοδύναμα** (*polynomial system equivalent*) εάν  $\nu$  υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$ ,  $N(s)$ ,  $X(s)$  και  $Y(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1 \\ -V_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(s) & U_2 \\ -V_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.34)$$

όπου οι πίνακες

$$M(s) \text{ και } T_2(s) \text{ είναι αριστερά πρώτοι} \quad (9.35\alpha)$$

$$T_1(s) \text{ και } N(s) \text{ είναι δεξιά πρώτοι} \quad (9.35\beta)$$

Τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **ισοδύναμα στο  $s=\infty$**  (*system equivalent at infinity*) εαν—ν υπάρχουν κανονικοί ρητοί πίνακες  $\tilde{M}(s)$ ,  $\tilde{N}(s)$ ,  $\tilde{X}(s)$  και  $\tilde{Y}(s)$  τέτοιοι ώστε :

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}(s) & 0 \\ \tilde{X}(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1 \\ -V_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(s) & U_2 \\ -V_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}(s) & \tilde{Y}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.36)$$

όπου οι σύνθετοι πίνακες

$$(\tilde{M}(s) \quad T_2(s)) \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} T_1(s) \\ -\tilde{M}(s) \end{bmatrix} \quad (9.37)$$

δεν έχουν μηδενικά στο  $s=\infty$ . Τέλος τα συστήματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **ισχυρά ισοδύναμα** (*strongly system equivalent*) εαν—ν είναι πολυωνυμικά ισοδύναμα και ισοδύναμα στο  $s=\infty$ .  $\square$

Η ισχυρή ισοδυναμία όπως θα δούμε και παρακάτω είναι μια σχέση ισοδυναμίας που διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ . Έχει όμως το μειονέκτημα όπως και στις Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων να μην έχει την δυνατότητα να συνδέσει απευθείας με έναν ισοδύναμο μετασχηματισμό τους πίνακες Rosenbrock δύο ισοδύναμων συστημάτων. Την λύση στο πρόβλημα αυτό και ουσιαστικά την γενική λύση στο πρόβλημα ισοδυναμιών γενικών Π.Π.Σ. έδωσαν οι Hayton et al. (1990) με τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων (*full system equivalence*) και τον ισοδύναμο μετασχηματισμό της κανονικής πλήρους ισοδυναμίας (*normal full system equivalence*).

**Ορισμός 9.21** (Hayton et al. 1990) Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο γενικές Π.Π.Σ. της μορφής (9.30). Τα  $\Sigma_1, \Sigma_2$  θα ονομάζονται **πλήρως ισοδύναμα** (*fully system equivalent*) εαν—ν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s), N(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times r_1}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r_1}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ -C_1(s) & D_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \\ -C_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.38)$$

όπου ο μετασχηματισμός (9.38) είναι ένας μετασχηματισμός πλήρους ισοδυναμίας (δες ορισμό 3.22).  $\square$

**Ορισμός 9.22** (Hayton *et al.* 1990) Έστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο γενικές Π.Π.Σ. της μορφής (9.30) με καιονικές μορφές συστημάτων της μορφής (9.32). Τα  $\Sigma_1, \Sigma_2$  θα ονομάζονται **καιονικά πλήρως ισοδύναμα** (*normally fully system equivalent*) εαν-ν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s), N(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r}_2 \times \tilde{r}_1}, X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times \tilde{r}_1}, Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r}_2 \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1 \\ -V_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(s) & U_2 \\ -V_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

όπου  $\tilde{r}_i = r_i + p + m$   $i=1,2$  και ο μετασχηματισμός (9.39) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός.  $\square$

Οι ιδιότητες της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα :

**Θεώρημα 9.23** (Walker 1988, Hayton *et al.* 1990, Pugh & Hayton 1990)

- 1) Δύο γενικές Π.Π.Σ.,  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , θα είναι καιονικά πλήρως ισοδύναμες εαν-ν είναι πλήρως ισοδύναμες.
- 2) Η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας, έστω  $\Gamma_{\text{FSE}}$  στο σύνολο  $P(p,m)$  των  $(r+p) \times (r+m)$  Rosenbrock πινάκων γενικών Π.Π.Σ. η οποία ταυτίζεται με την κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η ισχυρή ισοδυναμία συστημάτων, έστω  $\Gamma_{\text{SE}}$ .

$$\Gamma_{\text{FSE}} \equiv \Gamma_{\text{SE}}$$

- 3) Η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτα τα παρακάτω χαρακτηριστικά συστημάτων



- α) γενικευμένη ελάχιστη τάξη  $\delta_M(G(s))$ ,
- β) συνάρτηση μεταφοράς  $G(s) = C(s)A(s)^{-1}B(s) + D(s)$ ,
- γ) πόλους και μηδενικά μεταφοράς στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- δ) αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου, εξόδου και εισόδου-εξόδου στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- ε) μηδενικά και πόλους του συστήματος στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- 4) Δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων,  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , θα είναι τέλεια ισοδύναμες εάν  $-n$  είναι πλήρως ισοδύναμες.
- 5) Κάθε γενική Π.Π.Σ.  $\Sigma$  της μορφής (9.30), συνδέεται με την καινική της Π.Π.Σ. της μορφής (9.32), με την παρακάτω πλήρη ισοδυναμία συστημάτων

$$\left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} A(s) & B(s) \\ \hline -C(s) & D(s) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} T(s) & U \\ \hline -V & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & I \\ \hline C(s) & -D(s) \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \quad (9.40)$$

Βλέπουμε λοιπόν από το παραπάνω θεώρημα ότι η πλήρης ισοδυναμία είναι μια σχέση ισοδυναμίας που έχει την ιδιότητα να συνδέει απευθείας τους Rosenbrock πίνακες ισοδύναμων συστημάτων, διατηρώντας αναλλοίωτο μεγάλο μέρος της μηδενικής δομής τους στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Παρ'όλα αυτά ένα πλήθος ερωτημάτων παραμένει αναπάντητο όσον αφορά το καινούργιο αυτό είδος ισοδυναμίας και τα οποία αναφέρουμε :

- 1) Διατηρεί η πλήρης ισοδυναμία τους δυναμικούς δείκτες εισόδου και εξόδου, τα αναλλοίωτα μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ , τους αναλλοίωτους δείκτες στηλών και γραμμών, την γενικευμένη τάξη  $f$ , και τέλος τον βαθμό  $d_R$ ;
- 2) Υπάρχει η δυνατότητα να ανάγουμε μια γενική Π.Π.Σ. σε μια πλήρη ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων ;
- 3) Ποια ειδική μορφή παίρνει η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων στην περίπτωση των δεξιά και αριστερά κλασματικών Π.Π.Σ. ;

- 4) Μπορούμε να συνδέσουμε μια αριστερή (δεξιά) κλασματική Π.Π.Σ. με μια δεξιά (αριστερή) κλασματική Π.Π.Σ. μέσω ενός πλήρως ισοδύναμου μετασχηματισμού;
- 5) Υπάρχει μια ερμηνεία στο πεδίο του χρόνου της πλήρης ισοδυναμίας συστημάτων;

Την απάντηση στα πρώτα τέσσερα ερωτήματα ερχόμαστε να απαντήσουμε στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού ενώ το πέμπτο ερώτημα θα απαντήσουμε στο κεφάλαιο 10.

### 9.3.2 Αναγωγή μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το πρόβλημα αναγωγής μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα μας είναι το εξής :

#### ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΓΕΝΙΚΗΣ Π.Π.Σ.

Θεωρείστε μια γενική Π.Π.Σ. της μορφής

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (9.41\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (9.41\beta)$$

όπου ( $\rho=d/dt$ )  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(\rho)} A(\rho) = r$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$  και  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  της οποίας η κανονική μορφή είναι η εξής

$$T(\rho) \xi(t) = \mathcal{U} u(t) \quad (9.42\alpha)$$

$$y(t) = \mathcal{V} \xi(t) \quad (9.42\beta)$$

όπου  $T(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$ ,  $\tilde{r} = r + p + m$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{r}}$  και  $u \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times m}$ . Ζητούνται να προσδιορισθούν

(α) ένας θετικός ακέραιος αριθμός  $\lambda \in \mathbb{I}^+$

και

(β) μια πεντάδα σταθερών πινάκων  $E, A \in \mathbb{R}^{\lambda \times \lambda}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{\lambda \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times \lambda}$  και  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  τέτοια ώστε το σύστημα

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.43\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (9.43\beta)$$

να είναι "πλήρως ισοδύναμο" του συστήματος (9.41). □

Το πρόβλημα της εύρεσης "ισοδύναμων" Π.Π.Σ. της μορφής (9.43), μας γενικής Π.Π.Σ. έχει μελετηθεί από πολλούς συγγραφείς (Verghese 1978, Bosgra & Van Der Weiden 1981, Anderson *et al.* 1985 και Vardulakis 1991). Η έννοια της "ισοδυναμίας" στους παραπάνω συγγραφείς ταυτίζεται με την διατήρηση της δομής του συστήματος στο  $\mathbb{C}\{s\}$  κατά την μετάβαση από την Π.Π.Σ. (9.41) στην Π.Π.Σ. (9.43). Παρ'όλα αυτά η έννοια αυτής της "ισοδυναμίας" δεν συνδέθηκε καθόλου με την ύπαρξη ενός δεδομένου μετασχηματισμού που θα συνδέει ευθέως τα δύο συστήματα. Οπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 10, ο μετασχηματισμός αυτός είναι πολύ χρήσιμος στην συσχέτιση των χώρων λύσεων–εισόδων καθώς και των χώρων αρχικών συνθηκών–εξόδων δύο πλήρως ισοδύναμων συστημάτων. Η εύρεση του μετασχηματισμού αυτού για τα διάφορα είδη "ισοδύναμων" συστημάτων που έχουν προταθεί ως τώρα, θα μας απασχολήσει στην συνέχεια της ενότητας αυτής.

### 9.3.2α Ισοδύναμο μοντέλο Verghese (1978).

Θεωρείστε την Π.Π.Σ. (9.41) της οποίας η καινουργική μορφή είναι η (9.42) και έστω  $C_{\omega} \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \mu}$ ,  $J_{\omega} \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ ,  $B_{\omega} \in \mathbb{R}^{\mu \times \tilde{r}}$ ,  $D_{\omega} \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$ ,  $\tilde{r} = r + p + m$  μια ελάχιστη πραγμάτωση (ορισμός 5.10) ή ισοδύναμα (συμπέρασμα 5.13) μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση με μη δυναμικές μεταβλητές του πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  τέτοια ώστε :

$$T(s) = C_{\omega} (I_{\mu} - sJ_{\omega})^{-1} B_{\omega} + D_{\omega} \quad (9.44)$$

Ορίζουμε τώρα την μεταβλητή  $z(t)$  διαμέσου της εξίσωσης :

$$(I_{\mu} - \rho J_{\omega}) z(t) = B_{\omega} \xi(t) \quad (9.45)$$

Τότε από τις σχέσεις (9.42), (9.44) και (9.45) θα έχουμε :

$$C_{\omega} z(t) + D_{\omega} \xi(t) = \mathcal{U}u(t) \quad (9.46)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (9.45) και (9.46) μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση (9.42) με την μορφή μιας Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων :

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.47\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (9.47\beta)$$

όπου

$$E = \begin{bmatrix} -J_{\omega} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\tilde{r}+\mu) \times (\tilde{r}+\mu)} ; \quad A = \begin{bmatrix} -I_{\mu} & -B_{\omega} \\ C_{\omega} & -D_{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\tilde{r}+\mu) \times (\tilde{r}+\mu)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\tilde{r}+\mu) \times m} ; \quad C = (0 \ \nu) \in \mathbb{R}^{p \times (\tilde{r}+\mu)} \quad \text{και} \quad x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\tilde{r}+\mu) \times 1} \quad (9.48)$$

**Θεώρημα 9.24** Οι Π.Π.Σ. (9.42) (και συνεπώς και η πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. (9.41) από την συμμετρική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων) και (9.47) είναι πλήρως ισοδύναμες.

**Απόδειξη** Θεωρείστε τον παρακάτω μετασχηματισμό που συνδέει τις Π.Π.Σ. (9.42) και (9.47) :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} C_{\omega}(I_{\mu}-sJ_{\omega})^{-1} & I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c} I_{\mu}-sJ_{\omega} & B_{\omega} & 0 \\ \hline -C_{\omega} & D_{\omega} & u \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & u \\ \hline - & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.49)$$

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός ή ισοδύναμα ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες (α), (β) και (γ) του ορισμού 3.22. Θεωρείστε τους σύνθετους πίνακες

$$Q(s) = \left[ \begin{array}{ccc|cc} C_{\omega}(I_{\mu}-sJ_{\omega})^{-1} & I_{\tilde{r}} & 0 & T(s) & u \\ 0 & 0 & I_p & -\gamma & 0 \end{array} \right] \quad (9.50)$$

και

$$R(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} I_{\mu}-sJ_{\omega} & B_{\omega} & 0 & \\ \hline -C_{\omega} & D_{\omega} & u & \\ 0 & -\gamma & 0 & \\ \hline 0 & -I_{\tilde{r}} & 0 & \\ 0 & 0 & -I_m & \end{array} \right] \quad (9.51)$$

(α) Ο σύνθετος ρητός πίνακας  $Q(s)$  δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  λόγω του ότι εμπεριέχει τον μοναδιαίο πίνακα  $I_{\tilde{r}+p}$  (δες απόδειξη του λήμματος 3.41). Από την παρατήρηση 2.32 έχουμε ότι οι σταθεροί όροι δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πίνακα και άρα :

$$\delta_M(Q(s)) = \delta_M(C_{\omega}(I_{\mu}-sJ_{\omega})^{-1} T(s)) \stackrel{(5.57)}{=} \delta_M(T(s)) \stackrel{\text{Παρ. 2.32}}{=} \delta_M \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & u \\ \hline - & 0 \end{array} \right] \quad (9.52)$$

(β) Ο πίνακας  $R(s)$  είναι αυστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} I_\mu - sJ_\omega & 0 & 0 \\ -C_\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\mu & 0 & 0 & B_\omega & 0 \\ 0 & I_p & 0 & D_\omega & U \\ 0 & 0 & I_p & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\mu - sJ_\omega & B_\omega & 0 \\ -C_\omega & D_\omega & U \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & -I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.53)$$

του οποίου τα μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  ταυτίζονται με αυτά του σύνθετου πίνακα  $[(I_\mu - sJ_\omega)^T - C_\omega^T]^T$ . Από κατασκευής όμως έχω ότι η τετράδα  $\{C_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \mu}, J_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \tilde{r}}, D_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση και συνεπώς ο σύνθετος πίνακας  $[(I_\mu - sJ_\omega)^T - C_\omega^T]^T$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  ή ισοδύναμα ο σύνθετος πίνακας  $R(s)$  δεν εμπεριέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ . Είναι φανερό επίσης ότι ο σύνθετος πίνακας  $R(s)$  ικανοποιεί τις McMillan συνθήκες λόγω του ότι οι σταθεροί του όροι δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό.

Αρα από (α) και (β) έχουμε ότι ο μετασχηματισμός (9.49) που συνδέει τα συστήματα (9.42) και (9.47) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός και άρα τα συστήματα (9.42) και (9.47) είναι πλήρως ισοδύναμα.  $\square$

**Σημείωση 9.25** Η προτεινόμενη μορφή της Π.Π.Σ. (9.47) έχει πιο ελάχιστη διάσταση από αυτήν που προτάθηκε από τον Verghese (1978). Η διαφορά τους έγκειται στο ότι ο Verghese (1978) δεν χρησιμοποιεί τον όρο  $D_\omega$  με συνέπεια, λόγω μη δυναμικών μεταβλητών της ισχυρά μη αναγώγιμης  $\{C_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \mu}, J_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \tilde{r}}, D_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$ , το σύστημα (9.47) να έχει μεγαλύτερη διάσταση.  $\square$

**Συμπέρασμα 9.26** Η υπόθεση μας ότι η πραγμάτωση  $\{C_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \mu}, J_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_\omega \in \mathbb{R}^{\mu \times \tilde{r}}, D_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$  είναι ελάχιστη μπορεί να γίνει πιο ασθενής παίρνοντας μια ισχυρά

παρατηρήσιμη πραγμάτωση, χωρίς να αλλάξει το θεώρημα μας. Ο λόγος για τον οποίο μπορούμε να κάνουμε αυτήν την υπόθεση είναι γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος 9.24 η μόνη υπόθεση που χρησιμοποιούμε είναι ότι η παραπάνω πραγμάτωση είναι ισχυρά παρατηρήσιμη.  $\square$

**Συμπέρασμα 9.27** Από την υπόθεση ότι η πραγμάτωση που χρησιμοποιούμε είναι ελάχιστη έχουμε ότι η διάσταση  $\mu$  του διανύσματος  $z(t)$  θα είναι (θεώρημα 5.12)

$$\mu = \sum_{i=1}^k (q_i(T) + 1) \quad (9.54)$$

όπου  $q_1(T) \geq q_2(T) \geq \dots \geq q_k(T) > 0$  είναι οι τάξεις των αυστηρά θετικών πόλων του  $T(s)$  στο  $s = \omega$ . Αρα η διάσταση  $\lambda_v$  του διανύσματος  $x(t) = [z(t)^T \quad \xi(t)^T]^T$  θα είναι :

$$\lambda_v = \tilde{r} + \mu = r + p + m + \sum_{i=1}^k (q_i(T) + 1) \quad (9.55) \quad \square$$

**Συμπέρασμα 9.28** Ο συμμετρικός μετασχηματισμός του πλήρους ισοδύναμου μετασχηματισμού (9.49) θα είναι ο εξής :

$$\left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & u \\ \hline -\gamma & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} I_{\mu} - sJ_{\omega} & B_{\omega} & 0 \\ \hline -C_{\omega} & D_{\omega} & u \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} -(I_{\mu} - sJ_{\omega})^{-1} B_{\omega} & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.56)$$

**Απόδειξη** Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή του θεωρήματος 9.24.  $\square$

**Λήμμα 9.29** (Pugh et al. 1987) Εάν  $J_1, J_2$  είναι μορφές Jordan οι οποίες δεν περιέχουν μηδενικά Jordan μπλόκ, τότε τα  $I_{q_1} - sJ_1$  και  $I_{q_2} - sJ_2$  θα είναι τέλεια ισοδύναμα, ή ισοδύναμα από λήμμα 3.26 πλήρως ισοδύναμα, εάν  $-n$  είναι όμοια.  $\square$

**Θεώρημα 9.30** Εάν  $\{\hat{C}_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \hat{\mu}}, \hat{J}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times \hat{\mu}}, \hat{B}_\omega \in \mathbb{R}^{\hat{\mu} \times \tilde{r}}, \hat{D}_\omega \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$  είναι οποιαδήποτε άλλη ελάχιστη πραγμάτωση του πίνακα  $T(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  τότε η Π.Π.Σ. (9.47) θα είναι όμοια με αυτήν που θα προέρχεται από την καινούργια αυτή ελάχιστη πραγμάτωση.

**Απόδειξη** Όλες οι ελάχιστες πραγματώσεις του  $T(s)$  είναι τέλεια ισοδύναμες μεταξύ τους από θεώρημα 9.19, το οποίο σημαίνει ότι θα υπάρχουν σταθεροί πίνακες  $M, N, X$  και  $Y$  τέτοιοι ώστε :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\mu - s J_\omega & B_\omega \\ -C_\omega & D_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\hat{\mu}} - s \hat{J}_\omega & \hat{B}_\omega \\ -\hat{C}_\omega & \hat{D}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (9.57)$$

όπου  $\mu = \hat{\mu} = \sum_{i=1}^k (q_i(T) + 1)$  (Θεώρημα 5.12) με  $q_1(T) \geq q_2(T) \geq \dots \geq q_k(T) > 0$  τις τάξεις των αυστηρά θετικών πόλων του  $T(s)$  στο  $s = \omega$ , και

$$M (I_\mu - s J_\omega) = (I_{\hat{\mu}} - s \hat{J}_\omega) N \quad (9.58)$$

είναι ένας τέλεια ισοδύναμος μετασχηματισμός, το οποίο σημαίνει από το λήμμα 9.29 ότι οι πίνακες  $M$  και  $N$  είναι σταθεροί, τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι. Αρα από την σχέση (9.57) θα έχω ότι ο μετασχηματισμός :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} M & 0 & 0 \\ X & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} I_\mu - s J_\omega & B_\omega & 0 \\ -C_\omega & D_\omega & u \\ \hline 0 & 0 & -v \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{\hat{\mu}} - s \hat{J}_\omega & \hat{B}_\omega & 0 \\ -\hat{C}_\omega & \hat{D}_\omega & u \\ \hline 0 & 0 & -v \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} N & Y & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array} \right] \quad (9.59)$$

είναι ένας μετασχηματισμός αυστηρής ομοιότητας επειδή οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (9.60)$$

είναι σταθεροί, τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι. □



**Παράδειγμα 9.31** Εστω ο Rosenbrock πίνακας ενός συστήματος  $\Sigma$  είναι

$$P(s) := \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 \\ 2s-5 & 3s+2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

ή ισοδύναμα ο καιονικός πίνακας του συστήματος είναι

$$\mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc|c} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.2})$$

όπου

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

και

$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \text{diag}(s^2, s, \frac{1}{s}) \quad ; \quad S_{T(s)}^{\mathbb{C}}(s) = \text{diag}(1, 1, (s+2)(s+3)) \quad (\text{E.4})$$

Άρα η διάσταση  $\mu$  που μπορεί να έχει το διάνυσμα  $z(t)$  μιας ελάχιστης πραγμάτωσης του  $T(s)$  θα είναι

$$\mu = \sum_{i=1}^2 (q_i(T)+1) = (2+1) + (1+1) = 5 \quad (\text{E.5})$$

Εστω λοιπόν  $\{C_{\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}, B_{\omega} \in \mathbb{R}^{5 \times 3}, J_{\omega} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}\}$  μια ελάχιστη πραγμάτωση του  $T(s)$  τέτοια ώστε :

$$T(s) := C_{\omega} (I_{\mu} - sJ_{\omega})^{-1} B_{\omega} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|cc|c} 1 & -s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

Τότε η Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (\text{E.7a})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{E.7b})$$

όπου

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{-1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{-1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ \overline{1} & \overline{-7} & \overline{-10} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = (0_{1 \times 7} \quad 1) \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0_{7 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

είναι πλήρως ισοδύναμη με την Π.Π.Σ. (E.2) και συνδέεται με αυτήν διαμέσου του πλήρους ισοδύναμου μετασχηματισμού :

$$\begin{bmatrix} C_{\omega} (I_{\mu} - sJ_{\omega})^{-1} I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mu} - sJ_{\omega} & B_{\omega} & 0 \\ \hline -C_{\omega} & D_{\omega} & u \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & u \\ \hline -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & s+7 & s^2+7s+10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2s-1 & 1 & s & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1-s & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-s & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -7 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 5} & I_3 & 0_{3 \times 1} \\ \hline 0_{1 \times 5} & 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκαταστάσεως  $x(t)$  του συστήματος (E.7) θα είναι σύμφωνα με το συμπέρασμα 9.27 ίση με

$$\lambda_v = \tilde{r} + \sum_{i=1}^2 (q_i(T)+1) = 3 + [(2+1)+(1+1)] = 8 \quad (\text{E.10}) \quad \square$$

### 9.3.2β Ισοδύναμο μοντέλο Bosgra & Van Der Weiden (1981).

Θεωρείστε την Π.Π.Σ. (9.41) της οποίας η κανονική μορφή είναι η (9.42). Εστω  $P(s)$  επίσης ο πίνακας Rosenbrock της πολυωνυμικής περιγραφής (9.41)

$$P(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} := P_0 + P_1 s + \dots + P_q s^q \quad (9.61)$$

όπου  $q$  είναι ο μεγαλύτερος βαθμός όλων των πολυωνύμων που εμπεριέχονται στον πίνακα  $P(s)$ . Ορίζουμε τους παρακάτω Hankel πίνακες :

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} P_2 & P_3 & \dots & P_q \\ P_3 & P_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} P_3 & P_4 & \dots & P_q & 0 \\ P_4 & P_5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_B = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix}$$

$$\Pi_C = [ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_q ] \quad (9.62)$$

με  $\text{rank } \Pi_E = r_E$ . Ας δηλώσουμε με  $I, J$  τα σύνολα των  $r_E$  δεικτών γραμμών και στηλών τα οποία είναι τέτοια ώστε οι γραμμές  $I$  και οι στήλες  $J$  του πίνακα  $\Pi_E$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητες αντίστοιχα. Εστω  $P_E, P_A, P_B, P_C$  είναι υποπίνακες των  $\Pi_E, \Pi_A, \Pi_B, \Pi_C$  αντίστοιχα τέτοιοι ώστε οι πίνακες  $P_E, P_A, P_B$  να σχηματίζονται από τις γραμμές  $I$  και οι πίνακες  $P_E, P_A, P_C$  να σχηματίζονται από τις στήλες  $J$ . (δες Bosgra & Van Der Weiden 1980, 1981, Karampetakis & Vardulakis 1992). Εστω  $\lambda_{b_{vv}} = r+r_E+p+m$ . Ορίζουμε τον  $(\lambda_{b_{vv}}+p) \times (\lambda_{b_{vv}}+m)$  πίνακα Rosenbrock

$$P_R(s) := \left[ \begin{array}{cc|c|c} P_1 s + P_0 & P_C s & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} & 0 \\ P_B s & P_A s - P_E & 0 & 0 \\ \hline (0 \quad -I_m) & 0 & 0 & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 \end{array} \right] =: \begin{bmatrix} T_R(s) & U_R \\ -V_R & 0 \end{bmatrix} \quad (9.63)$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι τα συστήματα που ορίζονται από τους Rosenbrock πίνακες (9.61) και (9.63) είναι πλήρως ισοδύναμα. Μια σειρά από λήμματα χρήσιμα στην απόδειξη του συμπεράσματος αυτού διατυπώνονται στην συνέχεια.

**Λήμμα 9.32** Εστω  $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $Q \in \mathbb{R}^{p \times p}$  με  $\det Q \neq 0$  ( $N \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\det N \neq 0$ ). Τότε

$$\delta_M(Q \cdot P(s)) = \delta_M(P(s)) \quad (\text{ή } \delta_M(P(s) \cdot N) = \delta_M(P(s))) \quad (9.64)$$

**Απόδειξη** Είναι φανερό αν και μπορούμε κάλλιστα να το δείξουμε χρησιμοποιώντας την Binet–Cauchy φόρμουλα στο γινόμενο  $Q \cdot P(s)$  ταυτόχρονα με τον ορισμό του McMillan βαθμού του  $P(s)$  ως του μεγαλύτερου βαθμού όλων των οριζουσών του  $P(s)$ .  $\square$

**Λήμμα 9.33** Εστω  $T(s)$ ,  $T'(s)$  είναι δύο πλήρως ισοδύναμοι πολυωνυμικοί πίνακες και  $P, Q$  είναι δύο σταθεροί, τετράγωνοι και αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε

$$T'(s) = P T_R(s) Q \quad (9.65)$$

Τότε οι πίνακες  $T(s)$  και  $T_R(s)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Οι  $T(s)$  και  $T'(s)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι και συνεπώς υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε

$$M(s) T(s) = T'(s) N(s) \quad (9.66)$$

όπου οι σύνηθετοι πίνακες

$$(M(s) \quad T'(s)) \quad ; \quad \begin{bmatrix} T(s) \\ -N(s) \end{bmatrix} \quad (9.67)$$

ικανοποιούν τις συνθήκες (3.50α,β,γ). Χρησιμοποιώντας την σχέση (9.65) μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση (9.66) ως εξής

$$[P^{-1} M(s)] T(s) = T_R(s) [Q N(s)] \quad (9.68)$$

όπου οι σύνηθετοι πίνακες

$$(P^{-1}M(s) \ T_R(s)) = P^{-1} (M(s) \ T'(s)) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \quad (9.69)$$

και

$$\begin{bmatrix} T(s) \\ QN(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (9.70)$$

ικανοποιούν επίσης τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (3.50α, β, γ) λόγω του λήμματος 9.32, των σχέσεων (9.69) και (9.70) καθώς και των συνθηκών της πλήρους ισοδυναμίας που ικανοποιούν οι σύνθετοι πίνακες της πλήρους ισοδύναμης σχέσης (9.67).  $\square$

**Σημείωση 9.34** Μπορούμε να παρατηρήσουμε στο λήμμα 9.33 ότι  $T_R(s) = P^{-1}T'(s)Q^{-1}$  και συνεπώς εάν ο πίνακας  $T(s)$  είναι πλήρως ισοδύναμος με τον πίνακα  $T_R(s)$  τότε και ο  $T(s)$  είναι επίσης πλήρως ισοδύναμος με τον πίνακα  $T'(s)$ .  $\square$

**Λήμμα 9.35** (Hayton *et al.* 1989) Έστω  $P(s) := P_0 + P_1s + \dots + P_q s^q \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ . Ορίζουμε τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$P_F(s) = \begin{bmatrix} P_A s - P_E & P_B s \\ -P_C s & P_1 s + P_0 \end{bmatrix} \quad (9.71)$$

όπου οι πίνακες  $P_E, P_A, P_B, P_C$  σχηματίζονται κατά τον ίδιο τρόπο που αναφέραμε παραπάνω στην αναγωγή του Rosenbrock πίνακα (9.61) στον πρωτοβάθμιο Rosenbrock πίνακα (9.63). Τότε ο  $P(s)$  θα είναι πλήρως ισοδύναμος με τον πίνακα  $P_F(s)$  κάτω από τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} P(s) \stackrel{\text{πλήρως}}{=} \stackrel{\text{ισοδ.}}{=} \begin{bmatrix} P_E - sP_A & P_B s \\ -P_C s & P_1 s + P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(P_E - sP_A)^{-1} P_B s \\ I \end{bmatrix} \quad (9.72) \quad \square$$

**Λήμμα 9.36** Οι πολυωνυμικοί πίνακες  $T(s)$  της σχέσεως (9.42α) και  $T_R(s)$  της σχέσεως (9.63) είναι πλήρως ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν δύο πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s)$  και  $N(s)$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός

$$M(s) T(s) = T_R(s) N(s) \quad (9.73)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός.

Ο μεγαλύτερος βαθμός όλων των πολυωνύμων του πίνακα  $T(s)$  είναι ίσος με τον αντίστοιχο του πίνακα  $P(s)$  και συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} T(s) &= T_0 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots + T_q s^q \\ &= \begin{bmatrix} P_0 & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\ (0 \quad -I_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s + \dots + \begin{bmatrix} P_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^q \end{aligned} \quad (9.74)$$

Ορίζουμε τους Hankel πίνακες

$$\Pi'_E = \begin{bmatrix} T_2 & T_3 & \dots & T_q \\ T_3 & T_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi'_A = \begin{bmatrix} T_3 & T_4 & \dots & T_q & 0 \\ T_4 & T_5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi'_B = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_q \end{bmatrix}$$

$$\Pi'_C = [T_2 \ T_3 \ \dots \ T_q] \quad (9.75)$$

και έστω  $\rho_E = \text{rank} \Pi'_E$ . Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι  $r_E = \rho_E$ . Ας δηλώσουμε με  $I, J$  τα σύνολα των  $\rho_E$  δεικτών γραμμών και στηλών τέτοια ώστε οι γραμμές  $I$  και οι στήλες  $J$  του πίνακα  $\Pi'_E$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητες αντίστοιχα και

$$T_E - sT_A = P_E - sP_A, \quad T_B s = (P_B \ 0)s, \quad T_C s = \begin{bmatrix} P_C s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.76)$$

όπου οι πίνακες  $T_E, T_A, T_B, T_C$  σχηματίστηκαν κατά τον ίδιο τρόπο με τους πίνακες  $P_E, P_A, P_B, P_C$  αλλά κάτω από τον προηγούμενο περιορισμό. Σύμφωνα με το λήμμα 9.35 θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{r+p+m} \end{bmatrix} T(s) & \stackrel{\text{πλήρως}}{=} \text{ισοδ.} \begin{bmatrix} T_E - sT_A & T_B s \\ -T_C s & T_I s + T_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(T_E - sT_A)^{-1} T_B s \\ I_{r+p+m} \end{bmatrix} \\ & \stackrel{(9.76)}{=} \begin{bmatrix} P_E - sP_A & P_B s & 0 \\ -P_C s & P_I s + P_0 & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & -I_m \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(P_E - sP_A)^{-1} [P_B \ 0]s \\ I_{r+p+m} \end{bmatrix} \\ & = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I_r & 0 \\ I_{r+p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} T_R(s) \begin{bmatrix} 0 & I_{r+m} & 0 \\ -I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -(P_E - sP_A)^{-1} [P_B \ 0]s \\ I_{r+p+m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.77)$$

και συνεπώς από το λήμμα 9.33 θα έχουμε ότι ο μετασχηματισμός

$$M T(s) = T_R(s) N(s) \quad (9.78)$$

όπου

$$M = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad N(s) = \begin{bmatrix} I_{r+m} & | & 0 \\ (P_E - sP_A)^{-1} P_B s & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_p \end{bmatrix} \quad (9.79)$$

είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. □

**Θεώρημα 9.37** Τα συστήματα (9.42) και (9.63) είναι πλήρως ισοδύναμα.

**Απόδειξη** Χρησιμοποιώντας την σχέση (9.78) είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_R(s) & U_R \\ -\gamma_R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.80)$$

Εστω οι σύνθετοι πίνακες

$$Q_1(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} M & 0 & T_R(s) & U_R \\ 0 & I_p & -\mathcal{V}_R & 0 \end{array} \right] \text{ και } R_1(s) = \left[ \begin{array}{cc} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \\ -N(s) & -0 \\ 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.81)$$

Θα ελέγξουμε εάν οι σύνθετοι πίνακες  $Q_1(s)$  και  $R_1(s)$  ικανοποιούν τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (3.50α,β,γ)

(α) Ο πολυωνυμικός πίνακας  $R_1(s)$  περιέχει έναν  $(r+2m+p) \times (r+2m+p)$  μοναδιαίο πίνακα ο οποίος εμπεριέχεται στον πολυωνυμικό πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cc} -N(s) & 0 \\ 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.82)$$

και συνεπώς ο πίνακας  $R_1(s)$  έχει πλήρη τάξη, δεν έχει πεπερασμένα μηδενικά επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των  $(r+2m+p) \times (r+2m+p)$  οριζουσών είναι ίσος με 1 και δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$  επειδή πάντα έχουμε την δυνατότητα να επεκτείνουμε την ορίζουσα του  $R_1(s)$  με τον μεγαλύτερο βαθμό ( $\delta_M(R_1(s))$ ) με έναν διαγώνιο μοναδιαίο πίνακα έτσι ώστε να πάρουμε μια  $(r+2m+p) \times (r+2m+p)$  ορίζουσα με τον ίδιο βαθμό πρδ. μια συνθήκη που εγγυάται την απουσία μηδενικών στο  $s=\infty$  (Hayton *et al.* 1988). Έχουμε επίσης ότι

$$\delta_M \left[ \begin{array}{cc} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \\ -N(s) & -0 \\ 0 & -I_m \end{array} \right] \stackrel{\text{Προτ. 2.40}}{=} \delta_M \left[ \begin{array}{c} T(s) \\ -N(s) \end{array} \right] \stackrel{\text{Λήμμα 9.36}}{=} \delta_M(T(s)) \stackrel{\text{Προτ. 2.40}}{=} \delta_M \left[ \begin{array}{cc} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \end{array} \right] \quad (9.83)$$

(β) Ο πολυωνυμικός πίνακας  $Q_1(s)$  έχει πλήρη τάξη λόγω του ότι εμπεριέχει τον πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cc} 0 & T_R(s) \\ I_p & 0 \end{array} \right] \quad (9.84)$$

με ορίζουσα διάφορη του μηδενός. Θεωρείστε τον αυστηρά ισοδύναμο μετασχηματισμό :



$$Q_1(s) \begin{bmatrix} 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^r & I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^p & I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_m & 0 \\ I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0^m \\ 0^p & 0 & 0 & 0 & I_r & 0 & 0 & 0 & 0^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0^r & I_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^p & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M & T_R(s) & 0 \\ I_p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.85)$$

Ξέρουμε από τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας του λήμματος 9.36 ότι ο σύνθετος πίνακας  $(M \ T_R(s))$  δεν έχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}\{\omega\}$  και άρα ο ανστηρά ισοδύναμος πίνακας  $Q_1(s)$  δεν θα περιέχει επίσης μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C}\{\omega\}$ . Οσον αφορά τις McMillan συνθήκες έχουμε ότι

$$\delta_M \left[ \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \middle| \begin{array}{c} T_R(s) \\ -\mathcal{V}_R \end{array} \middle| \begin{array}{c} U_R \\ 0 \end{array} \right] \stackrel{\text{Προτ. 2.40}}{=} \delta_M \left[ \begin{array}{c} T_R(s) \\ -\mathcal{V}_R \end{array} \middle| \begin{array}{c} U_R \\ 0 \end{array} \right] \quad (9.86) \quad \square$$

Δεν είναι μόνο η κανονική μορφή του συστήματος (9.41) που είναι πλήρως ισοδύναμη με το σύστημα (9.63) αλλά και το ίδιο το σύστημα (9.41) όπως φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 9.38** Τα συστήματα (9.41) και (9.63) είναι πλήρως ισοδύναμα.

**Απόδειξη** Από την σχέση (9.40) έχουμε ότι ο μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 & | & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p & | & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & | & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & I_m \\ C(s) & | & -D(s) \\ \hline 0 & | & I_m \end{bmatrix} \quad (9.87)$$

είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Εάν συνδιάσουμε τις σχέσεις (9.80) και (9.87) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \\ & = \left[ \begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & T_R(s) & 0 \\ & & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p \\ \hline & & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & I_m \\ \hline (P_E - sP_A)^{-1}P_B s & \\ \hline C(s) & -D(s) \\ \hline 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.88) \end{aligned}$$

Θεωρείστε τους σύνθετους πίνακες

$$R(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \\ -I_r & 0 \\ 0 & -I_m \\ \hline -(P_E - sP_A)^{-1}P_B s \\ \hline -C(s) & D(s) \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.89)$$

και

$$Q(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} I_r & 0 & P_1 s + P_0 & P_C s \\ 0 & 0 & & \\ \hline 0 & 0 & P_B s & -P_E + sP_A \\ 0 & 0 & [0 \quad -I_m] & 0 \\ \hline 0 & I_p & 0 & 0 \\ & & & -I_p & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.90)$$

και ας ελέγξουμε αν ικανοποιούν τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (3.50α,β,γ). Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι σύνθετοι πίνακες  $R(s)$  στην σχέση (9.89) και  $R_1(s)$  στην σχέση (9.81), καθώς και οι  $Q(s)$  στην σχέση (9.90) και  $Q_1(s)$  στην σχέση (9.81) συνδέονται με τις ακόλουθες αυστηρές ισοδυναμίες

$$\begin{bmatrix} R(s) & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0^p & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0^p & 0 & 0 & I_r & 0 & 0 & 0^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{re} & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 & I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^p & I_m & 0^p & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0^m & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^p & -I_m \end{bmatrix} R_1(s) \quad (9.91)$$

και

$$(Q(s) \ 0) = Q_1(s) \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^p & I_m \\ 0 & I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0^p & I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{re} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m & 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.92)$$

και άρα χρησιμοποιώντας το λήμμα 9.33, τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας του θεωρήματος 9.37 καθώς και τις σχέσεις (9.91) και (9.92) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ο μετασχηματισμός (9.88) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός.  $\square$

**Λήμμα 9.39** Εστω οι πίνακες  $T_E, T_A, T_B, T_C$  οι οποίοι σχηματίζονται όπως περιγράψαμε παραπάνω από την κατάλληλη επιλογή των δεικτών γραμμών  $I$  και δεικτών στηλών  $J$ . Εάν  $T'_E, T'_A, T'_B, T'_C$  είναι μια διαφορετική κατασκευή η οποία αντιστοιχεί σε μια άλλη επιλογή δεικτών γραμμών  $I'$  και δεικτών στηλών  $J'$  τότε θα υπάρχουν σταθεροί και αντιστρέψιμοι πίνακες  $Q_1$  και  $Q_2$  τέτοιοι ώστε

$$T_E - sT_A = Q_1(T'_E - sT'_A)Q_2, \quad T_B = Q_1 T'_B, \quad T_C = T'_C Q_2 \quad (9.93)$$

ή ισοδύναμα τέτοιοι ώστε

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} I_{r+p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} T'_R(s) & U_R \\ \hline -\mathcal{V}_R & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} I_{r+m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} T_R(s) & U_R \\ \hline -\mathcal{V}_R & 0 \end{array} \right] \quad (9.94)$$

το οποίο σημαίνει ότι κάθε άλλη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων που σχηματίζεται κατά τον ίδιο τρόπο αλλά από διαφορετικούς δείκτες στηλών και γραμμών θα είναι αυστηρά όμοια με αυτή που σχηματίσαμε.  $\square$

Είχαμε διατυπώσει στην ενότητα 9.3.1 ένα ανοικτό ερώτημα όσον αφορά το αναλλοίωτο των δυναμικών δεικτών εισόδου και εξόδου, της γενικευμένης τάξης  $f$  και του βαθμού  $d_R$  μιας Π.Π.Σ.. Τα ερωτήματα αυτά ερχόμαστε να απαντήσουμε με τα παρακάτω θεωρήματα.

**Θεώρημα 9.40** Η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτα

- (α) την γενικευμένη τάξη  $f$ ,
- (β) τον βαθμό  $d_R$ ,
- (γ) τα αναλλοίωτα μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{w\}$ ,

**Απόδειξη**

- (α) Εάν λάβουμε υπόψη ότι σε μια κανονική Π.Π.Σ.  $\deg|T(s)| = \deg|A(s)|$ , τότε η γενικευμένη τάξη  $f_1$  ενός συστήματος  $\Sigma_1$  μπορεί να γραφτεί σύμφωνα με την σχέση (2.79) ως

$$f_1 = \delta_M(T_1(s)) = \sum_{i=1}^k q_i(T_1) = \deg A_1(s) + \sum_{i=k+1}^{\tilde{r}} \hat{q}_i(T_1) \quad (9.95)$$

όπου  $q_i(T_1)$   $i=1,2,\dots,k$  και  $\hat{q}_i(T_1)$   $i=k+1,k+2,\dots,\tilde{r}$  είναι αντίστοιχα οι πόλοι και τα μηδενικά στο  $s=w$  του  $T_1(s)$ . Σύμφωνα με το θεώρημα 9.23 η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτους τους πόλους του συστήματος στο  $\mathbb{C}\{w\}$  ή ισοδύναμα την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{w\}$  των πινάκων  $T_i(s)$   $i=1,2$  των δύο πλήρως ισοδύναμων συστημάτων και συνεπώς  $\deg|A_1(s)| = \deg|A_2(s)|$  και  $\hat{q}_i(T_1) = \hat{q}_i(T_2)$ . Μετά από αυτά τα συμπεράσματα είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι  $f_1 = f_2$ .

(β) Θεωρείστε την παρακάτω φόρμουλα (Rosenbrock 1970)

$$P_{\substack{1,2,\dots,r+i_1,r+i_2,\dots,r+i_q \\ 1,2,\dots,r+j_1,r+j_2,\dots,r+j_q}} = G_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_q \\ j_1,j_2,\dots,j_q}} \deg A(s) \quad (9.96)$$

όπου  $G_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_q \\ j_1,j_2,\dots,j_q}}$  είναι οι πίνακες που σχηματίζονται από τις γραμμές  $i_1,i_2,\dots,i_q$  και τις στήλες  $j_1,j_2,\dots,j_q$ . Έχουμε όμως από το θεώρημα 9.23 ότι η συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  και ο βαθμός  $n = \deg |A(s)|$  παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων και άρα και οι πίνακες της μορφής

$$P_{\substack{1,2,\dots,r+i_1,r+i_2,\dots,r+i_q \\ 1,2,\dots,r+j_1,r+j_2,\dots,r+j_q}} \quad (9.97)$$

θα παραμένουν αναλλοίωτοι ή ισοδύναμα ο βαθμός  $d_R$ , που ορίζεται ως ο μεγαλύτερος βαθμός όλων των οριζουσών της μορφής (9.97), θα παραμένει αναλλοίωτος.

(γ) Είναι φανερό από τον ορισμό της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων ότι δύο συστήματα είναι πλήρως ισοδύναμα εάν και μόνο εάν οι πίνακες Rosenbrock των δύο αυτών συστημάτων είναι πλήρως ισοδύναμοι κάτω από τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό της μορφής (9.38). Η πλήρης ισοδυναμία όμως έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  πολυωνυμικών πινάκων. Άρα οι πίνακες Rosenbrock δύο ισοδύναμων συστημάτων ως πλήρως ισοδύναμοι θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  ή ισοδύναμα δύο πλήρως ισοδύναμα συστήματα θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ .  $\square$

**Σημείωση 9.41** Να σημειώσουμε εδώ ότι η γενικευμένη τάξη  $f$  της γενικής Π.Π.Σ. (9.41) θα είναι ίση με

$$f = \delta_M(T(s)) = \delta_M \begin{bmatrix} A(s) & B(s) & 0 \\ -C(s) & D(s) & I_p \\ 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix} \stackrel{\text{Προτ. 2.40}}{=} \delta_M \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \delta_M(P(s)) = d_s \quad (9.98)$$

όπου  $d_s$  είναι ο βαθμός του συστήματος, ο οποίος έχει οριστεί από τον Van Der Weiden (1983) ως ο μεγαλύτερος βαθμός των οριζουσών όλων των υποπινάκων του  $P(s)$ . Έχουμε δηλαδή ταύτιση της τάξης ενός συστήματος  $d_s$  (Van Der Weiden 1983) και της γενικευμένης τάξης  $f$  (Verghese 1978).  $\square$

**Λήμμα 9.42** Τα συστήματα (9.41) (ή ισοδύναμα (9.42)) και (9.63) έχουν

- (α) τους ίδιους δυναμικούς δείκτες εισόδου και εξόδου,
- (β) τους ίδιους αναλλοίωτους δείκτες στηλών και γραμμών.

**Απόδειξη**

- (α) Θεωρήστε τον σύνθετο πίνακα

$$(T_R(s) \ u_R) = \begin{bmatrix} P_1 s + P_0 & P_C s & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} & 0 \\ P_B s & -P_E + sP_A & 0 & 0 \\ (0 \ -I_m) & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.99)$$

Έχουμε ότι ο σύνθετος πίνακας  $[T_R(s) \ u_R]$  είναι αυστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\hat{\mathcal{P}}(s) = \left[ \begin{array}{c|ccc} -P_E + sP_A & P_B s & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} & 0 \\ \hline -P_C s & P_1 s + P_0 & 0 & 0 \\ 0 & (0 \ -I_m) & 0 & I_m \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & I_{r+p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} (T_R(s) \ u_R) \begin{bmatrix} 0 & I_{r+m} & 0 & 0 \\ I_r E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.100)$$

και άρα οι πίνακες  $\hat{\mathcal{P}}(s)$  και  $(T_R(s) \ u_R)$  θα έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες γραμμών και στηλών σύμφωνα με τις ιδιότητες της αυστηρά ισοδυναμίας. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας  $\hat{\mathcal{P}}(s)$  είναι ένας πίνακας Rosenbrock μιας ισχυρά μη αναγώγιμης Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (σύμφωνα με τις ιδιότητες του λήμματος 5.23) η οποία έχει συνάρτηση μεταφοράς την

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &:= - \begin{bmatrix} P_C s \\ 0 \end{bmatrix} (-P_E + sP_A)^{-1} (P_B s \ 0 \ 0) + \begin{bmatrix} P_1 s + P_0 & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} & 0 \\ (0 \ -I_m) & 0 & I_m \end{bmatrix} = \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} P(s) & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} \\ \hline (0 \ -I_m) & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ I_m \end{array} = [T(s) \ U] \end{aligned} \quad (9.101)$$

και συνεπώς από θεώρημα 5.9 οι πολυωνυμικοί πίνακες  $(T(s) \ U)$  και  $\hat{P}(s)$  ή ισοδύναμα  $(T(s) \ U)$  και  $(T_R(s) \ U_R)$  έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και άρα τα συστήματα (9.41) και (9.63) θα έχουν τους ίδιους δυναμικούς δείκτες εισόδου. Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι οι πίνακες  $[T(s)^T \ -\mathcal{V}^T]^T$  και  $[T_R(s)^T \ -\mathcal{V}_R^T]^T$  έχουν τους ίδιους ελάχιστους δείκτες γραμμών και άρα τα συστήματα (9.41) και (9.63) θα έχουν τους ίδιους δυναμικούς δείκτες εξόδου.

(β) Η απόδειξη είναι εντελώς όμοια με αυτή του ζητήματος (α) εάν αντί του πίνακα  $(T_R(s) \ U_R)$  πάρουμε τον πίνακα του συστήματος (9.63)  $\mathcal{P}_R(s)$ , αντί του πίνακα  $\hat{P}(s)$  τον πίνακα

$$\hat{P}'(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -P_E + sP_A & P_B s \\ \hline -P_C s & P_1 s + P_0 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ I_p \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -I_p \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ I_m \\ 0 \end{array}$$

και τέλος αντί του πίνακα  $\hat{G}(s)=[T(s) \ U]$  τον πίνακα  $\hat{G}'(s)=\mathcal{P}(s)$  που ταυτίζεται με τον πίνακα του συστήματος (9.42). □

**Θεώρημα 9.43** Η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτους

- (α) τους δυναμικούς δείκτες εισόδου και εξόδου,
- (β) τους αναλλοίωτους δείκτες στηλών και γραμμών.

**Απόδειξη**

(α) Εστω  $P_1(s), P_2(s)$  είναι δύο πλήρως ισοδύναμοι πίνακες Rosenbrock. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 9.38 θα υπάρχουν δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των

καταστάσεων με πίνακες Rosenbrock  $P_{R_1}(s)$  και  $P_{R_2}(s)$  οι οποίες θα είναι πλήρως ισοδύναμες των συστημάτων που ορίζονται από τους  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  αντίστοιχα. Η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων είναι μια σχέση ισοδυναμίας (θεώρημα 9.23) και άρα από την μεταβατική ιδιότητα της πλήρης ισοδυναμίας οι πίνακες  $P_{R_1}(s)$  και  $P_{R_2}(s)$  θα είναι πλήρως ισοδύναμοι, ή ισοδύναμα από θεώρημα 9.23, θα είναι τέλεια ισοδύναμοι. Η τέλεια ισοδυναμία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτους τους δυναμικούς δείκτες εισόδου και εξόδου και άρα οι πίνακες  $P_{R_1}(s)$  και  $P_{R_2}(s)$  θα έχουν τους ίδιους δυναμικούς δείκτες εισόδου και εξόδου. Από το λήμμα 9.42 θα έχουμε ότι και οι πλήρως ισοδύναμοι πίνακες των  $P_{R_1}(s)$  και  $P_{R_2}(s)$ ,  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  αντίστοιχα, θα έχουν τους ίδιους δυναμικούς δείκτες εισόδου και εξόδου.

(β) Ερχόμαστε πρώτα να παρατηρήσουμε ότι οι αναλλοίωτοι δείκτες στηλών και γραμμών όπως ορίστηκαν στο κεφάλαιο 8, παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από τον μετασχηματισμό της τέλει ισοδυναμίας συστημάτων (η απόδειξη είναι ή ίδια ακριβώς με αυτή των Taylor & Pugh (1985)). Εάν λοιπόν λάβουμε υπόψη μας το λήμμα 9.42 και εφαρμόσουμε τον ίδιο τρόπο απόδειξης με αυτόν του ζητήματος (α) θα έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.  $\square$

**Σημείωση 9.44** Θεωρείστε τώρα την Smith μορφή του πίνακα  $T(s)$  (δες (9.42α)) στο  $s=\infty$

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) = \text{diag} [s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_v}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-v}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_{r+p+m}}}] \quad (9.102)$$

όπου  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_v > 0$  και  $\hat{q}_{r+p+m} \geq \hat{q}_{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} > 0$  είναι αντίστοιχα οι τάξεις των αυστηρά θετικών πόλων και μηδενικών του  $T(s)$  στο  $s=\infty$ . Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκαταστάσεως της Π.Π.Σ. (9.63) θα είναι ίση με



$$\lambda_{\text{bvw}} = \tilde{r} + \rho_E = r + p + m + \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_3 & \cdots & \mathcal{T}_q \\ \mathcal{T}_3 & \mathcal{T}_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathcal{T}_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$(5.42) \quad = r + p + m + \sum_{i=1}^v (q_i - 1) = r + p + m + \delta_M(\mathcal{T}) - v$$

$$(2.69) \quad \left( = \deg A(s) + \sum_{i=v+1}^{r+p+m} (\hat{q}_i(\mathcal{T}) + 1) \right) \quad (9.103) \quad \square$$

**Πρόταση 9.45** Μια ένα προς ένα και επί γραμμική απεικόνιση συνδέει την ψευδοκατάσταση, έστω  $x(t)$  της Π.Π.Σ. (9.63) και της ψευδοκατάστασης  $\xi(t)$  της Π.Π.Σ. (9.42).

**Απόδειξη** Θεωρείστε τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} & & & | & 0 \\ & & & | & 0 \\ & \mathcal{T}_R(\rho) & & | & I_m \\ \hline 0 & 0 & & | & -I_p \\ & & & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & & & | & 0 \\ 0 & & & | & I_m \\ \hline \frac{(P_E - \rho P_A)^{-1} P_B \rho}{C(\rho)} & & & | & -D(\rho) \\ \hline 0 & & & | & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.104)$$

Εαν πολλαπλασιάσουμε από αριστερά και τα δύο μέλη της σχέσεως (9.104) με το διάνυσμα  $[\beta(t)^T \ -u(t)^T]^T$  θα πάρουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} & & & | & 0 \\ & & & | & 0 \\ & & & | & I_m \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & I_m \\ \hline \frac{(P_E - \rho P_A)^{-1} P_B \rho}{C(\rho)} & | & -D(\rho) \\ \hline 0 & | & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\
& \begin{bmatrix} 0 \\ \hline -y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & | & 0 \\ & & & | & 0 \\ & & & | & I_m \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & I_m \\ \hline \frac{(P_E - \rho P_A)^{-1} P_B \rho}{C(\rho)} & | & -D(\rho) \\ \hline 0 & | & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (9.105)
\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}
x(t) &= \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ [(P_E - \rho P_A)^{-1} P_B] \rho \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_m \\ \hline \frac{[(P_E - \rho P_A)^{-1} P_B] \rho}{V(\rho) - W(\rho)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} I_r & 0 & | & 0 \\ 0 & I_m & | & 0 \\ \hline \frac{[(P_E - \rho P_A)^{-1} P_B] \rho}{0} & 0 & | & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} =: M(\rho) \xi(t) \quad (9.106)
\end{aligned}$$

είναι μια σχέση μεταξύ της ψευδοκαταστάσεως  $x(t)$  της Π.Π.Σ. (9.63) και της ψευδοκαταστάσεως  $\xi(t) = [\beta(t)^T, -u(t)^T, y(t)^T]^T$  της Π.Π.Σ. (9.42). Εάν θεωρήσουμε λοιπόν ως  $u(t)=0$  θα έχουμε από την (9.42α) και (9.106) ότι

$$\mathcal{I}(\rho) \xi(t) = 0 \quad (9.107\alpha)$$

$$x(t) = M(\rho) \xi(t) \quad (9.107\beta)$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο σύνθετος πίνακας  $[\mathcal{I}(\rho)^T \quad M(\rho)^T]^T$  ικανοποιεί την McMillan συνθήκη (7.20) και δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{w\}$ . Άρα η σχέση (9.106) είναι μια ένα προς ένα και επί γραμμική απεικόνιση. Ομοια μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η σχέση

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} x(t) \quad (9.108)$$

είναι μια ένα προς ένα και επί γραμμική απεικόνιση μεταξύ των ψευδοκαταστάσεων  $\xi(t)$  και  $x(t)$  των Π.Π.Σ. (9.42) και (9.63) αντίστοιχα. Άρα από λήμμα 2.2 (και λήμμα 10.14) θα έχουμε ότι οι σχέσεις (9.106) και (9.108) είναι ένα προς ένα και επί γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των χώρων λύσεων—εισόδων των Π.Π.Σ. (9.42) και (9.63).  $\square$

**Σημείωση 9.46** Εάν θεωρήσουμε αντί των πινάκων  $\Pi_E$ ,  $\Pi_A$ ,  $\Pi_B$  και  $\Pi_C$  στην σχέση (9.62), τους πίνακες

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_q \\ P_2 & P_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} P_2 & P_3 & \cdots & P_q & 0 \\ P_3 & P_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ P_q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix}$$

$$\Pi_C = [P_1, P_2, \dots, P_q] \quad (9.109)$$

και πάρουμε κατά τον ίδιο τρόπο τους πίνακες  $P_E$ ,  $P_A$ ,  $P_B$  και  $P_C$  τότε είναι εύκολο να δείξουμε κατά τον ίδιο τρόπο ότι η Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$P'_R(s) := \left[ \begin{array}{cc|c|c} P_0 & P_C s & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} & 0 \\ P_B & -P_E + sP_A & 0 & 0 \\ \hline (0 \quad -I_m) & 0 & 0 & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 \end{array} \right] =: \begin{bmatrix} T'_R(s) & U'_R \\ -V'_R & 0 \end{bmatrix} \quad (9.110)$$

είναι πλήρως ισοδύναμη με την Π.Π.Σ. (9.41) κάτω από τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|c|c} & & 0 & \\ & T_R(s) & 0 & \\ & & I_m & \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & I_m \\ \hline (P_E - sP_A)^{-1}P_B \\ \hline C(s) & -D(s) \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.111)$$

Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκατάστασης της Π.Π.Σ. (9.110) είναι

$$\lambda'_{bvw} = r + p + m + \delta_M(T) \quad (9.112)$$

Στην περίπτωση τώρα που θεωρήσουμε αντί των πινάκων  $\Pi_E$ ,  $\Pi_A$ ,  $\Pi_B$  και  $\Pi_C$ , στην σχέση (9.62), τους πίνακες

$$\Pi_E = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_q \\ P_1 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ P_q & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_A = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_q & 0 \\ P_2 & P_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ P_q & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_B = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_q \end{bmatrix}$$

$$\Pi_C = [P_0, P_1, \dots, P_q] \quad (9.113)$$

και πάρουμε κατά τον ίδιο τρόπο τους πίνακες  $P_E, P_A, P_B$  και  $P_C$  τότε είναι εύκολο να δείξουμε κατά τον ίδιο τρόπο ότι η Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$P'_R(s) := \left[ \begin{array}{cc|c|c} 0 & P_C & \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \end{bmatrix} & 0 \\ P_B & -P_E + sP_A & 0 & 0 \\ \hline (0 \ -I_m) & 0 & 0 & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p & 0 \end{array} \right] =: \begin{bmatrix} T'_R(s) & U'_R \\ -\gamma'_R & 0 \end{bmatrix} \quad (9.114)$$

είναι πλήρως ισοδύναμη με την Π.Π.Σ. (9.41) κάτω από τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \\ \hline 0 & | & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & | & 0 \\ & T_R(s) & | & 0 \\ & & | & I_m \\ \hline 0 & 0 & -I_p & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & I_m \\ \hline (P_E - sP_A)^{-1} P_B \\ \hline C(s) & | & -D(s) \\ \hline 0 & | & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.115)$$

Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκατάστασης της Π.Π.Σ. (9.114) είναι

$$\lambda'_{b'vw} = r + p + m + \delta_M(T) + k \quad (9.116)$$

όπου  $k$  ο αριθμός των πόλων  $q_i(T) \geq 0$  στο  $s = \infty$ . □

**Παράδειγμα 9.47** Εστω μια Π.Π.Σ. Σ με πίνακα Rosenbrock

$$\begin{aligned} P(s) &:= \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 \\ 2s-5 & 3s+2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} s^2 =: P_0 + P_1 s + P_2 s^2 \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

( $r=p=m=1$ ) ή ισοδύναμα με κανονικό πίνακα του συστήματος

$$\mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}(s) & \mathcal{U} \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.2})$$

όπου

$$\mathcal{T}(s) = \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

και

$$S_{\mathcal{T}(s)}^{\omega}(s) = \text{diag}(s^2, s, \frac{1}{s}) \quad ; \quad S_{\mathcal{T}(s)}^{\mathcal{C}}(s) = \text{diag}(1, 1, (s+2)(s+3)) \quad (\text{E.4})$$

Θεωρείστε τους πίνακες Hankel της μορφής

$$\Pi_E := [P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_A := [0_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_B := [P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_C := [P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

Έχουμε ότι  $r_E = \text{rank}_{\mathbb{R}} \Pi_E = 1$ . Διαλέγουμε την γραμμή  $I=\{1\}$  και την στήλη  $J=\{1\}$  του πίνακα  $\Pi_E$ . Οι υποπίνακες  $P_E, P_A, P_B$  και  $P_C$  που προκύπτουν από αυτήν την επιλογή θα είναι

$$P_E = [1], \quad P_A = [0], \quad P_B = [1 \ 0] \quad \text{και} \quad P_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

και οι οποίοι μας δίνουν τον Rosenbrock πίνακα

$$P_R(s) = \left[ \begin{array}{cc|c|c} P_1 s + P_0 & P_C s & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & 0 \\ P_B s & -P_E + sP_A & 0 & 0 \\ \hline [0 \ -1] & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 5s+6 & s+1 & s & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.7})$$

Ο πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός που συνδέει τους πίνακες  $P(s)$  και  $P_R(s)$  είναι ο εξής

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \\ & = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & T_R(s) & & 0 \\ & & & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & & 0 \\ 0 & & 1 \\ \hline (P_E - sP_A)^{-1} P_B s & & \\ \hline C(s) & & -D(s) \\ \hline 0 & & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ & \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 \\ 2s-5 & 3s+2 \end{bmatrix} = \\ & = \left[ \begin{array}{cccc|c} 5s+6 & s+1 & s & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & 0 \\ -2s+5 & -3s-2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.8}) \end{aligned}$$

Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκατάστασης  $x(t)$  της Π.Π.Σ. (E.7) θα είναι

$$\lambda_{bvw} = \deg|A(s)| + \sum_{i=3}^3 (\hat{q}_i(T(s) + 1)) = 2 + (1 + 1) = 4 \quad (\text{E.9})$$

Η αμφίεση που συνδέει τις ψευδοκαταστάσεις  $x(t)$  και  $\xi(t)$  των Π.Π.Σ. (E.7) και (E.2) αντίστοιχα θα είναι της μορφής

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline [(\bar{P}_E - \rho \bar{P}_A)^{-1} \bar{P}_B] \rho & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \bar{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi(t) = \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ -\dot{\beta}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

και

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} x(t) \quad ; \quad \beta(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x(t) \quad (\text{E.11}) \quad \square$$

### 9.3.2γ Ισοδύναμο μοντέλο Zhang (1989).

Θεωρείστε την Π.Π.Σ. (9.41) της οποίας η κανονική μορφή είναι η (9.42). Ο πίνακας  $T(s)$  στην σχέση (9.42α) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$T(s) = \Gamma^{-1} T(s) = (U(s))^{-1} (U(s) T(s)) \quad (\text{9.117})$$

όπου  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$ ,  $\tilde{r} = r + p + m$ , είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$[Q(s) \ R(s)] := [U(s) \ U(s)T(s)] \quad (\text{9.118})$$

να είναι κανονικός κατά γραμμές. Προφανώς οι πίνακες  $Q(s)^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  και  $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  αποτελούν επίσης μια αριστερά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$  εφόσον η πράξη (9.117) είναι μια πράξη αντιστρέψιμης ισοδυναμίας που διατηρεί την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ . Ο πίνακας λοιπόν  $[Q(s) \ R(s)]$  εκτός από πεπερασμένα μηδενικά δεν θα περιέχει και μηδενικά στο  $s = \infty$  λόγω του ότι είναι κανονικός κατά γραμμές (δες λήμμα 5.31). Επίσης εάν



$$S_{[Q(s) \ R(s)]}^{\infty}(s) = \text{block diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_p}, 0_{pm} \right] \quad (9.119)$$

είναι η Smith μορφή στο  $s=\infty$  του  $[Q(s) \ R(s)]$ , όπου  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_p > 0$  είναι οι τάξεις των πόλων στο  $s=\infty$  του  $[Q(s) \ R(s)]$  τότε οι βαθμοί των γραμμών του  $[Q(s) \ R(s)]$  θα είναι

$$\delta_{r_i}([Q(s) \ R(s)]) = q_i \quad (9.120)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τον πίνακα  $[Q(s) \ R(s)]$  ως

$$[Q(s) \ R(s)] = \text{diag}\{s^{q_1}\} [Q_0 \ R_0] + \text{diag}\{s^{q_1-1}\} [Q_1 \ R_1] + \dots + \text{diag}\{s^{q_1-q_1}\} [Q_{q_1} \ R_{q_1}] \quad (9.121)$$

Παρατηρούμε ότι μερικές από τις δυνάμεις του  $s$  των συντελεστών πινάκων στην σχέση (9.121) είναι αρνητικές και οι αντίστοιχες γραμμές στους συντελεστές πίνακες είναι ίσες με μηδέν. Θεωρήστε τώρα τον πρωτοβάθμιο πολυωνυμικό πίνακα

$$sE - A = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} sI_{\tilde{r}} & 0 & \dots & 0 & Q_{q_1} & & R_{q_1} \\ -I_{\tilde{r}} & sI_{\tilde{r}} & \dots & 0 & Q_{q_1-1} & & R_{q_1-1} \\ 0 & -I_{\tilde{r}} & \dots & 0 & Q_{q_1-2} & & R_{q_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & sI_{\tilde{r}} & Q_1 & & R_1 \\ 0 & 0 & \dots & -I_{\tilde{r}} & Q_0 & & R_0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & -I_{\tilde{r}} & & 0 \end{array} \right] \quad (9.122)$$

διαστάσεων

$$\lambda_1 \times \lambda_1 = (\tilde{r} + (q_1+1)\tilde{r}) \times (\tilde{r} + (q_1+1)\tilde{r}) \quad (9.123)$$

Αφαιρούμε όλες τις γραμμές και τον ίδιο αριθμό στηλών που αντιστοιχούν σε αρνητικές δυνάμεις του  $s$ , έτσι ώστε να πάρουμε τον πίνακα  $sE' - A'$ . Βάσει του λήμματος 5.32, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η διάσταση του καινούργιου πίνακα  $sE' - A'$  θα είναι

$$\begin{aligned} \lambda_z \times \lambda_z &= (\tilde{r} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} (q_i(T)+1)) \times (\tilde{r} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} (q_i(T)+1)) = \\ &= (2\tilde{r} + \delta_M(T)) \times (2\tilde{r} + \delta_M(T)) \end{aligned} \quad (9.124)$$

Θεωρείστε τώρα μια Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων με πίνακα

Rosenbrock

$$P_R(s) = \left[ \begin{array}{cccc|cc|c} sI & 0 & \cdots & 0 & Q_{q_1} & R_{q_1} & 0 \\ -I & sI & \cdots & 0 & Q_{q_1-1} & R_{q_1-1} & 0 \\ 0 & -I & \ddots & 0 & Q_{q_1-2} & R_{q_1-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI & Q_1 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -I & Q_0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -I_{\tilde{r}} & 0 & \mathcal{U} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\mathcal{V} & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} sE' - A' & \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} \\ \hline -(0 \ -\mathcal{V}) & 0 \end{array} \right] \quad (9.125)$$

**Θεώρημα 9.48** Η Π.Π.Σ. (9.42) και η Π.Π.Σ. με πίνακα Rosenbrock της μορφής (9.125) είναι πλήρως ισοδύναμες.

**Απόδειξη** Εάν λάβουμε υπόψη μας τον τρόπο κατασκευής του πίνακα  $sE' - A'$  καθώς και το θεώρημα 5.33 θα πάρουμε ότι οι πίνακες  $sE' - A'$  και  $T(s)$  είναι  $\mathbb{C}\mathcal{U}\{\omega\}$ -ισοδύναμοι ή από συμπέρασμα 4.28 πλήρως ισοδύναμοι κάτω από τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{aligned} &\left[ Q(s)^{-1} [\text{diag}\{s^{q_1-q_1}\}, \text{diag}\{s^{q_1-q_1+1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_1}\}] \ I_{\tilde{r}} \right] (sE' - A') = \\ &= T(s) (0 \ 0 \ \cdots \ I_{\tilde{r}}) \end{aligned} \quad (9.126)$$

Παρατηρείστε ότι ο πίνακας

$$[Q(s)^{-1} [\text{diag}\{s^{q_1-q_1}\}, \text{diag}\{s^{q_1-q_1+1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_1}\}] \ I_{\tilde{r}}] \quad (9.127)$$

είναι πολυωνυμικός λόγω του ότι ο πίνακας  $Q(s)$  (δες 9.118) είναι αντιστρέψιμος. Βάσει της σχέσεως (9.126) παίρνουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{c|c} Q(s)^{-1}[\text{diag}\{s^{q_i-q_1}\}, \text{diag}\{s^{q_i-q_1+1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] & I_r \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} sE'-A' & \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \\ \hline -\gamma & 0 \end{array} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} T(s) & u \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \cdots I_r \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.128)$$

Θεωρείστε τους σύνθετους πίνακες

$$Q(s) = \left[ \begin{array}{c|c} Q(s)^{-1}[\text{diag}\{s^{q_i-q_1}\}, \text{diag}\{s^{q_i-q_1+1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] & I_r \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \begin{array}{c} T(s) \ u \\ -\gamma \ 0 \end{array} \quad (9.129)$$

και

$$Z(s) = \left[ \begin{array}{c|c} sE'-A' & \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \\ \hline (0 \ 0 \ \dots \ -I_r) & 0 \\ 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.130)$$

(α) Ο πίνακας  $Q(s)$  δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  λόγω του ότι εμπεριέχει τον μοναδιαίο πίνακα  $I_{r+p}$  (μια ικανή και αναγκαία συνθήκη απουσίας μηδενικών στο  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  που έχει αναφερθεί και στην απόδειξη του θεωρήματος 9.37). Όσον αφορά τις McMillan συνθήκες του πίνακα  $Q(s)$ , έχουμε λόγω του ότι οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα (Πρόταση 2.40) ότι

$$\delta_M(Q(s)) = \delta_M \left[ \begin{array}{c|c} Q(s)^{-1}[\text{diag}\{s^{q_i-q_1}\}, \text{diag}\{s^{q_i-q_1+1}\}, \dots, \text{diag}\{s^{q_i}\}] & I_r \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] T(s) =$$

$$\stackrel{(5.107)}{=} \delta_M(T(s)) \stackrel{(\text{Προτ. } 2.40)}{=} \delta_M \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & u \\ \hline -\gamma & 0 \end{array} \right] \quad (9.131)$$

(β) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο πίνακας  $\mathcal{R}(s)$  είναι αυστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} sI & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -I & sI & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & sI & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{2\tilde{r}+m} \end{bmatrix} \quad (9.132)$$

ο οποίος δεν περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και άρα και ο πίνακας  $\mathcal{R}(s)$  δεν θα περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$  λόγω του ότι η αυστηρή ισοδυναμία διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή πινάκων στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Οι McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας ισχύουν στον πίνακα  $\mathcal{R}(s)$  λόγω του ότι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα.

Συμπέρασμα των (α) και (β) είναι ότι ο μετασχηματισμός (9.128) ικανοποιεί τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (3.50α,β,γ) και άρα είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Άρα τα συστήματα (9.42) και (9.125) είναι πλήρως ισοδύναμα.  $\square$

**Παράδειγμα 9.49** Θεωρείστε τον πίνακα Rosenbrock των παραδειγμάτων 9.31 και 9.47.

$$P(s) := \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 \\ 2s-5 & 3s+2 \end{bmatrix} \quad (E.1)$$

ή ισοδύναμα τον κανονικό πίνακα του συστήματος

$$\mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\mathcal{V} & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (E.2)$$

όπου

$$T(s) = \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Ο πίνακας  $T(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$T(s) = I_3^{-1} T(s) =: Q(s)^{-1} R(s) \quad (\text{E.4})$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$[I_3 \ T(s)] \quad (\text{E.5})$$

είναι κανονικός κατά γραμμές, οπότε δεν χρειάζεται η εύρεση ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $U(s)$  όπως αναφέραμε παραπάνω. Έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} [I_3 \ T(s)] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2s-5 & 3s+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s^2 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{[Q_0 \ R_0]} + \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[Q_1 \ R_1]} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & s^{-2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[Q_2 \ R_2]} \quad (\text{E.6}) \end{aligned}$$

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$sE-A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} sI_3 & 0 & Q_2 & R_2 \\ -I_3 & sI_3 & Q_1 & R_1 \\ 0 & -I_3 & Q_0 & R_0 \\ \hline 0 & 0 & -I_3 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.7})$$

Εαν αφαιρέσουμε από τον πίνακα  $sE-A$  τις γραμμές και τις αντίστοιχες στήλες που αντιστοιχούν σε αρνητικές δυνάμεις στην σχέση (E.6) θα πάρουμε τον πίνακα



$$= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 0_{36} & I_3 & 0 & 0 \\ \hline 0_{16} & 0_{16} & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{E.10})$$

Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκατάστασης του συστήματος (E.9) θα είναι ίση με

$$\lambda_z = 2\tilde{r} + \delta_M(T) = 2 \times 3 + (2+1) = 9 \quad (\text{E.11}) \quad \square$$

### 9.3.2δ Ισοδύναμο μοντέλο Tan & Vandewall (1988)

Θεωρείστε την Π.Π.Σ. (9.41) της οποίας η κανονική μορφή είναι η (9.42). Ο πίνακας  $T(s)$  στην σχέση (9.42α) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$T(s) = T(s) \Gamma^{-1} = (T(s)U(s)) (U(s))^{-1} \quad (\text{9.133})$$

όπου  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$ ,  $\tilde{r} = r+p+m$ , είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} Q(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ T(s)U(s) \end{bmatrix} \quad (\text{9.134})$$

να είναι κανονικός κατά στήλες. Προφανώς οι πίνακες  $Q(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  και  $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  αποτελούν επίσης μια δεξιά πρώτη πολυωνυμική κλασματική έκφραση του  $T(s)$  εφόσον η πράξη (9.133) είναι μια πράξη αντιστρέψιμης ισοδυναμίας που διατηρεί την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$ . Ο πίνακας  $[Q(s)^T \ R(s)^T]^T$  εκτός από πεπερασμένα μηδενικά δεν θα περιέχει και μηδενικά στο  $s = \infty$  λόγω του ότι είναι κανονικός κατά στήλες (δες λήμμα 5.31). Επίσης εάν

$$S_{[Q(s)^T \ R(s)^T]^T}^{\infty}(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}[s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_{\tilde{r}}}] \\ 0_{\tilde{r} \times \tilde{r}} \end{bmatrix} \quad (\text{9.135})$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$S^T(s) = \begin{bmatrix} s^{q_1} & s^{q_1-1} & \dots & s & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s^{q_2} & s^{q_2-1} & \dots & s & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s^{q_r} & s^{q_r-1} & \dots & s & 1 \end{bmatrix} \quad (9.136)$$

και γράφουμε τους πίνακες  $Q(s)$  και  $R(s)$  ως εξής

$$\begin{aligned} Q(s) &= Q_c S(s) \\ R(s) &= R_c S(s) \end{aligned} \quad (9.137)$$

όπου  $Q_c$  και  $R_c$  είναι σταθεροί πίνακες. Ακολούθως σχηματίζουμε μια στοιχειώδη πραγμάτωση (core realization) της μορφής

$$E_c s - A_c = \text{block diag}\{E_{c1} s - A_{c1}, E_{c2} s - A_{c2}, \dots, E_{c\tilde{r}} s - A_{c\tilde{r}}\} \quad (9.138)$$

όπου

$$E_{ci} s - A_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & s & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(q_i+1) \times (q_i+1)} \quad (9.139)$$

και

$$B_c^T = \text{block diag}[B_1, B_2, \dots, B_{\tilde{r}}] \quad B_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times (q_i+1)} \quad (9.140)$$

$$C_c = I_n, \quad n = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} q_i + \tilde{r} \quad (9.141)$$

Τελικά ορίζουμε την παρακάτω πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$E = E_c, \quad A = A_c + B_c Q_c, \quad B = B_c, \quad C = R_c C_c = R_c \quad (9.142)$$

Θεωρείστε τον πίνακα Rosenbrock μιας Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων



$$P_R(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} sE-A & B & 0 \\ -C & 0 & U \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \quad (9.143)$$

όπου το διάνυσμα της ψευδοκατάστασης  $x(t)$  του συστήματος (9.143) θα έχει διάσταση ίση με (δες σχέση (5.124))

$$\lambda_{tv} = \tilde{r} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} (q_i+1) \stackrel{(5.100)}{=} 2\tilde{r} + \delta_M(T) \quad (9.144)$$

**Θεώρημα 9.50** Η Π.Π.Σ. (9.42) και η Π.Π.Σ. με πίνακα Rosenbrock της μορφής (9.143) είναι πλήρως ισοδύναμες.

**Απόδειξη** Θεωρήστε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ I_{\tilde{r}} & 0 & \\ \hline 0 & -I_p & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & U \\ \hline -\gamma & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} sE-A & B & 0 \\ -C & 0 & U \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} -S(s)Q(s)^{-1} & 0 \\ I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.145)$$

ή ισοδύναμα

$$\left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & sE-A & B & 0 \\ I_{\tilde{r}} & 0 & -C & 0 & U \\ \hline 0 & I_p & 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} T(s) & U \\ \hline -\gamma & 0 \\ S(s)Q(s)^{-1} & 0 \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & -I_m \end{array} \right] = 0 \quad (9.146)$$

(α) Ο σύνθετος πίνακας

$$M(s) = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & sE-A & B & 0 \\ I_{\tilde{r}} & 0 & -C & 0 & U \\ \hline 0 & I_p & 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \quad (9.147)$$

είναι ανστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & sE_c - A_c & B_c & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & sE - A & B & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 & -C & 0 & U \\ 0 & I_p & 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccccc} I & 0 & R_c & 0 & -U \\ 0 & I & \gamma Q_c & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_c & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \quad (9.148)$$

ο οποίος είναι φανερό από την δομή του (δες (9.139) και (9.140)) ότι δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathbb{C} \setminus \{\infty\}$ . Οι McMillan συνθήκες επίσης ισχύουν λόγω του ότι οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα (Πρόταση 2.40).

(β) Ο σύνθετος πίνακας

$$N(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\frac{-\gamma}{S(s)Q(s)^{-1}} - \frac{0}{0} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.149)$$

είναι ανστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cc} T(s) & 0 \\ -\frac{0}{S(s)Q(s)^{-1}} - \frac{0}{0} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & I_m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc} I & 0 & 0 & 0 & U \\ 0 & I & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} T(s) & U \\ -\frac{-\gamma}{S(s)Q(s)^{-1}} - \frac{0}{0} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.150)$$

Από την απόδειξη του (β) μέρους του θεωρήματος 5.37 μπορούμε τώρα να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας της σχέσης (9.150) ή ισοδύναμα ο σύνθετος πίνακας  $N(s)$  ικανοποιεί τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας.

Από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός (9.145) ικανοποιεί τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας και συνεπώς είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός που συνδέει τα συστήματα (9.42) και (9.143).  $\square$

**Παράδειγμα 9.51** Θεωρείστε τον κανονικό πίνακα του συστήματος στα παραδείγματα 9.31, 9.47 και 9.49

$$\mathcal{P}(s) = \left[ \begin{array}{cc|ccc} T(s) & U & & & \\ \hline -\gamma & 0 & & & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.1})$$

όπου

$$T(s) = \left[ \begin{array}{ccc} s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.2})$$

Ο πίνακας  $T(s)$  γράφεται ισοδύναμα ως

$$T(s) = T(s) I_3^{-1} =: R(s) Q(s)^{-1} \quad (\text{E.3})$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$\left[ \begin{array}{c} I_3 \\ T(s) \end{array} \right] \quad (\text{E.4})$$

είναι κανονικός κατά στήλες, οπότε δεν χρειάζεται η εύρεση ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $U(s)$  όπως αναφέραμε παραπάνω. Εστω τώρα

$$S(s)^T = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} s^2 & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & s & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad (\text{E.5})$$

Οι πίνακες  $R(s)$  και  $Q(s)$  γράφονται πιο αναλυτικά ως εξής

$$R(s) = (=T(s)) = R_c S(s) = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] S(s) \quad (\text{E.6})$$

και

$$Q(s) = (=I_3) = Q_c S(s) = \left[ \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] S(s) \quad (\text{E.7})$$

Ορίζουμε τώρα την στοιχειώδη πραγμάτωση

$$sE_c - A_c = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & & \\ -1 & s & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & s & & \\ \hline & & & 0 & 0 \\ & & & -1 & s \\ & 0 & & & 0 \end{array} \right]; \quad B_c = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & \\ \hline 0 & 1 \\ & 0 \\ & 1 \end{array} \right]; \quad C_c = I_6 \quad (\text{E.8})$$

από την οποία παίρνουμε βάσει της σχέσης (9.142)

$$sE - A = sE_c - A_c - B_c Q_c = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & -1 & & \\ -1 & s & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & s & & \\ \hline & & & 0 & -1 \\ & & & -1 & s \\ & 0 & & & -1 \end{array} \right] \quad (\text{E.9})$$

και

$$B = B_c = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & \\ \hline 0 & 1 \\ & 0 \\ & 1 \end{array} \right]; \quad C = R_c C_c = R_c = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.10})$$

Άρα το σύστημα που ορίζεται από τον πίνακα Rosenbrock

$$P_R(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} sE - A & B & 0 \\ -C & 0 & u \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.11})$$

θα είναι πλήρως ισοδύναμο του συστήματος που ορίζεται από τον πίνακα Rosenbrock (E.1).

Ο πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός που θα συνδέει τα δύο συστήματα είναι ο εξής

$$\begin{aligned}
 \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & -I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & U \\ \hline -\gamma & 0 \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c|c|c} sE-A & B & 0 \\ \hline -C & 0 & U \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c} -S(s)Q(s)^{-1} & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & -I_m \end{array} \right] \Leftrightarrow \\
 \left[ \begin{array}{c|c} 0_{63} & 0_{61} \\ \hline I_3 & 0_{31} \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c|c} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & 0 \\ \hline 2s-5 & 3s+2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] &= \\
 = \left[ \begin{array}{cccccccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & -6 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} -s^2 & 0 & 0 & 0 \\ -s & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (E.12)
 \end{aligned}$$

Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκαταστάσεως του καινούργιου συστήματος θα είναι

$$\lambda_{tv} = 2\tilde{r} + \delta_M(T) = 2 \times 3 + 3 = 9 \quad (E.13) \quad \square$$

### 9.3.2ε Ισοδύναμο μοντέλο A.I. Vardulakis (1991).

Θεωρείστε την Π.Π.Σ. (9.41) της οποίας η καινουργική μορφή είναι η (9.42). Εστω επίσης

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.151\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (9.151\beta)$$

$E \in \mathbb{R}^{\lambda_{av} \times \lambda_{av}}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{\lambda_{av} \times \lambda_{av}}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{\lambda_{av} \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times \lambda_{av}}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $\lambda \in \mathbb{I}^+$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση του πίνακα  $T(s)^{-1}$ . Θεωρείστε την Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.152a)$$

$$y(t) = \nu Cx(t) + \nu Du(t) \quad (9.152\beta)$$

Τότε θα έχουμε

**Θεώρημα 9.52** Η Π.Π.Σ. (9.42) και η Π.Π.Σ. (9.152) είναι πλήρως ισοδύναμες.

**Απόδειξη** Στην συνέχεια και πιο συγκεκριμένα στην ενότητα 9.3.3 θα αποδείξουμε βάσει ενός πολύ χρήσιμου θεωρήματος ότι τα συστήματα (9.42) και (9.152) είναι πλήρως ισοδύναμα και συνδέονται διαμέσου των πλήρως ισοδύναμων μετασχηματισμών

$$\begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & BU \\ -\nu C & \nu Du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -DU \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.153)$$

και

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ \nu D & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\nu & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE-A & BU \\ -\nu C & \nu Du \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sE-A)^{-1}BT(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.154) \quad \square$$

**Σημείωση 9.53** Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκατάστασης  $x(t)$  της ελάχιστης Π.Π.Σ. (9.151) και συνεπώς και της Π.Π.Σ. (9.152) θα είναι από θεώρημα 5.14 ίση με

$$\begin{aligned} \lambda_{av} &= \nu(T(s)^{-1}) + \sum_{i=1}^{r+p+m-k} (q_i(T^{-1})+1) \stackrel{\text{θεωρ 2.34}}{=} \\ &= \deg T(s) + \sum_{i=k+1}^{r+p+m} (\hat{q}_i(T)+1) \\ &\stackrel{(2.69)}{=} \delta_M(T(s)) + r + p + m - k \end{aligned} \quad (9.155)$$

όπου

$$S_{T(s)}^{\omega}(s) = \text{diag} \left[ s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_v}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-v}, \frac{1}{s^{q_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{q_{r+p+m}}} \right] \quad (9.156)$$

και από θεώρημα 2.34

$$S_{T(s)}^{-1}(s) = \text{diag} [s^{\hat{q}_{r+p+m}}, s^{\hat{q}_{r+p+m-1}}, \dots, s^{\hat{q}_{k+1}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-v}, \frac{1}{s^{q_v}}, \dots, \frac{1}{s^{q_1}}] \quad (9.157)$$

με  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_v > 0$  και  $\hat{q}_{r+p+m} \geq \hat{q}_{r+p+m-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} > 0$  αντίστοιχα τις τάξεις των αυστηρά θετικών πόλων και των μηδενικών του  $T(s)$  στο  $s=\infty$ .  $\square$

Το πρόβλημα λοιπόν της αναγωγής μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. ανάγεται στην εύρεση μιας ελάχιστης πραγμάτωσης του πίνακα  $T(s)^{-1}$ . Μια λύση στο πρόβλημα αυτό έδωσε ο A.I.Vardulakis και η οποία παρουσιάζεται στον επόμενο αλγόριθμο

#### Αλγόριθμος 9.54 (A.I.Vardulakis 1991)

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Υπολόγισε τον  $T(s)^{-1}$ .

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Υπολόγισε  $H_{\text{pol}}(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  και  $H_{\text{spr}}(s) \in \mathbb{R}_{\text{spr}}(s)^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  :

$$T(s)^{-1} = H_{\text{spr}}(s) + H_{\text{pol}}(s) \quad (9.158)$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Υπολόγισε μια ελάχιστη πραγμάτωση  $\{C_s \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times n}, J_s \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_s \in \mathbb{R}^{n \times \tilde{r}}\}$  του  $H_{\text{spr}}(s)$  και μια ελάχιστη πραγμάτωση  $\{C_\infty \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \mu}, J_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}, B_\infty \in \mathbb{R}^{\mu \times \tilde{r}}, D_\infty \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$  του  $H_{\text{pol}}(s)$ .

**Βήμα 4<sup>ο</sup>** Οι πίνακες που αναζητούμε θα είναι οι εξής

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -J_\infty \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times (n+\mu)} ; A = \begin{bmatrix} J_s & 0 \\ 0 & -I_\mu \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times (n+\mu)} \quad (9.159)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_s \\ B_\infty \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+\mu) \times m} ; C = (C_s \ C_\infty) \in \mathbb{R}^{p \times (n+\mu)} \quad \square$$

Ένα βασικό παρ'όλα αυτά μειονέκτημα είναι ότι η κατασκευή του βήματος 3 στον παραπάνω αλγόριθμο είναι πρακτικά δύσκολο να εφαρμοστεί. Για τον σκοπό αυτό προτείνουμε τους τρεις παρακάτω αλγόριθμους εύρεσης μιας ελάχιστης πραγμάτωσης του πίνακα  $T(s)^{-1}$ .

### Αλγόριθμος 9.55

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Υπολόγισε την Laurent ανάπτυξη του πίνακα  $T(s)^{-1}$  (Fragulis et al. 1991).

$$T(s)^{-1} = H_{\hat{q}_{r+p+m}} s^{\hat{q}_{r+p+m}} + \dots + H_1 s + H_0 + H_{-1} \frac{1}{s} + \dots \quad (9.160)$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Υπολόγισε μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση στο γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)^{-1}$  βάσει των πινάκων  $H_i$  της Laurent ανάπτυξης του  $T(s)^{-1}$  (δες (5.86)).

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Απαλοιφή των μη δυναμικών μεταβλητών της ισχυράς μη αναγώγιμης πραγμάτωσης (Verghese 1978). □

### Αλγόριθμος 9.56

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Υπολόγισε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{T} \times \tilde{T}}$  τέτοιον ώστε ο πίνακας

$$[Q(s) \ R(s)] = U(s) [T(s) \ I_{\tilde{T}}] \quad (9.161)$$

να είναι κανονικός κατά γραμμές.

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Υπολόγισε μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση στο γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)^{-1}$  της μορφής (5.98) βάσει του αλγορίθμου που εφαρμόζεται στο κεφάλαιο 5.3.3.

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Απαλοιφή των μη δυναμικών μεταβλητών της ισχυράς μη αναγώγιμης πραγμάτωσης (Verghese 1978). □



### Αλγόριθμος 9.57

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Υπολόγισε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $U(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  τέτοιον ώστε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} Q(s) \\ R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) \\ I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} U(s) \quad (9.162)$$

να είναι καινουργός κατά στήλες.

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Υπολόγισε μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση στο γενικευμένο χώρο των καταστάσεων του  $T(s)^{-1}$  της μορφής (5.123) βάσει του αλγορίθμου που εφαρμόζεται στο κεφάλαιο 5.3.4.

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Απαλοιφή των μη δυναμικών μεταβλητών της ισχυράς μη αναγώγιμης πραγμάτωσης (Verghese 1978).  $\square$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι το βήμα (3) στους αλγορίθμους 9.55, 9.56, 9.57 θα μπορούσε να παραληφθεί δίνοντας μας μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων με διάσταση του διανύσματος ψευδοκατάστασης μεγαλύτερης κατά  $k-v = \{\text{το πλήθος των πόλων (ή ισοδύναμα μηδενικών) του } T(s) \text{ στο } s=\infty \text{ μηδενικής τάξης}\}$ ,  $\tilde{r}+k$  και  $\tilde{r}+k$  ( $k$  το πλήθος των πόλων  $q_1(T) \geq 0$  στο  $s=\infty$  του  $T(s)$ ) αντίστοιχα.  $\square$

**Παράδειγμα 9.58** Θεωρείστε τον ίδιο Rosenbrock πίνακα με εκείνον του παραδείγματος 9.31. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} T^{-1}(s) &= \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+5s+6} & 0 & \frac{s+1}{s^2+5s+6} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{5-2s}{s^2+5s+6} & 1 & \frac{3s^3+15s^2+31s+17}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+5s+6} & 0 & \frac{s+1}{s^2+5s+6} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{5-2s}{s^2+5s+6} & 0 & \frac{13s+17}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3s \end{bmatrix} = H_{\text{spr}}(s) + H_{\text{pol}}(s) \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

Εστω επίσης

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση του αυστηρά καινικού πίνακα  $H_{\text{spr}}(s)$  και

$$C_{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad J_{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση του πολυωνυμικού πίνακα  $H_{\text{pol}}(s)$ . Τότε

$$C = [\tilde{C}, C_{\omega}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 9 & 11 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I_{\lambda_{\text{av}}} & 0 \\ 0 & -J_{\omega} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{J} & 0 \\ 0 & -I_{\mu} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -0 & -0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -\tilde{B} \\ B_{\omega} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{E.4})$$

είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση του πίνακα  $T(s)^{-1}$  και η Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$\mathcal{P}_R(s) = \begin{bmatrix} sE - A & BU \\ -\gamma C & \gamma D U \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cccc|c} s+2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & s+3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -s & 1 \\ -0 & -0 & 0 & 1 & 1 \\ -9 & -11 & -3 & 3 & -0 \end{array} \right] \quad (\text{E.5})$$

όπου

$$-\gamma C = (0 \ 0 \ -1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 9 & 11 & 3 & -3 \end{bmatrix} = (-9 \ -11 \ -3 \ 3) \quad (\text{E.6})$$

και

$$BU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

είναι μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της Π.Π.Σ. (E.2) του παραδείγματος 9.47. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει ο πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός μεταξύ των  $\mathcal{P}(s)$  και  $\mathcal{P}_R(s)$  της μορφής

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ \nu D & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & u \\ -\nu & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE-A & Bu \\ -\nu C & \nu Du \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sE-A)^{-1}BT(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (\text{E.8})$$

Εαν λάβουμε υπόψη μας ότι

$$\begin{aligned} (sE-A)^{-1}BT(s) &= \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{0} & -\frac{0}{1/3} & -\frac{2}{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s+3 & 1 & 0 \\ -s-2 & -1 & 0 \\ (2s-5)/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.9}) \end{aligned}$$

θα έχουμε ότι ο πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός (E.8) είναι ο εξής

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s+1 & 0 & | & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & s+3 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -s & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ -\frac{0}{-9} & -\frac{0}{-11} & -\frac{0}{-3} & -\frac{1}{3} & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 & 0 & | & 0 \\ -s-2 & -1 & 0 & | & 0 \\ (2s-5)/3 & -1/3 & 1/3 & | & 0 \\ -\frac{0}{0} & -\frac{-1}{0} & -\frac{0}{0} & | & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.10}) \end{aligned}$$

Η διάσταση του διανύσματος ψευδοκατάστασης  $x(t)$  της Π.Π.Σ. (E.5) θα είναι

$$\lambda_{av} = \sum_{i=1}^2 q_i(T(s)) + r + p + m - k = (2+1) + 1 + 1 + 1 - 2 = 4 \quad (\text{E.11})$$

όπου  $k$  είναι το πλήθος των αυστηρά θετικών πόλων του  $T(s)$  στο  $s=\infty$  ( $q_i(T(s)) > 0$ ).  $\square$

### 9.3.2στ Σύγκριση πλήρως ισοδύναμων συστημάτων.

Στις ενότητες 9.3.2α–9.3.2ε παρουσιάσαμε τρόπους αναγωγής μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι τα μοντέλα της μορφής Zhang και Tan & Vandewalle δεν υπάρχουν στην βιβλιογραφία, όπως επίσης δεν υπάρχουν και πολλές τροποποιήσεις που έχουμε κάνει στα υπόλοιπα μοντέλα. Ο λόγος για τον οποίο τα αποκαλούμε με αυτήν την ονομασία είναι διότι βασίζονται σε τροποποιήσεις μοντέλων των συγκεκριμένων ερευνητών. Αν θέλαμε να συνοψίσουμε τον τρόπο κατασκευής πλήρως ισοδύναμων Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων θα δίναμε τους παρακάτω δύο αλγόριθμους :

#### Αλγόριθμος 9.59

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Δεδομένα :  $[A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m}, C(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r}, D(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}]$  ή ισοδύναμα  $[T(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}, u \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times m}, -v \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{r}}], \tilde{r} = r + p + m.$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Κατασκευάστε μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση (ή ελάχιστη)  $\{A_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}, B_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times \tilde{r}}, C_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times q}, D_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$  του πίνακα  $T(s)$  τέτοια ώστε οι πίνακες  $A_0(s), B_0(s), C_0(s), D_0(s)$  να είναι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί.

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Ο Rosenbrok πίνακας της πλήρους ισοδύναμους Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων θα είναι ο εξής

$$P_R(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_0(s) & B_0(s) & 0 \\ -C_0(s) & D_0(s) & u \\ \hline 0 & -v & 0 \end{array} \right] \quad (9.163) \quad \square$$

#### Αλγόριθμος 9.60 (A.I. Vardoulakis 1991)

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Δεδομένα :  $[A(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times r}, B(s) \in \mathbb{R}[s]^{r \times m}, C(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r}, D(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}]$  ή ισοδύναμα  $[T(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}, u \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times m}, -v \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{r}}], \tilde{r} = r + p + m.$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Κατασκευάστε μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση (ή ελάχιστη)

$$\{A_0(s)=sE-A \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}, B_0 \in \mathbb{R}^{q \times \tilde{r}}, C_0 \in \mathbb{R}^{\tilde{r} \times q}, D_0 \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\} \text{ του πίνακα } T(s)^{-1}.$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Ο Rosenbrock πίνακας της πλήρης ισοδύναμους Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων θα είναι ο εξής

$$P_R(s) = \begin{bmatrix} sE-A & | & B_0 \mathcal{U} \\ \hline -\mathcal{V} C_0 & | & -\mathcal{V} D_0 \mathcal{U} \end{bmatrix} \quad (9.164) \quad \square$$

Οι παραπάνω Π.Π.Σ. όπως θα δείξουμε στην συνέχεια είναι πλήρως ισοδύναμες με την Π.Π.Σ. (9.42). Ένα ερώτημα που γεννιέται είναι πια από τις πλήρως ισοδύναμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες έχει το διάνυσμα ψευδοκατάστασης με την μικρότερη διάσταση; Το ερώτημα αυτό ερχόμαστε να απαντήσουμε στην συνέχεια. Εστω λοιπόν

$$S_{T(s)}^{\infty}(s) = \text{diag} [s^{q_1}, s^{q_2}, \dots, s^{q_v}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k-v}, \frac{1}{s^{\hat{q}_{k+1}}}, \dots, \frac{1}{s^{\hat{q}_{r+p+m}}} ] \quad (9.165)$$

με  $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_v > 0$  και  $\hat{q}_{r+p+m} \geq \hat{q}_{r-1} \geq \dots \geq \hat{q}_{k+1} > 0$  αντίστοιχα τις τάξεις των ανστηρά θετικών πόλων και μηδενικών του  $T(s)$  στο  $s=\infty$  και

$$S_{T(s)}^{\mathcal{C}}(s) = \text{block diag} \left[ \underbrace{1, 1, \dots, 1}_d, \varepsilon_1(s), \varepsilon_2(s), \dots, \varepsilon_{r+p+m-d}(s) \right] \quad (9.166)$$

όπου  $\varepsilon_i(s) \setminus \varepsilon_{i+1}(s)$   $i=1, 2, \dots, r+p+m-d-1$ , και  $\deg \varepsilon_i(s) = n_i$ ,  $i=1, 2, \dots, r+p+m-d$ . Τότε θα έχουμε

**Μοντέλο Verghese (1978).**

$$\lambda_v = r + p + m + \delta_M(T) + k$$

**Μοντέλο Bosgra & Van Der Weiden (1981).**

Μοντέλο 1 (δες 9.63)

$$\lambda_{bvw} = r + p + m + \delta_M(T) - v$$

Μοντέλο 2 (δες 9.110)

$$\lambda'_{bvw} = r + p + m + \delta_M(T)$$

Μοντέλο 3 (δες 9.114)

$$\lambda'_{b'vw} = r + p + m + \delta_M(T) + k$$

**Μοντέλο Zhang (1989).**

$$\lambda_z = 2(r+p+m) + \delta_M(T)$$

**Μοντέλο Tan & Vandewalle (1988).**

$$\lambda_{tv} = 2(r+p+m) + \delta_M(T)$$

**Μοντέλο A.I.Vardulakis (1991).**

$$\lambda_{av} = r + p + m + \delta_M(T(s)) - k$$

Είναι φανερό από τα παραπάνω ότι το μοντέλο το οποίο προτάθηκε από τον A.I.Vardulakis (1991) είναι αυτό με την μικρότερη διάσταση. Είναι όμως αυτή η ελάχιστη διάσταση που μπορώ να έχω σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. της γενικής Π.Π.Σ. (9.42). Η απάντηση είναι θετική. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ο εξής :

Εστω μια Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$P_R(s) = \left[ \begin{array}{c|c} sE-A & B \\ \hline -C & D \end{array} \right] \quad (9.167)$$

η οποία είναι πλήρως ισοδύναμη με την Π.Π.Σ. (9.42). Η Π.Π.Σ. (9.166) θα πρέπει, λόγω της ιδιότητας της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων, να έχει τους ίδιους πόλους συστήματος στο  $\mathbb{C}\{s\}$  με την Π.Π.Σ. (9.42) ή ισοδύναμα η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  των  $sE-A$  και  $T(s)$  θα πρέπει να είναι οι ίδιες. Εάν αντί του πίνακα  $sE-A$  πάρουμε την αυστηρά ισοδύναμη Kronecker μορφή του (δες 2.84) η παραπάνω συνθήκη μας δίνει ότι η διάσταση  $\lambda$  του διανύσματος ψευδοκατάστασης  $x(t)$  της Π.Π.Σ. (9.167) θα πρέπει να ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα :

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \sum_{i=1}^{r+p+m-d} n_i(T) + \sum_{i=k+1}^{r+p+m} (\hat{q}_i(T)+1) \quad (2.69) \\ &= r + p + m + \delta_M(T) - k \end{aligned} \quad (9.168)$$

και συνεπώς η ελάχιστη διάσταση της ψευδοκατάστασης  $x(t)$  θα είναι

$$\lambda_{\epsilon\lambda} = r + p + m + \delta_M(T) - k = \lambda_{av} \quad (9.169)$$

που αποδεικνύει ότι το μοντέλο του A.I.Vardulakis (1991) είναι μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της γενικής Π.Π.Σ. (9.42), η οποία έχει και την ελάχιστη διάσταση που μπορεί να έχει μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.

### 9.3.3 Αριστερές και δεξιές κλασματικές Π.Π.Σ. και πλήρης ισοδυναμία συστημάτων.

Στην ενότητα 9.2 και πιο συγκεκριμένα στο θεώρημα 9.12 παρατηρήσαμε ότι ο μετασχηματισμός της γενικευμένης αυστηρής ισοδυναμίας παίρνει την ειδική μορφή της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας στο σύνολο των αριστερών ή δεξιά κλασματικών Π.Π.Σ.. Το συμπέρασμα αυτό είναι πολύ ικανοποιητικό όταν ενδιαφερόμαστε για την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}$  αριστερά ή δεξιά κλασματικών Π.Π.Σ.. Είναι όμως ο μετασχηματισμός της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας επαρκής ώστε να διατηρήσει και την μηδενική δομή στο  $s=\infty$  αριστερά ή δεξιά κλασματικών Π.Π.Σ. ; Όπως βλέπουμε στο παρακάτω παράδειγμα η απάντηση είναι αρνητική.

**Παράδειγμα 9.61** Θεωρείστε τις δύο παρακάτω αριστερές κλασματικές Π.Π.Σ.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\rho E_1 - A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1} u(t) \quad (\text{E.1})$$

και

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\rho E_2 - A_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} u(t) \quad (\text{E.2})$$

Είναι προφανές ότι οι δύο παραπάνω αριστερές κλασματικές Π.Π.Σ. συνδέονται με την παρακάτω αντιστρέψιμη ισοδυναμία :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \rho & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.3})$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύστημα (E.1) περιέχει μηδενική δομή στο  $s=\infty$  σε αντίθεση με το σύστημα (E.2) που δεν έχει μηδενική δομή στο  $s=\infty$  και συνεπώς η δομή των



(E.1) και (E.2) στο  $s=\infty$  είναι διαφορετικές. Άρα η αντιστρέψιμη ισοδυναμία δεν διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή των δύο συστημάτων στο  $s=\infty$ .  $\square$

Το παράδειγμα 9.61 έρχεται να επισημάνει την αδυναμία της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας να διατηρήσει την μηδενική δομή στο  $s=\infty$  αριστερών και δεξιών κλασματικών Π.Π.Σ.. Την λύση στο πρόβλημα αυτό ερχόμαστε να δώσουμε με τους δύο παρακάτω ορισμούς. Εστω  $L$  και  $R$  τα σύνολα των αριστερών και δεξιών κλασματικών Π.Π.Σ. αντίστοιχα που έχουν οριστεί στις σχέσεις (9.12) και (9.13).

**Ορισμός 9.62** (Karampetakis) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in R \times R$

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_{Ri}(s) & I_m \\ -B_{Ri}(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} \in R \quad i=1,2 \quad (9.170)$$

Τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα ονομάζονται *πλήρως αντιστρέψιμα ισοδύναμοι* (fully unimodular equivalent) εάν και μόνο εάν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πολυωνυμικός πίνακας  $T_R(s) \in R[s]^{m \times m}$  τέτοιος ώστε

$$\begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R1}(s) & I_m \\ -B_{R1}(s) & 0_{p,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_R(s) & 0_{m,m} \\ 0_{m,m} & I_m \end{bmatrix} \quad (9.171)$$

όπου οι παρακάτω δύο συνθήκες ικανοποιούνται :

(α) ο σύνθετος πίνακας

$$\begin{bmatrix} A_{R2}(s) \\ B_{R2}(s) \\ T_R(s) \end{bmatrix} \quad (9.172\alpha)$$

δεν περιέχει μηδενικά στο  $s=\infty$ .

(β) Η παρακάτω McMillan συνθήκη ικανοποιείται

$$\delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) \\ B_{R2}(s) \\ T_R(s) \end{bmatrix} = \delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) \\ B_{R2}(s) \end{bmatrix} \quad (9.172\beta) \quad \square$$

**Ορισμός 9.63** (Karampetakis) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in L \times L$

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_{Li}(s) & B_{Li}(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} \in L \quad i=1,2 \quad (9.173)$$

Τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  θα ονομάζονται **πλήρως αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι** (*fully unimodular equivalent*) εαν και μόνο εαν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πολυωνυμικός πίνακας  $T_L(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times p}$  τέτοιως ώστε

$$\begin{bmatrix} A_{L2}(s) & B_{L2}(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_L(s) & 0_{p,p} \\ 0_{p,p} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{L1}(s) & B_{L1}(s) \\ -I_p & 0_{p,m} \end{bmatrix} \quad (9.174)$$

όπου οι παρακάτω δύο συνθήκες ικανοποιούνται :

(α) ο σύνθετος πίνακας

$$(A_{L2}(s) \ B_{L2}(s) \ T_L(s)) \quad (9.175\alpha)$$

δεν περιέχει μηδενικά στο  $s=\infty$ .

(β) Η παρακάτω McMillan συνθήκη ικανοποιείται

$$\delta_M(A_{L2}(s) \ B_{L2}(s) \ T_L(s)) = \delta_M(A_{L1}(s) \ B_{L1}(s)) \quad (9.175\beta) \quad \square$$

Όπως αναφέραμε στο θεώρημα 9.23 η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας, έστω  $\Gamma_{FSE}$ , στο σύνολο  $P(p,m)$  των  $(r+p) \times (r+m)$  Rosenbrock πινάκων γενικών Π.Π.Σ.. Εαν  $(P_1(s), P_2(s)) \in L \times L$  ( $(P_1(s), P_2(s)) \in R \times R$ ) είναι πλήρως αντιστρέψιμοι ισοδύναμοι θα γράφουμε ότι  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FUE} \subset L \times L$  ( $\subset R \times R$ ). Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων ταυτίζεται με την πλήρως αντιστρέψιμη ισοδυναμία στην ειδική περίπτωση των δεξιά και αριστερά κλασματικών Π.Π.Σ.

$$\Gamma_{FSE} \equiv \Gamma_{FUE} \quad (\text{στο } L \times L \text{ ή } R \times R) \quad (9.176)$$

και συνεπώς η πλήρως αντιστρέψιμη ισοδυναμία ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας στο σύνολο  $L \times L$  ( $R \times R$ ).

**Θεώρημα 9.64** Εστω

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_{Ri}(s) & I_m \\ -B_{Ri}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \in R, \quad i=1,2 \quad (9.177)$$

Τότε

$$(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FUE} \Leftrightarrow (P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FSE} \quad (9.178)$$

**Απόδειξη** Πρώτα θα δείξουμε ότι

$$(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FUE} \Rightarrow (P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FSE} \quad (9.179)$$

Από τον ορισμό της πλήρους αντιστρέψιμης ισοδυναμίας το γεγονός ότι  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FUE}$  έχει ως αποτέλεσμα ότι οι σχέσεις (9.171, 9.172α,β) ικανοποιούνται και συνεπώς έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} I_m & 0_{mp} \\ 0_{pm} & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R1}(s) & I_m \\ -B_{R1}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_R(s) & 0_{mm} \\ 0_{mm} & I_m \end{bmatrix} \quad (9.180)$$

Ορίζουμε τους παρακάτω σύνθετους πίνακες

$$\hat{R} = \left[ \begin{array}{cc|cc} I_m & 0_{mp} & A_{R1}(s) & I_m \\ 0_{pm} & I_p & -B_{R1}(s) & 0_{pm} \end{array} \right] \quad \text{και} \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -T_R(s) & 0_{mm} \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.181)$$

- (α) Ο πίνακας  $\hat{R}$  έχει πλήρη τάξη για κάθε  $s \in \mathbb{C}$  λόγω του ότι εμπεριέχει τον μοναδιαίο πίνακα  $I_{p+m}$ . Ο πίνακας  $\hat{R}$  δεν περιέχει επίσης μηδενικά στο  $s = \infty$  διότι μπορούμε να επεκτείνουμε τον υποπίνακα του, ο οποίος έχει την ορίζουσα με τον μεγαλύτερο βαθμό ( $\delta_M(\hat{R})$ ), με μονάδες έτσι ώστε να πάρουμε έναν  $(m+p) \times (m+p)$  υποπίνακα

του με τον ίδιο βαθμό ( $\delta_M(\hat{R})$ ), πρδ. μια συνθήκη που εγγυάται την απουσία μηδενικών στο  $s=\infty$  ενός πολυωνυμικού πίνακα (Hayton 1988). Ο πίνακας  $\hat{R}$  ικανοποιεί επίσης τις McMillan συνθήκες (3.50γ) λόγω του ότι οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα.

(β) Ο πίνακας  $\hat{L}$  έχει πλήρη τάξη για κάθε σεC λόγω του ότι εμπεριέχει τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$\begin{bmatrix} -T_R(s) & 0_{mm} \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.182)$$

ο οποίος έχει πλήρη τάξη για κάθε σεC. Ο πίνακας  $\hat{L}$  συνδέεται μέσω του παρακάτω αυστηρά ισοδύναμου μετασχηματισμού με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} A_{R2}(s) & 0_{mm} \\ B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -T_R(s) & -\bar{0}_{mm} \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0_{mp} & 0_{mm} & I_m \\ 0_{pm} & -I_p & 0_{pm} & 0_{pm} \\ 0_{mm} & 0_{mp} & -I_m & 0_{mm} \\ 0_{mm} & 0_{mp} & 0_{mm} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -T_R(s) & -\bar{0}_{mm} \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.183)$$

ο οποίος από την υπόθεση μας (9.172α) δεν περιέχει μηδενικά στο  $s=\infty$  και συνεπώς ο πίνακας  $\hat{L}$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $s=\infty$ . Έχουμε επίσης ότι οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα και συνεπώς

$$\delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -T_R(s) & -\bar{0}_{mm} \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} = \delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) \\ B_{R2}(s) \\ T_R(s) \end{bmatrix} \stackrel{(9.172\beta)}{=} \delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) \\ -B_{R2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \quad (9.184)$$

Από (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι οι δεξιά κλασματικές Π.Π.Σ. (9.177) είναι πλήρως ισοδύναμες.

Τώρα θα δείξουμε το αντίστροφο του θεωρήματος, ότι δηλαδή

$$(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{\text{FUE}} \iff (P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{\text{FSE}} \quad (9.185)$$

Από τον ορισμό της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων, το γεγονός ότι  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{\text{FSE}}$  σημαίνει ότι υπάρχουν πίνακες  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$ ,  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0_{mp} \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R1}(s) & I_m \\ -B_{R1}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0_{mm} & I_m \end{bmatrix} \quad (9.186)$$

όπου ο μετασχηματισμός (9.186) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός, το οποίο με την σειρά του σημαίνει ότι οι παρακάτω συνθήκες ικανοποιούνται. Εστω οι σύνθετοι πίνακες

$$\tilde{R} = \left[ \begin{array}{cc|cc} M(s) & 0_{mp} & A_{R1}(s) & I_m \\ X(s) & I_p & -B_{R1}(s) & 0_{pm} \end{array} \right] \text{ και } \tilde{L} = \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -N(s) & -Y(s) \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.187)$$

(α) Οι πίνακες  $\tilde{L}$  και  $\tilde{R}$  έχουν πλήρη τάξη για κάθε  $s \in \mathbb{C}$ , (9.188α)

(β) Οι πίνακες  $\tilde{L}$  και  $\tilde{R}$  δεν έχουν μηδενικά στο  $s = \infty$ , (9.188β)

(γ) Οι παρακάτω McMillan συνθήκες ικανοποιούνται

$$\delta_M \left[ \begin{array}{cc|cc} M(s) & 0_{mp} & A_{R1}(s) & I_m \\ X(s) & I_p & -B_{R1}(s) & 0_{pm} \end{array} \right] = \delta_M \begin{bmatrix} A_{R1}(s) & I_m \\ -B_{R1}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \quad (9.188\gamma)$$

και

$$\delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -N(s) & -Y(s) \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} = \delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \quad (9.188\delta)$$

Από την σχέση (9.186) έχουμε ότι

$$M(s) A_{R2}(s) = A_{R1}(s) N(s) \quad (9.189)$$

$$M(s) = A_{R1}(s) Y(s) + I_m \quad (9.190)$$

$$X(s) A_{R2}(s) - B_{R2}(s) = -B_{R1}(s) N(s) \quad (9.191)$$

$$X(s) = -B_{R1}(s) Y(s) \quad (9.192)$$

Ορίζουμε τώρα τον πίνακα

$$T_R(s) = N(s) - Y(s) A_{R2}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m} \quad (9.193)$$

Θα έχουμε

$$\begin{aligned} A_{R2}(s) - A_{R1}(s) T_R(s) &= A_{R2}(s) - A_{R1}(s) [N(s) - Y(s) A_{R2}(s)] \\ &= A_{R2}(s) - A_{R1}(s) N(s) + A_{R1}(s) Y(s) A_{R2}(s) \\ (\text{από σχέση (9.189)}) &= [I_m - M(s) + A_{R1}(s) Y(s)] A_{R2}(s) \\ (\text{από σχέση (9.190)}) &= [I_m - I_m] A_{R2}(s) = 0_{mm} \end{aligned} \quad (9.194)$$

και

$$\begin{aligned} B_{R2}(s) - B_{R1}(s) T_R(s) &= B_{R2}(s) - B_{R1}(s) N(s) + B_{R1}(s) Y(s) A_{R2}(s) \\ (\text{από σχέση (9.191)}) &= X(s) A_{R2}(s) + B_{R1}(s) N(s) - B_{R1}(s) N(s) \\ &\quad + B_{R1}(s) Y(s) A_{R2}(s) \\ &= [X(s) + B_{R1}(s) Y(s)] A_{R2}(s) \\ (\text{από σχέση (9.192)}) &= 0_{pm} \end{aligned} \quad (9.195)$$

Αρα

$$A_{R2}(s) = A_{R1}(s) T_R(s) \quad (9.196)$$

$$B_{R2}(s) = B_{R1}(s) T_R(s) \quad (9.197)$$

Η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων αφήνει αναλλοίωτη την τάξη  $n$ , και την πεπερασμένη μηδενική δομή ενός συστήματος και συνεπώς θα έχουμε ότι

$$\deg|A_{R2}(s)| = \deg|A_{R1}(s)| \quad (9.198)$$

το οποίο από την σχέση (9.196) μας δίνει ότι  $\deg|T_R(s)| = 0$  και  $\det|T_R(s)| = c$  πρδ ο πίνακας  $T_R(s)$  είναι αντιστρέψιμος, το οποίο με την σειρά του μας δίνει ότι

$$\begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{R1}(s) & I_m \\ -B_{R1}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_R(s) & 0_{mm} \\ 0_{mm} & I_m \end{bmatrix} \quad (9.199)$$

Η McMillan συνθήκη (9.188δ) μας δίνει ότι ο πολυωνυμικός πίνακας  $Y(s)$  είναι ένας σταθερός πίνακας πρδ.  $Y(s) =: Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Κάτω από αυτήν την συνθήκη η σχέση (9.193) μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$T_R(s) = N(s) - Y A_{R2}(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m} \quad (9.200)$$

Ο σύνθετος πίνακας  $\tilde{L}$  είναι αυστηρά ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} A_{R2}(s) & 0_{mm} \\ B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ \overline{T_R(s)} & \overline{0_{mm}} \\ 0_{mm} & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0_{mp} & 0_{mm} & -I_m \\ 0_{pm} & -I_p & 0_{pm} & 0_{pm} \\ -Y & 0_{mp} & -I_m & 0_{mm} \\ 0_{mm} & 0_{mp} & 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -N(s) & -Y \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.201)$$

ο οποίος από την συνθήκη (9.188β) δεν περιέχει μηδενικά στο  $s=\infty$  και συνεπώς και ο πίνακας  $\tilde{L}$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $s=\infty$ , που αποδεικνύει την συνθήκη (9.172α) της πλήρους αντιστρέψιμης ισοδυναμίας. Έχουμε επίσης με την βοήθεια του λήμματος 9.32 ότι

$$\delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) \\ B_{R2}(s) \\ T_R(s) \end{bmatrix} \stackrel{\substack{\text{(Λήμμα 9.32)} \\ \text{(9.201)}}}{=} \delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \\ -N(s) & -Y \\ 0_{mm} & -I_m \end{bmatrix} =$$

$$\stackrel{(9.188\delta)}{=} \delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) & I_m \\ -B_{R2}(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \stackrel{(\text{Προτ. 2.40})}{=} \delta_M \begin{bmatrix} A_{R2}(s) \\ -B_{R2}(s) \end{bmatrix} \quad (9.202)$$

που αποδεικνύει την συνθήκη (9.172β) της πλήρους αντιστρέψιμης ισοδυναμίας. Άρα αποδεικνύοντας τις συνθήκες (9.172α,β) της πλήρους ισοδυναμίας που ισχύουν μεταξύ των  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  μπορούμε να πούμε ότι  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FUE}$ .  $\square$

Αποδείξαμε λοιπόν με το θεώρημα 9.64 ότι

$$\Gamma_{FUE} \equiv \Gamma_{FSE} \quad (9.203)$$

πρδ. ότι η πλήρη ισοδυναμία συστημάτων ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας που ταυτίζεται με την πλήρη αντιστρέψιμη ισοδυναμία για δεξιά κλασματικές Π.Π.Σ.. Εντελώς όμοια μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω θεώρημα

**Θεώρημα 9.65** Έστω

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_{Li}(s) & B_{Li}(s) \\ -I_m & 0_{mp} \end{bmatrix} \in L, \quad i=1,2 \quad (9.204)$$

Τότε

$$(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FUE} \Leftrightarrow (P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FSE} \quad (9.205) \quad \square$$



Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε από τα παραπάνω θεωρήματα ότι η πλήρης αντιστρέψιμη ισοδυναμία είναι μια γενίκευση της αντιστρέψιμης ισοδυναμίας η οποία προτάθηκε από τους Kailath (1980), Smith (1981) κατά τον ίδιο τρόπο που η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων είναι γενίκευση της γενικευμένης αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων και συνεπώς έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτα :

- (α) την τάξη  $n$ , την γενικευμένη τάξη  $f := \delta_M(T(s))$  και τον βαθμό  $d_R$  του  $\Sigma$ ,
- (β) την ελάχιστη τάξη  $v(G(s))$  και την γενικευμένη ελάχιστη τάξη  $\delta_M(G(s))$ ,
- (γ) το σύνολο των αποσυζευγμένων μηδενικών (εισόδου, εξόδου, εισόδου-εξόδου) στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- (δ) την συνάρτηση μεταφοράς  $G(s) = A_L(s)^{-1} B_L(s) (B_R(s) A_R(s)^{-1})$  (και συνεπώς τους πόλους και τα μηδενικά μεταφοράς στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ),
- (ε) το σύνολο των πόλων και των μηδενικών του συστήματος στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ,
- (στ) το σύνολο των δυναμικών δεικτών εισόδου και εξόδου,
- (ζ) το σύνολο των αναλλοίωτων μηδενικών στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και το σύνολο των αναλλοίωτων στηλών και γραμμών,

σε αριστερές και δεξιές κλασματικές Π.Π.Σ.. Ένα παράδειγμα πλήρους αντιστρέψιμης ισοδυναμίας δίνεται στην συνέχεια.

**Παράδειγμα 9.66** Θεωρήστε τις δύο παρακάτω αριστερές κλασματικές Π.Π.Σ.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \rho^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_1(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho^2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_1(\rho)} u(t) \quad (\text{E.1})$$

και

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2\rho^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2(\rho)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2\rho^2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_2(\rho)} u(t) \quad (\text{E.2})$$

Είναι προφανές ότι οι δύο παραπάνω αριστερές κλασματικές Π.Π.Σ. συνδέονται με την παρακάτω αντιστρέψιμη ισοδυναμία :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2\rho^2 & 2\rho^2 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline -\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \\ 0 & -1 & 0 & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \rho^2 & \rho^2 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ \hline -\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \\ 0 & -1 & 0 & \end{array} \right] \quad (\text{E.3})$$

όπου ο πίνακας

$$[A_2(\rho) \ B_2(\rho) \ T_L(\rho)] = \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2\rho^2 & 2\rho^2 & 1 & \rho^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{E.4})$$

δεν έχει μηδενικά στο  $s=\infty$  και η παρακάτω McMillan συνθήκη ικανοποιείται :

$$\begin{aligned} \delta_M[A_2(\rho) \ B_2(\rho) \ T_L(\rho)] &= \delta_M[A_2(\rho) \ B_2(\rho)] \Leftrightarrow \\ \delta_M \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2\rho^2 & 2\rho^2 & 1 & \rho^2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] &= 2 = \delta_M \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2\rho^2 & 2\rho^2 & \\ 0 & 1 & 1 & \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Η αντιστρέψιμη ισοδυναμία (E.3) συνεπώς ικανοποιεί τις συνθήκες (9.175α,β) και άρα είναι μια πλήρης αντιστρέψιμη ισοδυναμία που διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  των αριστερά κλασματικών Π.Π.Σ. (E.1) και (E.2).  $\square$

Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in P \times P$ . Χρησιμοποιώντας τις μεθόδους αναγωγής γενικών Π.Π.Σ. σε Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, που αναφέραμε στην ενότητα 9.3.2 παίρνουμε δύο πλήρη ισοδύναμα συστήματα  $P_{1R}(s)$  και  $P_{2R}(s)$  στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων των  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  αντίστοιχα. Θα δείξουμε το επόμενο

**Θεώρημα 9.67**  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FSE} \Leftrightarrow (P_{1R}(s), P_{2R}(s)) \in \Gamma_{FSE}$

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FSE}$  και  $P_{1R}(s), P_{2R}(s)$  είναι τα αντίστοιχα τους πλήρη ισοδύναμα συστήματα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι

$$P_{1R}(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_1(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_2(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_{2R}(s) \quad (9.206)$$

οπότε από την μεταβατική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων (Walker 1988) παίρνουμε ότι  $(P_{1R}(s), P_{2R}(s)) \in \Gamma_{FSE}$ .

( $\Leftarrow$ ) Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in P \times P$  και  $P_{1R}(s), P_{2R}(s)$  είναι τα αντίστοιχα τους πλήρη ισοδύναμα συστήματα στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Ας υποθέσουμε ότι  $(P_{1R}(s), P_{2R}(s)) \in \Gamma_{FSE}$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$P_1(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_{1R}(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_{2R}(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_2(s) \quad (9.207)$$

οπότε από την μεταβατική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων συμπεραίνουμε ότι  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{FSE}$ .  $\square$

**Θεώρημα 9.68** Όλες οι ισχυρές μη αναγώγιμες Π.Π.Σ. οι οποίες έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς είναι πλήρως ισοδύναμες.

**Απόδειξη** Εστω  $(P_1(s), P_2(s)) \in P \times P$  είναι οι Rosenbrock πίνακες δύο ισχυρά μη αναγώγιμων Π.Π.Σ. και  $P_{1R}(s), P_{2R}(s)$  είναι οι Rosenbrock πίνακες των αντιστοίχων τους πλήρως ισοδύναμων Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (δες 9.3.2). Σύμφωνα με το θεώρημα 9.67 το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι

$$(P_{1R}(s), P_{2R}(s)) \in \Gamma_{FSE} \quad (9.208)$$

Οι Rosenbrock πίνακες  $P_{1R}(s)$  και  $P_{2R}(s)$  θα είναι ισχυρά μη αναγώγιμοι λόγω του ότι η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και επιπλέον έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς για τον ίδιο ακριβώς λόγο. Αρα από το θεώρημα 9.19 οι  $P_{1R}(s)$  και  $P_{2R}(s)$  θα είναι τέλεια ισοδύναμοι. Αλλά η τέλεια ισοδυναμία συστημάτων ταυτίζεται με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων στην ειδική κατηγορία των Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων σύμφωνα με το θεώρημα 9.23. Αρα οι Π.Π.Σ. που ορίζουν οι πίνακες  $P_{1R}(s)$  και  $P_{2R}(s)$  θα είναι πλήρως ισοδύναμες που αποδεικνύει το θεώρημα.  $\square$

Στην συνέχεια δίνουμε μια συνθήκη έτσι ώστε μια αριστερά και μια δεξιά κλασματική Π.Π.Σ. να είναι πλήρως ισοδύναμες.

**Θεώρημα 9.69** Εστω

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \\ -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} \in P \quad \text{για } i=1,2 \quad (9.209)$$

οι Rosenbrock πίνακες δύο γενικευμένης ελάχιστης τάξης Π.Π.Σ. ή ισοδύναμα δύο ισχυρά μη αναγώγιμων Π.Π.Σ.. Τότε

$$P_1(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_2(s) \Leftrightarrow G_1(s) = G_2(s) \quad (9.210)$$

όπου

$$G_i(s) = C_i(s)A_i(s)^{-1}B_i(s) + D_i(s) \quad (9.211)$$

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Είναι προφανές από θεώρημα 9.23.

( $\Leftarrow$ ) Οι δύο Π.Π.Σ. είναι ισχυρά μη αναγώγιμες και έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς, άρα από θεώρημα 9.68 θα είναι πλήρως ισοδύναμες που αποδεικνύει το αντίστροφο του θεωρήματος.  $\square$

**Θεώρημα 9.70** Εστω

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} D_R(s) & I_m \\ -N_R(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \in R \text{ and } P_2(s) = \begin{bmatrix} D_L(s) & N_L(s) \\ -I_p & 0_{pm} \end{bmatrix} \in L \quad (9.212)$$

Τότε

$$N_L(s) D_R(s) = D_L(s) N_R(s) \quad (9.213\alpha)$$

$$P_1(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_2(s) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (D_L(s) \ N_L(s)) \\ \left[ \begin{array}{c} D_R(s) \\ N_R(s) \end{array} \right] \end{array} \right\} \text{ δεν έχουν μηδενικά} \\ \text{στο } \mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\} \quad (9.213\beta)$$

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Είναι φανερό από την μορφή των πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  ότι η Π.Π.Σ. που ορίζεται από τον Rosenbrock πίνακα  $P_1(s)$  δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά εισόδου, ενώ η Π.Π.Σ. που ορίζεται από τον Rosenbrock πίνακα  $P_2(s)$  δεν έχει αποσυζευγμένα μηδενικά εξόδου. Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι οι δύο Π.Π.Σ. πλήρως ισοδύναμες είναι να έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\}$  και συνεπώς την ίδια συνάρτηση μεταφοράς και τα ίδια αποσυζευγμένα μηδενικά στο  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\}$ , συνθήκες που καθορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (9.213α,β).

( $\Leftarrow$ ) Οι πίνακες

$$(D_L(s) \ N_L(s)) \text{ και } \begin{bmatrix} D_R(s) \\ N_R(s) \end{bmatrix} \quad (9.214)$$

δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}\mathbb{U}\{\omega\}$  λόγω της συνθήκης (9.213β) και συνεπώς οι Π.Π.Σ. που ορίζονται από τους πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι ισχυρά μη αναγώγιμες. Επιπλέον οι δύο αυτές Π.Π.Σ. έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς και άρα από θεώρημα 9.69 θα έχουμε

$$P_1(s) \underset{\text{ισοδύναμο}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} P_2(s) \quad (9.215) \quad \square$$

Στην συνέχεια θα δώσουμε ορισμένες εφαρμογές του θεωρήματος 9.69 και πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε την λογική στην οποία βασίστηκαν οι αλγόριθμοι 9.59 και 9.60 (αλγόριθμος A.I.Vardulakis (1991), 9.3.2ε).

**Εφαρμογή 9.71** (Απόδειξη θεωρήματος 9.52 και αλγορίθμου 9.59)

Θεωρείστε την Π.Π.Σ. (9.41) της οποίας η κανονική μορφή είναι η (9.42). Εστω επίσης

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (9.217\alpha)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (9.217\beta)$$

$E \in \mathbb{R}^{\lambda_{av} \times \lambda_{av}}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{\lambda_{av} \times \lambda_{av}}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{\lambda_{av} \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times \lambda_{av}}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $\lambda \in \mathbb{I}^+$  είναι μια ελάχιστη πραγμάτωση του πίνακα  $T(s)^{-1}$ . Τότε οι Π.Π.Σ. που ορίζουν οι Rosenbrock πίνακες

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} T(s) & I_{\tilde{r}} \\ -I_{\tilde{r}} & 0_{\tilde{r} \times \tilde{r}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \quad (9.218)$$

είναι ισχυρά μη αναγώγιμες και έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς  $G(s) = C(sE - A)^{-1}B = T(s)^{-1}$ . Αρα από το θεώρημα 9.69 οι δύο αυτές Π.Π.Σ. είναι πλήρως ισοδύναμες και συνεπώς υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \lambda_{av}}$ ,  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \lambda_{av}}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \lambda_{av}}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & I_{\tilde{r}} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \quad (9.219)$$

να είναι πλήρως ισοδύναμος. Από τις McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (9.219) θα έχουμε ότι

$$\delta_M \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -\underline{C} & \underline{D} \\ -N(s) & -Y(s) \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = \delta_M \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \quad (9.220)$$

και

$$\delta_M \left[ \begin{array}{cc|cc} M(s) & 0 & T(s) & I_{\tilde{r}} \\ X(s) & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] = \delta_M \begin{bmatrix} T(s) & I_{\tilde{r}} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.221)$$

Εαν θεωρήσουμε ως ορισμό του McMillan βαθμού ενός πολυωνυμικού πίνακα την σχέση (2.81) θα πάρουμε από τις παραπάνω συνθήκες ότι  $Y(s)=Y$ ,  $X(s)=X$  (σταθεροί πίνακες) και  $N(s)=N_0+HEs$  για κάποιον σταθερό πίνακα  $H$ . Οπότε η σχέση (9.219) μπορεί να ξαναγραφτεί με μια εσωτερική αλλαγή (*internal recoordination*) η οποία δεν αλλάζει την εσωτερική δομή των ισοδύναμων πινάκων (Hayton *et al.* 1990), ως

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 & | & T(s) & I_{\tilde{r}} \\ X & I_{\tilde{r}} & | & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -\underline{C} & \underline{D} \\ -N_0-HEs & -Y \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 & | & T(s) & I_{\tilde{r}} \\ X & I_{\tilde{r}} & | & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ X & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -X & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -\underline{C} & \underline{D} \\ -N_0-HEs & -Y \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.222)$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$\begin{bmatrix} M(s)+T(s)X & 0 & | & T(s) & I_{\tilde{r}} \\ 0 & I_{\tilde{r}} & | & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -\underline{C} & \underline{D} \\ -C & D \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.223)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} M(s)+T(s)X & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & I_{\tilde{r}} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -D \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \quad (9.224)$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$[M(s)+T(s)X](sE-A) = T(s) C \Leftrightarrow [M(s)+T(s)X] = T(s)C(sE-A)^{-1} \quad (9.225)$$

και άρα η σχέση (9.224) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & I_{\tilde{r}} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -D \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \quad (9.226)$$

Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και αριστερά και τις δύο πλευρές της σχέσεως (9.226) αντίστοιχα με τους πίνακες

$$\begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (9.227)$$

παίρνουμε ότι

$$\begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & BU \\ -\gamma C & \gamma DU \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -DU \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.228)$$

Τώρα αν θεωρήσουμε τους σύνθετους πίνακες

$$Q = \begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} & 0 & T(s) & U \\ 0 & I_p & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad R = \begin{bmatrix} sE-A & BU \\ -\gamma C & -\gamma DU \\ -C & DU \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (9.229)$$

και τους ακόλουθους πλήρως ισοδύναμους μετασχηματισμούς



$$\begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} 0 & T(s) u \\ 0 & I_p & -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} 0_{\tilde{r} \times \tilde{r}} & T(s) u \\ 0 & \gamma & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\lambda_{av}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{av} & \gamma^T & 0 \\ 0 & 0 & I_{\tilde{r}+m} \end{bmatrix} \quad (9.230)$$

$$\begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} 0 & T(s) u \\ 0 & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} 0_{\tilde{r} \times \tilde{r}} & T(s) u \\ 0 & \gamma & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\lambda_{av}} & 0 \\ 0 & I_{2\tilde{r}+m} \end{bmatrix} \quad (9.231)$$

$$\begin{bmatrix} I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} 0 & T(s) u \\ 0 & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s)C(sE-A)^{-1} 0 & T(s) I_{\tilde{r}} \\ 0 & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\lambda_{av}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{av} & I_{\tilde{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (9.232)$$

μπορούμε να διαπιστώσουμε βάσει του λήμματος 3.23 ότι η μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και το έλλειμμα τάξης του πίνακα  $Q$  παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους πλήρως ισοδύναμους μετασχηματισμούς (9.230, 9.231, 9.232) και συνεπώς είναι ίδια με του σύνθετου πίνακα

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} T(s)C(sE-A)^{-1} 0 & & & T(s) & I_{\tilde{r}} \\ & 0 & & & -I_{\tilde{r}} \\ & & I_{\tilde{r}} & & 0 \end{array} \right] \quad (9.233)$$

Αυτό σύμφωνα με τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (9.226) μας δίνει ότι ο σύνθετος πίνακας  $Q$  δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και έχει πλήρη τάξη. Οσον αφορά τις McMillan συνθήκες, μπορούμε να διαπιστώσουμε με την βοήθεια των συνθηκών McMillan της πλήρους ισοδυναμίας (9.226), και του γεγονότος ότι οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνυμικού πίνακα, ότι

$$\begin{aligned} \delta_M \left[ \begin{array}{ccc|cc} T(s)C(sE-A)^{-1} 0 & & & T(s) & u \\ & 0 & & & -\gamma & 0 \end{array} \right] &= \delta_M (T(s)C(sE-A)^{-1} T(s)) = \\ &= \delta_M \left[ \begin{array}{ccc|cc} T(s)C(sE-A)^{-1} 0 & T(s) & I_{\tilde{r}} \\ & 0 & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] \stackrel{(9.226)}{=} \delta_M \left[ \begin{array}{cc|c} T(s) & I_{\tilde{r}} \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] = \delta_M \left[ \begin{array}{cc|c} T(s) & u \\ -\gamma & 0 \end{array} \right] \quad (9.234) \end{aligned}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι ο σύνθετος πίνακας  $R$  ικανοποιεί τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας και άρα οι Π.Π.Σ. (9.152) και (9.42) είναι πλήρως ισοδύναμες. Χρησιμοποιώντας την συμμετρική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας (9.226) παίρνουμε τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό μεταξύ των συστημάτων (9.42) και (9.152)

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ \gamma D & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE-A & BU \\ -\gamma C & \gamma DU \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sE-A)^{-1}BT(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.235) \quad \square$$

### Εφαρμογή 9.72 (απόδειξη αλγορίθμου 9.60)

Θεωρείστε την Π.Π.Σ. (9.41) της οποίας η κανονική μορφή είναι η (9.42). Εστω επίσης μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση (ή ελάχιστη)  $\{A_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}, B_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times \tilde{r}}, C_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times q}, D_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$  του πίνακα  $T(s)$  ( $T(s) = C_0(s)A_0(s)^{-1}B_0(s) + D_0(s)$ ) τέτοια ώστε οι πίνακες  $A_0(s), B_0(s), C_0(s), D_0(s)$  να είναι πρωτοβάθμιοι πολυωνυμικοί. Τότε οι Rosenbrock πίνακες

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} A_0(s) & B_0(s) \\ -C_0(s) & D_0(s) \end{bmatrix} \quad (9.236)$$

θα ορίζουν δύο Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα οι οποίες θα είναι ισχυρά μη αναγώγιμες με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς ( $T(s)$ ). Άρα από θεώρημα 9.69 τα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι πλήρως ισοδύναμα και συνεπώς θα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}, N(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}, X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times q}$  και  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times \tilde{r}}$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(s) & B_0(s) \\ -C_0(s) & D_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \quad (9.237)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Άρα θα έχουμε τις παρακάτω συνθήκες

οι οποίες ικανοποιούνται

(α) Σύμφωνα με τις McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (9.237) θα πρέπει :

$$\delta_M \left[ \begin{array}{c|cc} M(s) & 0 & A_0(s) & B_0(s) \\ \hline X(s) & I_{\tilde{r}} & -C_0(s) & D_0(s) \end{array} \right] = \delta_M \left[ \begin{array}{cc} A_0(s) & B_0(s) \\ -C_0(s) & D_0(s) \end{array} \right] \quad (9.238\alpha)$$

και

$$\delta_M \left[ \begin{array}{cc} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \\ -N(s) & -Y(s) \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{array} \right] = \delta_M \left[ \begin{array}{cc} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \end{array} \right] \quad (9.238\beta)$$

οι οποίες μας δίνουν με την εφαρμογή της πρότασης 2.40 ότι ο πίνακας  $N(s)$  είναι σταθερός πρδ.  $N(s) = N \in \mathbb{R}^{q \times q}$ . Από την συνθήκη (9.238) επίσης έχουμε λόγω του ότι ο πίνακας  $N(s)$  είναι σταθερός πίνακας και του γεγονότος ότι οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πίνακα, ότι

$$\delta_M \left[ \begin{array}{c} T(s) \\ -Y(s) \end{array} \right] = \delta_M(T(s)) \quad (9.239)$$

(β) Οι σύνθετοι πίνακες

$$Q = \left[ \begin{array}{c|cc} M(s) & 0 & A_0(s) & B_0(s) \\ \hline X(s) & I_{\tilde{r}} & -C_0(s) & D_0(s) \end{array} \right] \quad \text{και} \quad R = \left[ \begin{array}{cc} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \\ -N(s) & -Y(s) \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{array} \right] \quad (9.240)$$

δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\infty\}$ .

Η σχέση (9.237) μπορεί να ξαναγραφτεί με μια εσωτερική αλλαγή (*internal recoordination*) η οποία δεν αλλάζει την εσωτερική δομή των ισοδύναμων πινάκων (Hayton *et al.* 1990), ως

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(s) & 0 & A_0(s) & B_0(s) \\ X(s) & I_{\tilde{r}} & -C_0(s) & D_0(s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \\ -N & -Y(s) \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(s) & 0 & A_0(s) & B_0(s) \\ X(s) & I_{\tilde{r}} & -C_0(s) & D_0(s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -N & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ N & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \\ -N & -Y(s) \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.241)$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(s)-A_0(s)N & 0 & A_0(s) & B_0(s) \\ X(s)+C_0(s)N & I_{\tilde{r}} & -C_0(s) & D_0(s) \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \\ -N & -Y(s) \\ 0 & -I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.242)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} M(s)-A_0(s)N & 0 \\ X(s)+C_0(s)N & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(s) & B_0(s) \\ -C_0(s) & D_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Y(s) \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \quad (9.243)$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$M(s)-A_0(s)N = 0 \quad \text{και} \quad X(s)+C_0(s)N = 0$$

$$A_0(s)Y(s)+B_0(s) = 0 \Leftrightarrow Y(s) = -A_0(s)^{-1}B_0(s) \quad (9.244)$$

και άρα η σχέση (9.243) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(s) & B_0(s) \\ -C_0(s) & D_0(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -A_0(s)^{-1}B_0(s) \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \quad (9.245)$$

Βάσει της σχέσεως (9.245) τώρα μπορούμε να σχηματίσουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & u \\ \hline -\gamma & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_0(s) & B_0(s) & 0 \\ \hline -C_0(s) & D_0(s) & u \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} -A_0(s)^{-1}B_0(s) & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.246)$$

Εαν λάβουμε υπόψη μας τις συνθήκες της πλήρης ισοδυναμίας, του πλήρως ισοδύναμου μετασχηματισμού (9.245), θα είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι και ο μετασχηματισμός (9.246) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οι σύνθετοι πίνακες των μετασχηματισμών (9.245) και (9.246) συνδέονται με τους παρακάτω αυστηρά ισοδύναμους μετασχηματισμούς που διατηρούν αναλλοίωτη την δομή των πόλων και των μηδενικών στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  των ισοδύναμων σύνθετων πινάκων

$$\left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & A_0(s) & B_0(s) & 0 \\ \hline 0 & I_{\tilde{r}} & -C_0(s) & D_0(s) & 0 \\ \hline I_p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & A_0(s) & B_0(s) & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 & -C_0(s) & D_0(s) & u \\ \hline 0 & I_p & 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & I_{\tilde{r}} & 0 & 0 & -u \\ \hline I_p & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.247)$$

και

$$\left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline T(s) & 0 \\ \hline A_0(s)^{-1}B_0(s) & 0 \\ \hline -I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & I_p & 0 & -\gamma & 0 \\ \hline I_{\tilde{r}} & 0 & 0 & 0 & u \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & u \\ \hline -\gamma & 0 \\ \hline A_0(s)^{-1}B_0(s) & 0 \\ \hline -I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.248)$$

γεγονός που μας δίνει ότι οι σύνθετοι πίνακες του μετασχηματισμού (9.246) ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες με τους σύνθετους πίνακες του μετασχηματισμού (9.245) και συνεπώς ο μετασχηματισμός (9.246) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Ο συμμετρικός μετασχηματισμός του (9.246) θα είναι ο παρακάτω

$$\left[ \begin{array}{cc|c} C_0(s)A_0(s)^{-1} & I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} A_0(s) & B_0(s) & 0 \\ -C_0(s) & D_0(s) & u \\ \hline 0 & -\gamma & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} T(s) & u \\ \hline -\gamma & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & I_{\tilde{r}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.249)$$

Τέλος μπορούμε να παρατηρήσουμε το εξής : Η πραγμάτωση  $\{A_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times q}$ ,  $B_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{q \times \tilde{r}}$ ,  $C_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times q}$ ,  $D_0(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}\}$  είναι ισχυρά μη αναγώγιμη και συνεπώς από το θεώρημα 5.9 οι πεπερασμένοι πόλοι του συστήματος (μηδενικά του  $A_0(s)$ ) ταυτίζονται με τους πεπερασμένους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς (τους πόλους του  $T(s)$ ) και επειδή ο πίνακας  $T(s)$  είναι πολυωνυμικός, ο πίνακας  $A_0(s)$  δεν θα πρέπει να περιέχει πεπερασμένα μηδενικά, θα πρέπει δηλαδή να είναι αντιστρέψιμος. Συμπέρασμα των παραπάνω είναι ότι οι πίνακες  $A_0(s)^{-1}B_0(s)$  και  $C_0(s)A_0(s)^{-1}$  που χρησιμοποιούνται στους μετασχηματισμούς (9.246) και (9.249) αντίστοιχα είναι πολυωνυμικοί και άρα οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι πλήρως ισοδύναμοι.  $\square$

**Θεώρημα 9.73** Θεωρείστε μια Π.Π.Σ. (πρδ. (9.41)) της οποίας ο καινικός πίνακας του συστήματος είναι ο εξής

$$\mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} T(s) & u \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \in P \quad (9.250)$$

Εστω ότι η παραπάνω Π.Π.Σ. είναι ελέγξιμη (από θεώρημα 8.37, ο πίνακας  $[T(s) \ u]$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ). Τότε υπάρχει μια πλήρως ισοδύναμη δεξιά κλασματική Π.Π.Σ.

$$P_R(s) = \begin{bmatrix} A_R(s) & I_m \\ -C_R(s) & 0_{pm} \end{bmatrix} \in R \quad (9.251)$$

του συστήματος (9.250). Στην περίπτωση μάλιστα που η Π.Π.Σ. (9.250) είναι και παρατηρήσιμη τότε και η δεξιά κλασματική Π.Π.Σ. (9.251) θα είναι επίσης παρατηρήσιμη.

**Απόδειξη** Θεωρείστε μια δεξιά κλασματική έκφραση του πίνακα

$$T(s)^{-1} U = R(s) Q(s)^{-1} \quad (9.252)$$

όπου  $R(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times m}$ ,  $Q(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times m}$  και είναι τέτοια ώστε ο πίνακας  $[R(s)^T \ Q(s)^T]^T$  να είναι κανονικός κατά στήλες (δες 9.134). Τότε οι Π.Π.Σ. που προσδιορίζονται από τους Rosenbrock πίνακες

$$P_1(s) = \begin{bmatrix} Q(s) & I_m \\ -R(s) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_2(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.253)$$

είναι ισχυρά μη αναγώγιμες με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς και συνεπώς θα είναι πλήρως ισοδύναμες σύμφωνα με το θεώρημα 9.69. Άρα θα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times m}$ ,  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times m}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times m}$  και  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times m}$  τέτοιοι ώστε ο παρακάτω μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_{\tilde{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(s) & I_m \\ -R(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.254)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδυναμικός μετασχηματισμός. Η ικανοποίηση των McMillan συνθηκών της πλήρους ισοδυναμίας (9.254) έχει ως αποτέλεσμα οι πίνακες  $X(s)$  και  $Y(s)$  να είναι σταθεροί πρδ.  $X(s)=X$  και  $Y(s)=Y$ . Ο μετασχηματισμός (9.254) μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα κάτω από αυτό το συμπέρασμα ως

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(s) & 0 & T(s) & U \\ X & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} Q(s) & I_m \\ -R(s) & 0 \\ -N(s) & -Y \\ 0 & -I_m \end{array} \right] = 0 \quad (9.255)$$

Εφαρμόζοντας τον παρακάτω εσωτερικό μετασχηματισμό (*internal recoordination*) (Hayton *et al.* 1990) στον μετασχηματισμό (9.255) θα πάρουμε χωρίς καμιά επίδραση στις αρχικές συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας ότι

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(s) & 0 & T(s) & u \\ X & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ X & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -X & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} Q(s) & I_m \\ -R(s) & 0 \\ -N(s) & -Y \\ 0 & -I_m \end{array} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(s)+T(s)X & 0 & T(s) & u \\ 0 & I_{\tilde{r}} & -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} Q(s) & I_m \\ -R(s) & 0 \\ -XQ(s)-N(s) & -Y-X \\ 0 & -I_m \end{array} \right] = 0 \quad (9.256)$$

ή ισοδύναμα

$$\left[ \begin{array}{cc} M(s)+T(s)X & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} Q(s) & I_m \\ -R(s) & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} T(s) & u \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} XQ(s)+N(s) & Y+X \\ 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.257)$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε από τις σχέσεις του μετασχηματισμού (9.254) ότι

$$M(s)+T(s)X = u \quad ; \quad X+Y=0 \quad ; \quad XQ(s)+N(s)=R(s) \quad (9.258)$$

Αρα ο πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός (9.257) παίρνει την μορφή

$$\left[ \begin{array}{cc} u & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} Q(s) & I_m \\ -R(s) & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} T(s) & u \\ -I_{\tilde{r}} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} R(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{array} \right] \quad (9.259)$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και τα δύο μέλη της σχέσεως (9.259) με τον πίνακα

$$\left[ \begin{array}{cc} I_{\tilde{r}} & 0 \\ 0 & \gamma \end{array} \right] \quad (9.260)$$



θα πάρουμε

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(s) & I_m \\ -\gamma R(s) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.261)$$

Είναι πλέον πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς βάσει των συνθηκών του πλήρους ισοδύναμου μετασχηματισμού (9.259) ότι ο μετασχηματισμός (9.261) είναι επίσης πλήρης ισοδύναμος. Στην περίπτωση τώρα που η Π.Π.Σ. (9.250) είναι και παρατηρήσιμη τότε, λόγω του ότι η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\{s\}$ , και η πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. (9.251) (από πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό (9.261)) θα είναι επίσης παρατηρήσιμη που αποδεικνύει το θεώρημα.  $\square$

Ομοια με το θεώρημα 9.73 μπορούμε να δείξουμε το επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 9.74** Θεωρείστε μια Π.Π.Σ. (πρδ. (9.41)) της οποίας ο καινικός πίνακας του συστήματος είναι ο εξής

$$\mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \in P \quad (9.262)$$

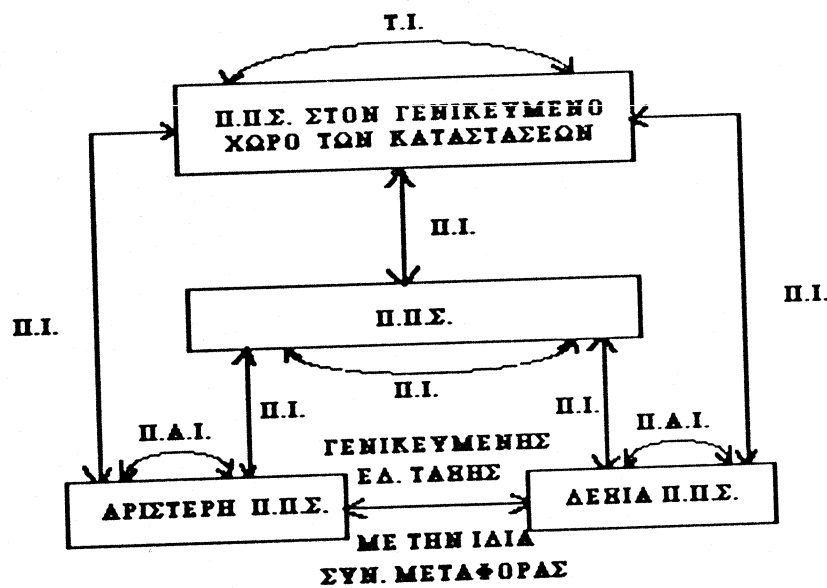
Εστω ότι η παραπάνω Π.Π.Σ. είναι παρατηρήσιμη (από θεώρημα 8.37, ο πίνακας  $[T(s)^T \ \gamma^T]^T$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ ). Τότε υπάρχει μια πλήρως ισοδύναμη αριστερή κλασματική Π.Π.Σ.

$$P_R(s) = \begin{bmatrix} A_L(s) & B_L(s) \\ -I_p & 0_{pm} \end{bmatrix} \in L \quad (9.263)$$

του συστήματος (9.262). Στην περίπτωση μάλιστα που η Π.Π.Σ. (9.262) είναι και ελέγξιμη τότε και η αριστερή κλασματική Π.Π.Σ. (9.263) θα είναι επίσης ελέγξιμη.  $\square$

**Παρατήρηση 9.75** Παρατηρήσαμε διαμέσου της απόδειξης των εφαρμογών 9.71–2 και των θεωρημάτων 9.73–4 ότι το θεώρημα 9.69 μπορεί να εφαρμοστεί κάλλιστα ως εργαλείο κατασκευής πλήρως ισοδύναμων μετασχηματισμών. Ο λόγος που εφαρμόσαμε αυτές τις μακροσκελείς αποδείξεις ήταν για να δείξουμε ακριβώς αυτόν τον λόγο. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα στο θεώρημα 9.73 να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον μετασχηματισμό (9.261) χωρίς απόδειξη για το πως βγήκε, ο οποίος είναι φανερό ότι είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός.  $\square$

Θέλοντας τέλος να συνοψίσουμε όλη την θεωρία των ειιοτήτων 9.3.1–9.3.3, όπου φαίνεται η μορφή της πλήρους ισοδυναμίας για γενικές Π.Π.Σ., Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων καθώς και αριστερά και δεξιά κλασματικές Π.Π.Σ., δίνουμε τον παρακάτω πίνακα.



**Διάγραμμα 9.2**

Οι ειδικές μορφές της πλήρους ισοδυναμίας συστ. για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και δεξιά και αριστερά κλασματικές Π.Π.Σ..

### 9.3.4 Τετράγωνα αντίστροφα συστήματα και πλήρης ισοδυναμία συστημάτων.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μια γενίκευση της ισοδυναμίας Morf (Morf's system equivalence) η οποία προτάθηκε από τον Morf (1975) και Levy *et al.* (1977). Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι όσον αφορά ποία είναι η ισοδυναμία Morf, θεωρήστε δύο Π.Π.Σ. έστω  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  με κοινή είσοδο και έξοδο

$$A_i(\rho) \beta_i(t) = B_i(\rho)u(t) \quad i=1,2 \quad (9.264\alpha)$$

$$y(t) = C_i(\rho)\beta_i(t) + D_i(\rho)u(t) \quad (9.264\beta)$$

όπου  $\rho=d/dt$ ,  $A_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r_i \times r_i}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A_i(\rho) = r_i$ ,  $B_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r_i \times m}$ ,  $C_i(\rho) \in [\rho]^{p \times r_i}$  και  $D_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ . Εάν εφαρμόσουμε μετασχηματισμούς Laplace στις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε

$$A_i(s) \hat{\beta}_i(s) = B_i(s)\hat{u}(s) + \alpha_0(s) \quad i=1,2 \quad (9.265\alpha)$$

$$y(s) = C_i(s)\hat{\beta}_i(s) + D_i(s)\hat{u}(s) + \beta_0(s) \quad (9.265\beta)$$

όπου  $\hat{\beta}_i(s) = \mathcal{L}[\beta_i(t)]$  και  $\hat{u}(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  και  $\alpha_0(s)$ ,  $\beta_0(s)$  είναι πολυωνυμικά διανύσματα των οποίων οι συντελεστές προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες  $\{\beta(\cdot), u(\cdot)\}$  και των παραγώγων τους. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ως *γενικευμένη συνάρτηση μεταφοράς* (*extended or generalized transfer function*) (Morf 1975, Kailath 1980) των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  τις συναρτήσεις  $H_i(s) \in \mathbb{R}(s)^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$ ,  $\tilde{r} = r + p + m$ , τέτοιες ώστε

$$\begin{bmatrix} y(s) \\ \beta(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = H_i(s) \begin{bmatrix} \beta_0(s) \\ \alpha_0(s) \\ u(s) \end{bmatrix} ; \quad H_i(s) = \begin{bmatrix} I_p & C_i(s)A_i(s)^{-1} & C_i(s)A_i(s)^{-1}B_i(s) + D_i(s) \\ 0 & A_i(s)^{-1} & A_i(s)^{-1}B_i(s) \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad i=1, 2 \quad (9.267)$$

Μια σημαντική ιδιότητα των πινάκων  $H_i(s)$   $i=1,2$  είναι ότι είναι αντιστρέψιμοι και οι αντίστροφοι πίνακες  $P_{M_i}(s) = H_i(s)^{-1}$  είναι πολυωνυμικοί πίνακες τέτοιου ώστε

$$\begin{bmatrix} \beta_0(s) \\ \alpha_0(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = P_{M_i}(s) \begin{bmatrix} y(s) \\ \beta(s) \\ u(s) \end{bmatrix} ; \quad P_{M_i}(s) = \begin{bmatrix} I_p & -C_i(s) & -D_i(s) \\ 0 & A_i(s) & -B_i(s) \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.268)$$

Οι Morf (1975), Levy *et al.* (1977) πρότευναν την Morf ισοδυναμία συστημάτων. Η ισοδυναμία αυτή βασίζεται σε συγκεκριμένες σχέσεις των γενικευμένων συναρτήσεων μεταφοράς των δύο συστημάτων και δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 9.76** (Morf 1975, Levy *et al.* 1977) Εστω οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  στην σχέση (9.264). Οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **Morf ισοδύναμες** (*Morf system equivalent*) εάν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $K(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+p) \times (r_1+p)}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times (r_1+p)}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+m) \times p}$  και  $L(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+m) \times (r_2+m)}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} K(s) & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix} P_{M_1}(s) = P_{M_2}(s) \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ Y(s) & L(s) \end{bmatrix} \quad (9.269)$$

όπου οι πίνακες

$$\{K(s), P_2(s)\} \text{ είναι αριστερά πρώτοι} \quad (9.270\alpha)$$

$$\{P_1(s), L(s)\} \text{ είναι δεξιά πρώτοι} \quad (9.270\beta)$$

με  $P_i(s)$   $i=1,2$  τους πίνακες Rosenbrock των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα.  $\square$

Ενα σημαντικό αποτέλεσμα της ισοδυναμίας Morf είναι ότι ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας η οποία ταυτίζεται με την κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η γενικευμένη ασητηρή ισοδυναμία (Levy *et al.* 1977) και συνεπώς έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}$ . Εάν επιπλέον θέλουμε να διατηρούμε και την μηδενική δομή συστημάτων στο  $s=\infty$  τότε σίγουρα χρειαζόμαστε μια γενίκευση της ισοδυναμίας Morf. Η ισοδυναμία που έχει αυτήν την ιδιότητα όπως θα δούμε παρακάτω δίνεται από τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 9.77** (Karampetakis) Εστω οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  στην σχέση (9.264). Οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα ονομάζονται **γενικευμένα Morf ισοδύναμες** (*extended or generalized Morf system equivalent*) εαν υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $K(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+p) \times (r_1+p)}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times (r_1+p)}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+m) \times p}$  και  $L(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+m) \times (r_2+m)}$  τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} K(s) & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix} P_{M_1}(s) = P_{M_2}(s) \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ Y(s) & L(s) \end{bmatrix} \quad (9.271)$$

όπου ο μετασχηματισμός (9.271) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός.  $\square$

Εστω  $\Gamma_{GMSE}$  το υποσύνολο του  $P \times P$  τέτοιο ώστε εαν οι πίνακες Rosenbrock  $(P_1(s), P_2(s)) \in \Gamma_{GMSE}$  τότε οι Π.Π.Σ. που ορίζουν οι πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι γενικευμένα Morf ισοδύναμες. Ενα σημαντικό θεώρημα, το οποίο μας δείχνει ότι η κλάση ισοδυναμίας  $\Gamma_{FSE}$  που ορίζει η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων και η κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η γενικευμένη ισοδυναμία συστημάτων Morf ταυτίζονται, δίνεται στην συνέχεια.

**Θεώρημα 9.78** Εστω οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  στην σχέση (9.264). Τότε

$$\Gamma_{FSE} \equiv \Gamma_{GMSE}$$

#### Απόδειξη

( $\Rightarrow$ ) Εστω ότι οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι πλήρως ισοδύναμες, τότε θα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_2 \times r_1}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times r_1}$ ,  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_1 \times r_2}$  και  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{r_1 \times m}$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ -C_1(s) & D_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \\ -C_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.272)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός ή ισοδύναμο ο μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 & 0 \\ X(s) & I_p & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) & 0 \\ -C_1(s) & D_1(s) & -I_p \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) & 0 \\ -C_2(s) & D_2(s) & -I_p \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (9.273)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Θεωρείστε τον παρακάτω αυστηρά ισοδύναμο μετασχηματισμό :

$$\begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) & 0 \\ -C_i(s) & D_i(s) & -I_p \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{r_i} & 0 \\ I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & -C_i(s) & -D_i(s) \\ 0 & A_i(s) & -B_i(s) \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I_p \\ I_{r_i} & 0 & 0 \\ 0 & -I_m & 0 \end{bmatrix} \quad (9.274)$$

Εαν συνδιάσουμε τους μετασχηματισμούς (9.273) και (9.274) έχουμε τον παρακάτω πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{cc|c} I_p & X(s) & 0 \\ 0 & M(s) & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} I_p & -C_1(s) & -D_1(s) \\ 0 & A_1(s) & -B_1(s) \\ 0 & 0 & I_m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} I_p & -C_2(s) & -D_2(s) \\ 0 & A_2(s) & -B_2(s) \\ 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} I_p & 0 & 0 & \\ \hline 0 & N(s) & -Y(s) & \\ 0 & 0 & I_p & \end{array} \right] \quad (9.275)$$

που αποδεικνύει ότι οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι γενικευμένα Μορφ ισοδύναμες.

( $\Leftarrow$ ) Εστω ότι οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι γενικευμένα Μορφ ισοδύναμες, τότε θα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+p) \times (r_1+p)}$ ,  $X(s) \in \mathbb{R}[s]^{m \times (r_1+p)}$ ,  $Y(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+m) \times p}$  και  $N(s) \in \mathbb{R}[s]^{(r_2+m) \times (r_2+m)}$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I_m \end{bmatrix} P_{M_1}(s) = P_{M_2}(s) \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ Y(s) & N(s) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} M_{11}(s) & M_{12}(s) & 0 & I_p & -C_2(s) & -D_2(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) & 0 & 0 & A_2(s) & -B_2(s) \\ X_1(s) & X_2(s) & I_m & 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_p & -C_1(s) & -D_1(s) \\ 0 & A_1(s) & -B_1(s) \\ 0 & 0 & I_m \\ \hline -I_p & 0 & 0 \\ -Y_1(s) & -N_{11}(s) & -N_{12}(s) \\ -Y_2(s) & -N_{21}(s) & -N_{22}(s) \end{bmatrix} = 0 \quad (9.276)$$

να είναι πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Από τις McMillan συνθήκες της πλήρης ισοδυναμίας (9.276) θα έχουμε ότι οι παρακάτω πίνακες είναι σταθεροί :  $X_1(s)=X_1$ ,  $X_2(s)=X_2$ ,  $Y_1(s)=Y_1$  και  $Y_2(s)=Y_2$ . Βάσει αυτού του συμπεράσματος οι πίνακες

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & 0 \\ -Y_1 & 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{r}_2} & 0 \\ -X_1 & -X_2 & 0 & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] \quad \text{και} \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{r}_2} & 0 \\ X_1 & X_2 & 0 & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] \quad (9.277)$$

είναι σταθεροί και ο ένας είναι αντίστροφος του άλλου. Θεωρείστε τις σχέσεις που προκύπτουν από τον μετασχηματισμό (9.276)

$$\begin{aligned} (1,1) : & \quad M_{11}(s) - I + C_2(s)Y_1 + D_2(s)Y_2 = 0 \\ (2,1) : & \quad M_{21}(s) - A_2(s)Y_1 + B_2(s)Y_2 = 0 \\ (3,1) : & \quad X_1 - Y_2 = 0 \\ (3,2) : & \quad -X_1C_1(s) + X_2A_1(s) - N_{21}(s) = 0 \\ (3,3) : & \quad -X_1D_1(s) - X_2B_1(s) + I - N_{22}(s) = 0 \end{aligned} \quad (9.278)$$

Βάσει των σχέσεων (9.278) μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε έναν εσωτερικό μετασχηματισμό (*internal recoordination*) (Hayton et.al. 1990) στον μετασχηματισμό (9.276) με την βοήθεια των πινάκων (9.277) ο οποίος θα μας δώσει

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} M_{11}(s) & M_{12}(s) & 0 & I_p & -C_2(s) & -D_2(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) & 0 & 0 & A_2(s) & -B_2(s) \\ X_1 & X_2 & I_m & 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{ccc|ccc} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & 0 \\ -Y_1 & 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{r}_2} & 0 \\ -X_1 & -X_2 & 0 & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \begin{array}{ccc|ccc} I_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\tilde{r}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & 0 \\ Y_1 & 0 & 0 & 0 & I_{\tilde{r}_2} & 0 \\ X_1 & X_2 & 0 & 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] \times \left[ \begin{array}{ccc} I_p & -C_1(s) & -D_1(s) \\ 0 & A_1(s) & -B_1(s) \\ 0 & 0 & I_m \\ \hline -I_p & 0 & 0 \\ -Y_1 & -N_{11}(s) & -N_{12}(s) \\ -Y_2 & -N_{21}(s) & -N_{22}(s) \end{array} \right] = 0 \Leftrightarrow \\
 & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} I_p & M_{12}(s)+D_2(s)X_2 & 0 & I_p & -C_2(s) & -D_2(s) \\ 0 & M_{22}(s)+B_2(s)X_2 & 0 & 0 & A_2(s) & -B_2(s) \\ 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & I_m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} I_p & -C_1(s) & -D_1(s) \\ 0 & A_1(s) & -B_1(s) \\ 0 & 0 & I_m \\ \hline -I_p & 0 & 0 \\ 0 & -Y_1C_1(s)-N_{11}(s) & -Y_1D_1(s)-N_{12}(s) \\ 0 & 0 & -I_m \end{array} \right] = 0 \quad (9.279)
 \end{aligned}$$

Επειδή οι πίνακες στην σχέση (9.277) είναι σταθεροί και αντιστρέψιμοι. Οι σύνθετοι πίνακες της σχέσεως (9.279) θα ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες με τους πίνακες της πλήρους ισοδυναμίας (9.276) και συνεπώς ο μετασχηματισμός (9.279) θα είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός ή ισοδύναμο ο μετασχηματισμός που προκύπτει από τον μετασχηματισμό (9.279)

$$\begin{bmatrix} I_p & M_{12}(s)+D_2(s)X_2 \\ 0 & M_{22}(s)+B_2(s)X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_1(s) & D_1(s) \\ A_1(s) & B_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_2(s) & D_2(s) \\ A_2(s) & B_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1C_1(s)+N_{11}(s) & Y_1D_1(s)+N_{12}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.280)$$

θα είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Μετά από αλλαγή γραμμών στους ισοδύναμους πίνακες της σχέσης (9.280) έχουμε τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} M_{22}(s)+B_2(s)X_2 & 0 \\ M_{12}(s)+D_2(s)X_2 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(s) & B_1(s) \\ -C_1(s) & D_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(s) & B_2(s) \\ -C_2(s) & D_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1C_1(s)+N_{11}(s) & Y_1D_1(s)+N_{12}(s) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9.281)$$

ο οποίος αποδεικνύει το αντίστροφο του θεωρήματος.  $\square$



Βάσει του θεωρήματος 9.78 έχουμε λοιπόν ότι η γενικευμένη ισοδυναμία Morf συστημάτων ορίζει την ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων και συνεπώς θα έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\mathcal{U}\{\infty\}$ . Ένα ενδιαφέρον θεώρημα που συνδέει δύο τετράγωνα αντίστροφα συστήματα (δες ενότητα 8.5) και την γενικευμένη ισοδυναμία Morf συστημάτων δίνεται στην συνέχεια.

**Θεώρημα 9.79** Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο Π.Π.Σ. με

$$(\alpha) \quad \text{αριθμό εξόδων } \Sigma_1 = \text{αριθμό εξόδων } \Sigma_2 = \text{αριθμό εισόδων } \Sigma_1 = \text{αριθμό εισόδων } \Sigma_2$$

$$(\beta) \quad \det |G_1(s)| \neq 0, \det |G_2(s)| \neq 0$$

όπου  $G_1(s), G_2(s)$  οι συναρτήσεις μεταφοράς των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα. Εστω επίσης  $\Sigma_1', \Sigma_2'$  τα τετράγωνα αντίστροφα συστήματα των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ . Τότε θα έχουμε

$$\Sigma_1 \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma_1' \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \Sigma_2'$$

**Απόδειξη** Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι οι Rosenbrock πίνακες  $P_i'(s)$   $i=1,2$  των  $\Sigma_i'$   $i=1,2$  συνδέονται με τους πίνακες  $P_{M_i}$   $i=1,2$  με αλλαγές γραμμών και στηλών καθώς και στο γεγονός ότι η πλήρης ισοδυναμία ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την γενικευμένη Morf ισοδυναμία. □

#### 9.4 Περίληψη.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε το πρόβλημα της ισοδυναμίας δύο πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων (Π.Π.Σ.) στο πεδίο της συχνότητας. Πιο συγκεκριμένα στην ενότητα 9.2 παρουσιάσαμε μια ανασκόπηση των γνωστών ισοδύναμων μετασχηματισμών Π.Π.Σ. που έχουν την ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}$  πρδ. τάξη  $n$ , πεπερασμένους πόλους και μηδενικά του συστήματος, πεπερασμένους πόλους και μηδενικά μεταφοράς, πεπερασμένα αποσυζευγμένα μηδενικά. Η ανάγκη της ταυτόχρονης μελέτης του σημείου  $s=\infty$  με το μαγαδικό επίπεδο που επήλθε με τον Verghese (1978) οδήγησε στην δημιουργία καινούργιων μετασχηματισμών που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ . Την μελέτη αυτών των μετασχηματισμών που προήλθαν από τους Anderson *et al.* (1985), Pugh *et al.* (1987), Hayton *et al.* (1990) παρουσιάσαμε στην ενότητα 9.3.1. Ένα πλήθος ανοικτών ερωτημάτων που δημιουργήθηκαν με αυτά τα καινούργια είδη ισοδυναμίας και πιο συγκεκριμένα με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων απαντήσαμε στις ενότητες 9.3.2, 9.3.3. Μερικά από τα ερωτήματα αυτά τα οποία παρουσιάστηκαν και στην ενότητα 9.3.1 είναι τα εξής :

- 1) Διατηρεί η πλήρης ισοδυναμία τα αναλλοίωτα μηδενικά στο  $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ , τους αναλλοίωτους δείκτες γραμμών και στηλών, τους δυναμικούς δείκτες εισόδου και εξόδου, την γενικευμένη τάξη  $f$  και τον βαθμό  $d_R$  ενός συστήματος ;
- 2) Υπάρχει η δυνατότητα να ανάγουμε μια γενική Π.Π.Σ. σε μια πλήρη ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων ;
- 3) Ποια ειδική μορφή παίρνει η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων στην περίπτωση των δεξιά και αριστερά Π.Π.Σ. ;
- 4) Συνδέονται όλες οι ισχυρά μη αναγώγιμες Π.Π.Σ. με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς με έναν πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό ;
- 5) Μπορούμε να συνδέσουμε μια ελέγχσιμη (παρατηρήσιμη) Π.Π.Σ. με μια δεξιά (αριστερή) κλασματική Π.Π.Σ. μέσω ενός πλήρως ισοδύναμου μετασχηματισμού ;

Στην ενότητα 9.3.4 προτείνουμε μια γενίκευση της ισοδυναμίας συστημάτων Morf (Morf 1975, Levy *et al.* 1977) με σκοπό την διατήρηση της μηδενικής δομής συστημάτων στο  $\mathbb{C}\{w\}$ . Η καινούργια αυτή ισοδυναμία συστημάτων "γενικευμένη ισοδυναμία συστημάτων Morf" ορίζει την ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων και μας δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τετράγωνα αντίστροφα συστήματα. Στην διεθνή βιβλιογραφία θα συναντήσουμε και άλλα είδη ισοδυναμιών όπως η Brunovsky ισοδυναμία (Brunovsky equivalence) (Münzner & Prätzel–Wolters 1979, Prätzel–Wolters 1981), η εξωτερική ισοδυναμία (external equivalence) (Schumacher 1988), η ισοδυναμία μεταφοράς (transfer equivalence) (Heymann & Thorpe 1970, Blomberg 1983), η ισοδυναμία εισόδου–εξόδου (*input–output equivalence*) (Pugh *et al.* 1990), η τοπική ισοδυναμία συστημάτων (*local system equivalence*) (Cullen 1987), η ισοδυναμία ανάδρασης εξόδου (*feedback equivalence*) (Gracia *et al.* 1990) κ.α.. Ο λόγος που παρουσιάσαμε κατά κύριο λόγο την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων ήταν διότι έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\{w\}$ . Τα παραπάνω είδη ισοδυναμιών συστημάτων δεν έχουν αυτήν την ιδιότητα και σίγουρα θα ήταν ενδιαφέροντα η εύρεση συνθηκών που θα καθιστούσαν αυτές τις ισοδυναμίες να ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας που ορίζει η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων. Ενδεικτικά αναφέραμε στο κεφάλαιο αυτό την ισοδυναμία Morf.

Τέλος ένα επιπλέον ανοικτό ερωτήμα που απορρέει από αυτό το κεφάλαιο αφορά την εύρεση της ισοδυναμίας ιδιόμορφων Π.Π.Σ. της μορφής (8.23) τα οποία έχουν μελετηθεί από τους Blomberg (1983), Willems (1986, 1991) και Kuijper (1992) και τα οποία δεν έχουν συνάρτηση μεταφοράς όπως τα συνηθισμένα καινικά συστήματα (δες (8.2)).

**BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (I), *J.Austral.Math.Soc.Ser.*, **B 27**, 194–222.
- [B1] Barnett S., 1971, *Matrices in Control Theory with applications to linear programming*, Van Nostrand Reinhold Company, London.
- [B2] Blomberg H. and Ylinen R., 1983, *Algebraic Theory of Multivariable Linear Systems.*, Academic Press, New York.
- [B3] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations in generalized state–space form for polynomial system matrices and the definition of poles, zeros and decoupling zeros at infinity, *Int.J.Control*, **33**, 393–411
- [C1] Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (II)., *J.Austral.Math.Soc.Ser. B*, **27**, 223–237.
- [C2] Cullen D.J., 1987, Underlying algebraic framework of equivalence relations on linear systems., *Int.J.Control*, **45**, 1415–1425.
- [F1] Ferreira P.M.G., 1980, Infinite system zeros., *Int.J.Control*, **32**, 731–735.
- [F2] Fragulis G., Mertzios B.G. and Vardulakis A.I., 1991, Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion., *Int.J.Control*, **53**, 431–443.
- [F3] Fuhrmann P.A., 1977, On strict system equivalence and similarity, *Int.J.Control*, **25**, 5–10
- [G1] Gantmacher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*. New York : Chelsea.
- [G2] Gracia J.M., Hoyos J. De and Zaballa I., 1990, A characterization of feedback equivalence., *Siam J.Control and Optimization*, **28**, 1103–1112.
- [H1] Hayton G.E., Fretwell P. and Pugh A.C., 1986, Fundamental equivalence of generalized state–space systems. *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC–31**, 431–439.
- [H2] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications., *Int.J.Control*, **47**, 53–64

- [H3] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1989, Matrix pencil equivalents of a general polynomial matrix., *Int.J.Control*, **49**, 1797–1987
- [H4] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1990, Infinite frequency structure-preserving transformations for general polynomial system matrices., *Int.J.Control*, **52**, 1–14.
- [H5] Heymann M. and Thorpe J.A., 1970, Transfer equivalence of linear dynamical systems., *Siam J. Control*, **8**, 19–40.
- [J1] Janssen P.H., 1988, General results on the McMillan degree and the Kronecker indices of ARMA and MFD models., *Int.J.Control*, **48**, 591–608.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems*, Prentice–Hall, Enclewood Cliffs, N.J. .
- [K2] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, Generalized state space system matrix equivalent of a Rosenbrock system matrix., submitted to *IMA Journal of Mathematical Control and its Information* (accepted in European Control Conference in Grenoble, July 1991).
- [K3] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, Matrix fractions and full system equivalence., *IMA Journal of Mathematical Control and its Information*, **9**, 147–160.
- [K4] Karampetakis N.P., A.C.Pugh, A.I.Vardulakis and G.E.Hayton, 1992, Minimal realizations and equivalent generalized state–space system matrices of a Rosenbrock system matrix., presented in *SINS'92* and submitted to *Int.J.Control*.
- [K5] Kuijper M., 1992, First–order representations of linear systems., Ph.D.Thesis, Centre for Mathematics and Computer Science., Amsterdam, Netherlands.
- [L1] Levy B, Kung S–Y, Morf M. and Kailath T., 1977, A unification of system equivalence definitions., *Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, pp.795–800.
- [M1] Morf M., 1975, Extended system matrices – transfer functions and system equivalence., *Proceedings of the 1975 IEEE Conference on Decision and Control*, Houston, pp.199–206.

- [M2] Münzner H.F. and Prätzel–Wolters D., 1979, Minimal bases of polynomial modules, structural indices and Brunovsky–transformations., *Int. J. Control*, **30**, 291–318.
- [P1] Pernebo L., 1977, Notes on strict system equivalence., *Int.J.Control*, **25**, 21–38.
- [P2] Prätzel–Wolters D., 1981, Brunovsky equivalence of system matrices : The reachable case., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC–26**, 429–434.
- [P3] Pugh A.C., 1976, The McMillan degree of a polynomial system matrix., *Int.J.Control*, **24**, 129–135.
- [P4] Pugh A.C. and Hayton G.E., The extended state–space and matrix pencils.
- [P5] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **27**, 657–672.
- [P6] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, On the zeros and poles of a rational matrix., *Int.J.Control*, **30**, pp.213–226.
- [P7] Pugh A.C., Hayton G.E and Fretwell P., 1987, On transformations of matrix pencils and implications in linear system theory., *Int.J.Control*, **45**, 529–548.
- [P8] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1990, On two transformations in the generalized theory of linear systems, *Mathematics Report Number A109*, Loughborough University, Loughborough.
- [P9] Pugh A.C., Hayton G.E. and Walker A.B., 1990, System matrix characterization of input–output equivalence., *Int.J.Control*, **51**, 1319–1326.
- [P10] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1989, Transformation issues in linear system theory., *Proceedings M.T.N.S.–89*.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State–Space and Multivariable Theory*, Nelson, London.
- [R2] Rosenbrock H.H., 1974, Structural properties of linear dynamical systems., *Int.J.Control*, **18**, 297–299.
- [R3] Rosenbrock H.H., 1977a, *Int.J.Control*, **25**, 1.
- [R4] Rosenbrock H.H., 1977b, The transformation of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **25**, 11–19.

- [S1] Smith M.C., 1981, Matrix fractions and strict system equivalence., *Int.J.Control*, **34**, 869–883.
- [S2] Schumacher J.M., 1988, Transformations of linear systems under external equivalence., *Linear Algebra and its Applications*, **102**, 1–33.
- [T1] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1988, A singular system realization for arbitrary matrix fraction descriptions., *ISCAS'88*, 615–618.
- [T2] Taylor G.E. and Pugh A.C., 1985, Equivalence of generalized state–space systems : New results., *Proceedings of M.T.N.S. '85*, 323–337.
- [V1] Van Der Weiden A.J.J., 1983, The use of structural properties in linear multivariable control system design., Ph.D.Thesis, Department of Electrical Engineering, Delft University of Technology, Netherlands.
- [V2] Van Der Weiden A.J.J. and Bosgra O.H., 1979, The determination of structural properties of a linear multivariable system by operation of system similarity. 2. Nonproper systems in generalized state–space form., *Int.J.Control*, **32**, pp.489.
- [V3] Van Der Weiden A.J.J., Bosgra O.H. and Valk P., 1980, An algorithm for the decomposition of a system matrix in generalized state–space form., *Report 175–N*, Lab. Meas. Control, Delft University of Technology.
- [V4] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis methods*, John Wiley & Sons.
- [V5] Vardulakis A.I., 1991, On the transformation of a polynomial matrix model of a Linear Multivariable System to generalized state–space form., presented in the 30th *IEEE Conference on Decision and Control Transactions on Automatic Control*, December 11–13, 1991, Brighton, England.
- [V6] Verghese G.C., 1978, *Infinite frequency behaviour in generalized dynamical systems.*, Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, CA.

- [V7] Verghese G.C. and Kailath T., 1979, Impulsive behaviour in dynamical systems : Structure and significance., *Proc. Int. Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Vol.3, P.Dewilde, Ed. ; North Hollywood, Ca., Western Periodicals Co., p.162.
- [V8] Verghese G.C. ,Levy B.C. and Kailath T., 1981, A generalized state-space for singular systems., *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**, 811–831.
- [W1] Walker A.B., 1988, *Equivalence transformations for linear systems.*, Ph.D. Thesis , Hull University, Hull, England.
- [W2] Walker A.B., Hayton G.E. and Pugh A.C., 1988, Linear system requirements of matrix transformations., *Proceedings in 1st IMA Conference on the Application of Matrices*, Bradford, UK.
- [W3] Willems J.C., 1986, From Time Series to Linear System – Part I. Finite dimensional time invariant systems., *Automatica*, **22**, pp.561–580.
- [W4] Willems J.C., 1991, Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems., *IEEE Trans.Auto.Control*, **36**, pp.259–294.
- [W5] Wolovich W.A., 1973, Determination of state-space representations for linear multivariable systems., *Automatica*, **9**, 97–106.
- [W6] Wolovich W.A., 1974, *Linear Multivariable Systems.*, Springer-Verlag, New York.
- [W7] Wolovich W.A. and Guidorzi R., 1977, A general algorithm for determining state-space representations., *Automatica*, **13**, 295–299.
- [Z1] Zhang S-Y, 1989, Polynomial matrix linearization and strongly irreducible realization for singular systems., *Int.J.Control*, **49**, 471–479.



## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 10

### ΜΙΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΕΝΝΟΙΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- 10.1 Εισαγωγή.
- 10.2 Βασικές θεμελιώδεις ισοδυναμίες.
- 10.3 Μια θεμελιώδης ισοδυναμία για γενικές Π.Π.Σ..
- 10.4 Γενίκευση της ισοδυναμίας Π.Π.Σ. του Wolovich.
- 10.5 Περίληψη.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### 10.1 Εισαγωγή.

Στο κεφάλαιο 9 μελετήσαμε έννοιες ισοδυναμίας συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας, ξεκινώντας από ισοδυναμίες συστημάτων που διατηρούν αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}$  πρδ. αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων (Rosenbrock 1970), γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων (Fuhrmann 1977, Pugh & Shelton 1978, Smith 1981), και φτάνοντας τέλος σε ισοδυναμίες συστημάτων που έχουν την επιπλέον ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτη και την μηδενική δομή συστημάτων στο  $s=\infty$  πρδ. ισχυρή ισοδυναμία συστημάτων (Vergheze 1978, Anderson et al. 1985), τέλεια ισοδυναμία συστημάτων (Pugh et al. 1987), πλήρη ισοδυναμία συστημάτων (Hayton et al. 1990).

Στο όλο αυτό διάστημα δημιουργήθηκε η ανάγκη μιας διαφορετικής έκφρασης της έννοιας της ισοδυναμίας συστημάτων από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου. Με πρώτο τον Wolovich (1974) και στην συνέχεια τον Pernebo (1977) και τους Hinrichsen & Prätzel-Wolters (1980) έχουμε μια ερμηνεία της αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων βάσει συγκεκριμένων αμφιέσεων (απεικονίσεων ένα προς ένα και επί) μεταξύ του "πεπερασμένου" χώρου λύσεων-εισόδων δύο Π.Π.Σ..

Οι παραπάνω μελέτες ισοδυναμιών συστημάτων στο πεδίο του χρόνου θεωρήθηκαν ελλιπείς μετά το 1978 λόγω της ανακάλυψης της επιπλέον "κρουστικής συμπεριφοράς" των Π.Π.Σ. (Vergheze 1978). Η ανάγκη εύρεσης καινούργιων ισοδυναμιών συστημάτων στο πεδίο του χρόνου που θα λαμβάνουν υπόψη και την "πεπερασμένη" αλλά και την "κρουστική" συμπεριφορά των Π.Π.Σ. οδήγησε τον Vergheze (1978) και ακολούθως τους Hayton et al. (1986) στην δημιουργία μιας θεμελιώδους ισοδυναμίας μεταξύ Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Η θεμελιώδης αυτή ισοδυναμία, η οποία ταυτίζεται με την τέλεια ισοδυναμία συστημάτων, βασίζεται σε συγκεκριμένες αμφιέσεις μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" λύσεων-εισόδων δύο Π.Π.Σ..

Ένα αναπάντητο ερώτημα το οποίο τίθεται από τα παραπάνω αλλά και το οποίο κατά ένα μέρος εκφράστηκε από τον Vergheze (1978) είναι το εξής :

*Υπάρχει μια θεμελιώδης έννοια ισοδυναμίας στο πεδίο του χρόνου  
για γενικές Π.Π.Σ. η οποία να ταυτίζεται με την  
πλήρη ισοδυναμία συστημάτων ;*

*Το παραπάνω ερώτημα θα απαντήσουμε στην συνέχεια του κεφαλαίου αυτού προτείνοντας μια θεμελιώδη ισοδυναμία στο πεδίο του χρόνου μεταξύ γενικών Π.Π.Σ. η οποία θα δείξουμε ότι είναι μια διαφορετική έκφραση της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων, Μια γενίκευση της γνωστής ισοδυναμίας συστημάτων η οποία προτάθηκε από τον Wolovich (1974) θα μας απασχολήσει επιπλέον στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.*

## 10.2 Βασικές θεμελιώδεις ισοδυναμίες.

Θεωρείστε μια γραμμική Π.Π.Σ. της μορφής

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (10.1\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (10.1\beta)$$

όπου  $\rho := d/dt$  είναι ο τελεστής διαφόρισης,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$ ,  $\text{rank}_{\mathbb{R}(\rho)} A(\rho) = r$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$ ,  $D(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$ ,  $u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  το **διάνυσμα εισόδου**,  $u(t) \in C_p^1$  και  $\rho^i u(t)|_{t=0} =: u^{(i)}(0-)$ ,  $i=1,2,\dots,q$  είναι γνωστά για κάποια  $q \in \mathbb{N}$ ,  $\beta(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$  είναι το **διάνυσμα ψευδοκατάστασης** και  $y(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  είναι το **διάνυσμα εξόδου**. Είδαμε στο κεφάλαιο 9 ότι το πιο γενικό είδος ισοδυναμίας συστημάτων, στο πεδίο της συχνότητας, που διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή τέτοιων συστημάτων στο  $\mathbb{C}$  είναι η γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων (Fuhrmann 1977, Pugh & Shelton 1978, Smith 1981). Μια ερμηνεία της ισοδυναμίας αυτής στο πεδίο του χρόνου δόθηκε από τον Pernebo (1977) και παρουσιάζεται στο επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 10.1** (Pernebo 1977) Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο γενικές Π.Π.Σ. της μορφής (10.1). Οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι γενικευμένα αντιστρέψιμα ισοδύναμες εαν—ν

- 1) υπάρχει μια αμφίεση μεταξύ των "πεπερασμένων" χώρων λύσεων—εισόδων των Π.Π.Σ.  $\Sigma_1, \Sigma_2$  της μορφής

$$\begin{bmatrix} \beta_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\rho) & Y(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

- 2) η αμφίεση (10.2) είναι τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μεταθέτεται :

$$\begin{array}{ccc} X_u^2 & (*) & \\ \uparrow & \searrow & Y_u \\ X_u^1 & \nearrow & \end{array}$$

**Διάγραμμα 10.1**  $X_u^1, X_u^2$  είναι οι χώροι λύσεων  $\beta_i(t)$   $i=1,2$  για συγκεκριμένη είσοδο και για όλες τις πιθανές αρχικές συνθήκες του  $\beta(t)$  και  $Y_u$  είναι ο χώρος των εξόδων που αντιστοιχούν στην είσοδο  $u(t)$ .  $\square$

Θα πρέπει να τούσουμε εδώ ότι το παραπάνω λήμμα αναφέρεται στην αντιστρέψιμη ισοδυναμία αλλά λόγω του ότι η αντιστρέψιμη ισοδυναμία και η γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας (θεώρημα 9.8) δεν προκύπτει καμία σύγκριση. Το μειονέκτημα της παραπάνω ερμηνείας είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό της γενικευμένης αντιστρέψιμης ισοδυναμίας συστημάτων σε σχέση με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι οι "κρουστικές" λύσεις-είσοδοι δεν μελετούνται κατά τον ίδιο βαθμό με τις "πεπερασμένες" λύσεις-εισόδους όπως ακριβώς δεν μελετάται στην γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία κατά τον ίδιο βαθμό το σημείο  $s=\infty$  με κάθε σημείο  $s \in \mathbb{C}$ . Η παρατήρηση αυτή φαίνεται καθαρά στο επόμενο παράδειγμα :

**Παράδειγμα 10.2** Θεωρείστε την γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} \rho-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \rho & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \rho-1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \quad (\text{E.1})$$

Θεωρείστε την Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  :

$$\begin{bmatrix} \rho-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.2}\alpha)$$

$$y_1(t) = (1 \ 0 \ 1) \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.2}\beta)$$

με λύση

$$x(t) := \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t x_1(0-) + \int_0^t e^{(t-\tau)} u(\tau) d\tau \\ x_3(0-) \delta(t) + u(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3}\alpha)$$

και

$$y_1(t) = e^t x_1(0-) + \int_0^t e^{(t-\tau)} u(\tau) d\tau = x_1(t) \quad (\text{E.3}\beta)$$

Θεωρείστε επίσης την Π.Π.Σ.  $\Sigma_2$

$$(\rho-1) \xi(t) = u(t) \quad (\text{E.4}\alpha)$$

$$y_2(t) = \xi(t) \quad (\text{E.4}\beta)$$

με λύση

$$y_2(t) = \xi(t) = e^t \xi_1(0-) + \int_0^t e^{(t-\tau)} u(\tau) d\tau \quad (\text{E.5})$$

Από τον δεξιό πίνακα του γενικευμένου αντιστρέψιμου μετασχηματισμού (E.1), που συνδέει τις δύο αυτές Π.Π.Σ., παίρνουμε την απεικόνιση μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ -0 & 0 & -0 & | & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

των Π.Π.Σ. (E.2) και (E.4). Μπορούμε κάλλιστα να παρατηρήσουμε ότι

(α) η απεικόνιση (E.6) είναι μια αμφίσηση μεταξύ των "πεπερασμένων" λύσεων-εισόδων των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ .

(β) τα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  έχουν τις ίδιες εξόδους  $y_2(t) = \xi(t) = x_1(t) = y_1(t)$ .

όπως φαίνεται και από το λήμμα 10.1. Είναι άξιο παρατήρησης παρ'όλα αυτά ότι η Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  περιέχει και "κρουστικές" λύσεις σε αντίθεση με την Π.Π.Σ.  $\Sigma_2$  και συνεπώς δεν είναι δυνατό να υπάρχει μια αμφίσηση ταυτόχρονα μεταξύ και "πεπερασμένων" αλλά και "κρουστικών" λύσεων-εισόδων των δύο Π.Π.Σ.. □

Η ανάγκη αυτή, της εξίσου μελέτης της "πεπερασμένης" και "κρουστικής" συμπεριφοράς Π.Π.Σ., οδήγησε τον Verghese (1978) αρχικά, και τους Hayton et al. (1986) αργότερα, στην διατύπωση μιας θεμελιώδους ισοδυναμίας για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων η οποία δίνεται από τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 10.3** (Hayton *et al.* 1986) Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της ακόλουθης μορφής :

$$E_i \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \quad i=1,2 \quad (10.3\alpha)$$

$$y_i(t) = C_i x_i(t) + D_i u(t) \quad (10.3\beta)$$

Οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα λέγονται **θεμελιώδεις ισοδύναμες** (*fundamentally equivalent*) εαν—ν υπάρχει

1) ένας σταθερός μονομορφισμός

$$\begin{bmatrix} x_2(s) \\ -u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ -u(s) \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

όπου  $x_i(s)$   $i=1,2$  οι μετασχηματισμοί Laplace των  $x_i(t)$   $i=1,2$  αντίστοιχα

και

2) ένας σταθερός επιμορφισμός

$$\begin{bmatrix} E_2 x_2(0^-) \\ -y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 x_1(0^-) \\ -y_1(s) \end{bmatrix}, \quad X E_1 = 0 \quad (10.5) \quad \square$$

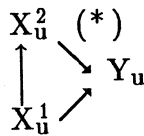
Οι συνθήκες (1) και (2) του ορισμού 10.3 είναι αναγκαίες για την ύπαρξη ενός "ισομορφισμού" μεταξύ των "πεπερασμένων" αλλά και "κρουστικών" λύσεων—εισόδων δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (Hayton *et al.* 1986). Εντελώς όμοια με το θεώρημα 7.4 μπορούμε να δείξουμε ότι οι συνθήκες αυτές είναι και ικανές.

**Θεώρημα 10.4** Εστω δύο Π.Π.Σ.  $\Sigma_1, \Sigma_2$  στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της μορφής (10.3). Οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι θεμελιώδεις ισοδύναμες (*fundamentally equivalent*) εαν—ν

1) υπάρχει μια αμφίεση μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" λύσεων—εισόδων της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

2) η αμφίεση (10.6) είναι τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μεταθέεται



**Διάγραμμα 10.2**  $X_u^1, X_u^2$  είναι οι χώροι λύσεων  $x_i(t)$   $i=1,2$  για συγκεκριμένη είσοδο και για όλες τις πιθανές αρχικές συνθήκες του  $x(t)$  και  $Y_u$  είναι ο χώρος των εξόδων που αντιστοιχούν στην είσοδο  $u(t)$ .

#### Απόδειξη

( $\Leftarrow$ ) Δες Hayton *et al.* (1986).

( $\Rightarrow$ ) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια αμφίεση μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων των Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής (10.6). Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της σχέσεως (10.6) παίρνουμε την αμφίεση μεταξύ των συνόλων  $X_u^i$   $i=1,2$  των ρητών συναρτήσεων που αποτελούν τους μετασχηματισμούς Laplace των χώρων λύσεων-εισόδων των δύο Π.Π.Σ.

$$\begin{bmatrix} x_2(s) \\ -u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ -u(s) \end{bmatrix} \quad (10.7)$$

και συνεπώς η συνθήκη (1) του ορισμού (10.3) ικανοποιείται.

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (10.3α) έχουμε

$$(sE_i - A_i) x_i(s) = E_i x_i(0-) + B_i u(s) \quad i=1,2 \quad (10.8)$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις (10.7) και (10.8) παίρνουμε ότι

$$x_2(s) = N x_1(s) - Y u(s) \Rightarrow$$

$$(sE_2 - A_2)^{-1} [E_2 x_2(0-) + B_2 u(s)] = N (sE_1 - A_1)^{-1} [E_1 x_1(0-) + B_1 u(s)] - Y u(s) \Rightarrow$$



$$\begin{aligned}
[E_2 x_2(0-)] &= (sE_2 - A_2)N(sE_1 - A_1)^{-1} [E_1 x_1(0-)] + \\
&+ [(sE_2 - A_2)N(sE_1 - A_1)^{-1} B_1 - (sE_2 - A_2)Y - B_2] u(s)
\end{aligned}
\tag{10.9}$$

Η παραπάνω συνθήκη ισχύει για κάθε  $u(s)$  και συνεπώς και για  $u(s)=0$ , γεγονός το οποίο μας ανάγει στην σχέση (7.9) του θεωρήματος 7.4, βάσει της οποίας είχαμε πάρει τον σταθερό επιμορφισμό

$$\begin{bmatrix} E_2 x_2(0-) \\ -y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 x_1(0-) \\ -y_1(s) \end{bmatrix}
\tag{10.10}$$

Το ότι  $y_1(s)=y_2(s)$  είναι προφανές από την συνθήκη (2) του ορισμού 10.4 και συνεπώς η συνθήκη (2) του ορισμού 10.3 έχει αποδειχθεί.  $\square$

Βασικό συμπέρασμα του θεωρήματος 10.4 όπως και στο θεώρημα 7.4 είναι η αντικατάσταση των συνθηκών (1) και (2) του ορισμού 10.3 με τις αντίστοιχες συνθήκες αμφίεσης του θεωρήματος 10.4. Ένα βασικό λήμμα (ανάλογο του λήμματος 7.5) που συνδέει την θεμελιώδη ισοδυναμία συστημάτων, η οποία είναι μια ισοδυναμία συστημάτων στο πεδίο του χρόνου, με την τέλεια ισοδυναμία συστημάτων, η οποία είναι μια ισοδυναμία συστημάτων στο πεδίο της συχνότητας, δίνεται στην συνέχεια.

**Λήμμα 10.5** Εστω δύο Π.Π.Σ.  $\Sigma_1, \Sigma_2$  στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της μορφής (10.3). Οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι τέλεια ισοδύναμες εάν-ν ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες του θεωρήματος 10.4.

**Απόδειξη** Έχει δειχθεί από τους Hayton *et al.* (1986) ότι η τέλεια ισοδυναμία συστημάτων ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την θεμελιώδη ισοδυναμία συστημάτων που με την σειρά της από το θεώρημα 10.4 μπορεί να αντικατασταθεί από τις δύο συνθήκες του θεωρήματος 10.4..  $\square$

Ενα ανοικτό ερώτημα το οποίο γεννιέται από τις δύο παραπάνω διατυπώσεις θεμελιώδους ισοδυναμίας (ορισμός 10.3, θεώρημα 10.4) για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων είναι το εξής :

**Υπάρχει ανάλογη διατύπωση θεμελιώδους ισοδυναμίας για γενικές Π.Π.Σ. ;**

Το ερώτημα αυτό τέθηκε για πρώτη φορά από τον Verghese (1978) και πιο πρόσφατα από τον Walker (1988). Η λύση του συνεπώς που θα αποτελέσει και το επίκεντρο της παρακάτω ενότητας αποτελεί μια γενίκευση όλων των παραπάνω γνωστών αποτελεσμάτων.

### 10.3 Μια θεμελιώδης ισοδυναμία για γενικές Π.Π.Σ..

Θεωρήστε την Π.Π.Σ.  $\Sigma$  της σχέσεως (10.1). Εστω  $X_u$  το σύνολο των λύσεων της (10.1α) το οποίο αντιστοιχεί σε μια είσοδο  $u(t)$  για όλες τις πιθανές αρχικές συνθήκες του  $\beta(t)$  και των  $q-1$  παραγώγων του, όπου το  $q$  προσδιορίζεται από την σχέση

$$P(s) = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} = P_0 + P_1 s + \dots + P_q s^q \quad (10.11)$$

Εστω τώρα ότι το σύνολο  $X_u$  συνδέεται με ένα άλλο σύνολο  $X_u^1$  το οποίο ορίζεται ως το πεδίο τιμών της σχέσεως

$$\begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}(\rho) & \bar{Y}(\rho) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

όπου  $\bar{N}(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$  και  $\bar{Y}(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ . Μπορεί εύκολα να δει κανείς ότι η σχέση (10.12) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}(\rho) & \bar{Y}(\rho) & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\xi_1(t) = N(\rho) \xi(t) \quad (10.13)$$

όπου  $\xi_1(t) = [\beta_1(t)^T, -u(t)^T, y(t)^T]^T$ ,  $N(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\bar{r}_1 \times \bar{r}}$  με  $\bar{r}_1 = r_1 + p + m$ ,  $\bar{r} = r + p + m$  και  $\xi(t) = [\beta(t)^T, -u(t)^T, y(t)^T]^T$  είναι η ψευδοκατάσταση της καινοτικής πολυωνυμικής περιγραφής του συστήματος (10.1) (δες (8.3)) :

$$T(\rho) \xi(t) = U u(t) \quad (10.14\alpha)$$

$$y(t) = V \xi(t) \quad (10.14\beta)$$

Εστω τώρα  $X_u$  το σύνολο λύσεων  $\xi(t)$  του συστήματος (10.14α) το οποίο αντιστοιχεί σε μια δεδομένη είσοδο  $u(t)$  για όλες τις πιθανές αρχικές συνθήκες του  $\xi(t)$  και των  $q-1$  παραγώγων του. Εστω επίσης ότι το σύνολο  $X_u$  απεικονίζεται σε ένα άλλο σύνολο  $X_u^1$  το οποίο ορίζεται ως το σύνολο των συναρτήσεων  $\xi_1(t)$  που ανήκουν στο πεδίο τιμών της σχέσης

$$\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(\rho) & Y(\rho) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

όπου  $M(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\bar{r}_1 \times \bar{r}}$  και  $Y(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\bar{r}_1 \times m}$ . Εστω

$$M(\rho) = [M_1(\rho), M_2(\rho), M_3(\rho)] \quad (10.16)$$

όπου  $M_1(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\bar{r}_1 \times \bar{r}}$ ,  $M_2(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\bar{r}_1 \times m}$ ,  $M_3(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\bar{r}_1 \times p}$ . Από την σχέση (10.15) και την μορφή του διανύσματος  $\xi(t)$  θα πάρουμε ότι :

$$\begin{aligned}
 \xi_1(t) &= (M_1(\rho), M_2(\rho), M_3(\rho)) \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + Y(\rho)u(t) = \\
 &= (M_1(\rho), M_2(\rho)-Y(\rho), M_3(\rho)) \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \\
 &= M'(\rho) \xi(t) \tag{10.17}
 \end{aligned}$$

Για τους παραπάνω λόγους θα ενδιαφερόμαστε στην συνέχεια μόνο για σχέσεις της μορφής (10.13) ή (10.17). Πολλοί συγγραφείς (Wolovich 1974, Pernebo 1977, Verghese 1978, Hinrichsen & Prätzel-Wolters 1980, Anderson *et al.* 1985, Coppel & Cullen 1985, Vardulakis 1991) έχουν μελετήσει την δράση μιας γραμμικής απεικόνισης της μορφής (10.13) ή (10.17) στον χώρο λύσεων μιας Π.Π.Σ.. Τα αποτελέσματα μιας τέτοιας απεικόνισης δεν έχουν πλήρως προσδιορισθεί παρά μόνο στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει μόνο η "πεπερασμένη" συμπεριφορά της Π.Π.Σ.. Ακόμη και στην περίπτωση που η "κρουστική" συμπεριφορά της Π.Π.Σ. (10.1) λήφθηκε υπόψη (Anderson *et al.* 1985, Coppel & Cullen 1985, Vardulakis & Fragulis 1989) πλήρης μελέτη δεν έγινε, ειδικά όσον αφορά το πότε η (10.13) ή (10.17) μπορεί να θεωρηθεί ως απεικόνιση ή απλά ως σχέση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα που επιβεβαιώνει ότι η (10.13) δεν είναι πάντα απεικόνιση είναι το παράδειγμα 7.7. Ένα επίσης ανοικτό ερώτημα αφέθηκε ανοικτό όσον αφορά το πότε η (10.13) ή (10.17) ορίζει μια ένα προς ένα απεικόνιση. Τα ερωτήματα αυτά απαντήσαμε στο κεφάλαιο 7, για  $u(t)=0$ , διατυπώνοντας συγκεκριμένες συνθήκες (θεώρημα 7.8, θεώρημα 7.11) που πρέπει να πληρούν οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $N(\rho)$  στην σχέση (10.14) και (10.13) αντίστοιχα έτσι ώστε η (10.13) να είναι απεικόνιση ή και ένεση. Είδαμε μάλιστα ότι οι συνθήκες αυτές ισχύουν και για περιπτώσεις μη τεράγωνων πινάκων  $T(\rho)$  (Παρατήρηση 7.15). Στηριζόμενοι στα αποτελέσματα αυτά μπορούμε τώρα να συνάγουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα που αφορούν γενικές Π.Π.Σ..

**Λήμμα 10.6** Θεωρείστε την εξής Π.Π.Σ.

$$T(\rho)\xi(t) = u u(t) \quad (10.18\alpha)$$

$$y(t) = M(\rho)\xi(t) \quad (10.18\beta)$$

όπου  $T(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$ ,  $\det[T(\rho)] \neq 0$  και  $M(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$ . Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε η σχέση (10.18β) να είναι απεικόνιση είναι να ικανοποιείται η McMillan συνθήκη του θεωρήματος 7.8, πρδ.

$$\delta_M \begin{bmatrix} T(\rho) \\ M(\rho) \end{bmatrix} = \delta_M(T(\rho)) \quad (10.19)$$

Σύμφωνα επίσης με το θεώρημα 7.11 και την παρατήρηση 7.15, μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την Π.Π.Σ. (10.18) να είναι παρατηρήσιμη πρδ. μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον υπολογισμό της μεταβλητής  $\xi(t)$  για  $t \geq 0^-$ , χρησιμοποιώντας μόνο την γνώση της εισόδου και της εξόδου, είναι ο σύνθετος πίνακας

$$\begin{bmatrix} T(\rho) \\ M(\rho) \end{bmatrix} \quad (10.20)$$

να μην περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{w\}$  και να ικανοποιεί την McMillan συνθήκη (10.19).

**Απόδειξη** Η απόδειξη του γεγονότος ότι η σχέση (10.18β) είναι απεικόνιση είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν του θεωρήματος 7.8. Οσον αφορά την απόδειξη της παρατηρησιμότητας δηλ. η ικανότητα υπολογισμού της μεταβλητής  $\xi(t)$  για  $t \geq 0^-$  έχει ως εξής. Υποθέτουμε αρχικά ότι  $u(t)=0$  και βρίσκουμε βάσει του θεωρήματος 7.11, ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να προσδιορίσουμε μοναδικά την ελεύθερη απόκριση του συστήματος βάσει της εξόδου  $y(t)$   $t \geq 0^-$ , είναι ο πίνακας (10.20) να μην περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{w\}$  και να ικανοποιεί την McMillan συνθήκη (10.19). Η υπόθεση μας ότι  $u(t)=0$  δεν είναι καθολου περιοριστική λόγω του ότι η ελεύθερη απόκριση είναι αυτή που προσδιορίζει μοναδικά την εξέλιξη του συστήματος πρδ. την ολική απόκριση. □

**Συμπέρασμα 10.7** Στην περίπτωση που ο πίνακας  $N(\rho)=N$  είναι σταθερός πίνακας στην σχέση (10.13) τότε η σχέση (10.13) είναι πάντα απεικόνιση λόγω του ότι ικανοποιεί τις McMillan συνθήκες (οι σταθεροί πίνακες δεν παίζουν ρόλο στον McMillan βαθμό ενός πολυωνομικού πίνακα). Για τον λόγο αυτό στην καινουργική μορφή του συστήματος (10.1) η σχέση που μας δίνει την έξοδο  $y(t)$  (10.14β) είναι πάντα απεικόνιση.  $\square$

**Συμπέρασμα 10.8** Από τα θεωρήματα 7.8 και 7.11 καθώς και το λήμμα 10.6 έχουμε ότι μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για την σχέση (10.12) να είναι ένεση (και κατά συνέπεια βάσει του ορισμού της αμφίεση) είναι να ικανοποιεί την McMillan συνθήκη

$$\delta_M \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \\ -\bar{N}(\rho) & -\bar{Y}(\rho) \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} = \delta_M \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

και ο σύνθετος πίνακας

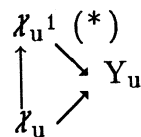
$$\begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ -C(\rho) & D(\rho) \\ -\bar{N}(\rho) & -\bar{Y}(\rho) \\ 0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

να μην περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ .  $\square$

Εαν τώρα οι πίνακες  $T(\rho)$  και  $N(\rho)$  στις σχέσεις (10.13), (10.14) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και ικανοποιούν τις McMillan συνθήκες του θεωρήματος 7.8 τότε η σχέση (10.13) είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα απεικόνιση. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι διότι ο χώρος λύσεων  $\mathcal{X}_0$  του ομογενούς συστήματος (10.14α) (Vardulakis 1991, Verghese 1978, κεφάλαιο 6) αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο με διάσταση ίση με την γενικευμένη τάξη  $f := \delta_M(T(s))$  του συστήματος και επειδή η σχέση (10.13) είναι αμφίεση μεταξύ των χώρων  $\mathcal{X}_0$

και  $\mathcal{X}_0^1$ , θα διατηρεί αναλλοίωτη την γενικευμένη τάξη του συστήματος. Υπάρχει επίσης ένας υπόχωρος του  $\mathcal{X}_0$  ο οποίος μπορεί να ορισθεί ως ο ισχυρά ελέγξιμος χώρος (*strongly controllable subspace*) (Verghese 1978, κεφ. 8) του συστήματος (10.14). Τέτοιοι υπόχωροι διατηρούνται αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής (10.13).

Ας υποθέσουμε ότι το  $\Sigma_1$  είναι μια Π.Π.Σ. στην καινική της πολυωνυμική περιγραφή η οποία έχει ως χώρο λύσεων το σύνολο  $\mathcal{X}_u^1$  το οποίο αντιστοιχεί σε μια δεδομένη είσοδο  $u(t)$  και για όλες τις πιθανές αρχικές συνθήκες και έχει μια σχέση εξόδου (\*) τέτοια ώστε το διάγραμμα 10.3 να μεταθέεται. Το  $\Sigma_1$  δεν υπάρχει πάντα όπως φαίνεται στο παράδειγμα 7.16 παρά μόνο κάτω από ορισμένες αναγκαίες συνθήκες που επισημάναμε στο κεφάλαιο 7 (αριθμός των εξόδων  $\xi_1(t)$  θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος ή ίσος και από το πλήθος των πεπερασμένων διαιρετών του  $I(\rho)$  και των απείρων διαιρετών του ίδιου πίνακα συν ένα) δίνοντας έτσι μια ιδιομορφία στις Π.Π.Σ. που διαθέτουν και κρουστική συμπεριφορά σε αντίθεση με τις Π.Π.Σ. με πεπερασμένη συμπεριφορά μόνο, όπου η ύπαρξη του συστήματος  $\Sigma_1$  είναι δεδομένη (Pernebo 1977). Τότε το σύστημα  $\Sigma_1$  δεν θα έχει μόνο την ίδια γενικευμένη τάξη και τις ίδιες σχέσεις εισόδου-εξόδου, αλλά και τις ίδιες ιδιότητες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας (Verghese 1978, κεφ. 8). Θα είναι λογικό λοιπόν να καλούμε αυτά τα δύο συστήματα ως ισοδύναμα και αυτή είναι η βάση του παρακάτω ορισμού.



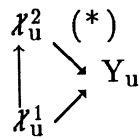
**Διάγραμμα 10.3**  $Y_u$  είναι ο χώρος των εξόδων που αντιστοιχούν σε είσοδο  $u(t)$ .

**Ορισμός 10.9** Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο Π.Π.Σ. με καινουργικές πολυωνυμικές περιγραφές  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$  αντίστοιχα. Οι  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα λέγονται **θεμελιώδεις ισοδύναμες** (*fundamentally equivalent*) εαν—ν οι δύο ακόλουθες συνθήκες ισχύουν :

- 1) υπάρχει μια αμφίεση μεταξύ των ψευδοκαταστάσεων  $\xi_i(t) \in \mathcal{X}_u^i$   $i=1,2$  των συστημάτων  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$  της μορφής :

$$\xi_2(t) = N(\rho)\xi_1(t) \quad (10.23)$$

- 2) η αμφίεση (10.23) είναι τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μεταθέτεται



**Διάγραμμα 10.4**  $Y_u$  είναι ο χώρος των εξόδων που αντιστοιχούν σε είσοδο  $u(t)$ .  $\square$

**Σημείωση 10.10** Μπορεί εύκολα να δει κανείς από τις σχέσεις (10.12), (10.13) και (10.15), (10.17) ότι η θεμελιώδης σχέση ισοδυναμίας η οποία έχει οριστεί βάσει της απεικόνισης (10.23) θα μπορούσε κάλλιστα να οριστεί διαμέσου των απεικονίσεων

$$\begin{bmatrix} \beta_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}(\rho) & \bar{Y}(\rho) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{N}(\rho) & \tilde{Y}(\rho) \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.25) \quad \square$$

Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι ο ορισμός 10.9 αποτελεί την πλήρη γενίκευση του ορισμού της θεμελιώδους ισοδυναμίας που προτάθηκε αρχικά από τον Pernebo (1977) (δες λήμμα 10.1) και αργότερα από τους Hayton *et al.* 1986 (δες ορισμό 10.3 και θεώρημα 10.4). Η κύρια διαφορά έγκνται στο ότι η καινούργια αυτή ισοδυναμία αναφέρεται επιπλέον και στον "κρουστικό" χώρο λύσεων (Verghese 1978) του συστήματος (10.14α). Πρώτα όμως θα παρουσιάσουμε ορισμένα χρήσιμα λήμματα.



**Λήμμα 10.11** (Hayton *et al.* 1986) Εστω δύο Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  των οποίων οι καινικές πολυωνυμικές περιγραφές  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$  συνδέονται διαμέσου του πλήρως ισοδύναμου μετασχηματισμού :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ -C_1 & D_1 & I_p & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & I_m \\ -0 & -0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & 0 & 0 \\ -C_2 & D_2 & I_p & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & I_m \\ -0 & -0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & Y_1 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & Y_2 \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & Y_3 \\ 0 & 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

Τότε οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα συνδέονται επίσης με τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} M_{11} + B_2 M_{31} & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} + X_1 + D_2 M_{31} & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 \\ -C_1 & D_1 & I_p & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & I_m \\ -0 & -0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 & 0 & 0 \\ -C_2 & D_2 & I_p & 0 \\ 0 & -I_m & 0 & I_m \\ -0 & -0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{13} C_1 + N_{11} & N_{13} D_1 + N_{12} + Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ -0 & -0 & -0 & -I_m \end{bmatrix} \quad (10.27) \quad \square$$

Το παραπάνω λήμμα μας δείχνει ότι εάν δύο Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  έχουν τις καινικές πολυωνυμικές περιγραφές τους  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$  πλήρως ισοδύναμες τότε οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι επίσης πλήρως ισοδύναμες. Εχουμε επίσης από το παραπάνω λήμμα ότι ο πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός μεταξύ δύο καινικών πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων πάντα μπορεί να πάρει την μορφή (10.27) πρδ.  $X = [X_1 \ X_2 \ X_3] = 0$  και  $Y = [Y_1^T \ Y_2^T \ Y_3^T]^T = 0$ .

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε απεικόνιση που συνδέει τον χώρο λύσεων-εισόδων μιας γενικής Π.Π.Σ. με τον χώρο λύσεων-εισόδων μιας Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων είναι κατά ανάγκη σταθερή.

**Θεώρημα 10.12** Θεωρείστε τις δύο παρακάτω Π.Π.Σ.

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (10.28\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (10.28\beta)$$

και

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (10.29\alpha)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (10.29\beta)$$

Εστω επίσης η παρακάτω απεικόνιση μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων των δύο συστημάτων :

$$\begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\rho) & Y(\rho) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.30)$$

όπου  $N(\rho) = N_q \rho^q + \dots + N_1 \rho + N_0$  και  $Y(\rho) = Y_q \rho^q + \dots + Y_1 \rho + Y_0$  όπου ένας από τους πίνακες  $N_q, Y_q$  είναι μη μηδενικός. Τότε η απεικόνιση (10.30) θα είναι σταθερή πρδ.  $N_i = 0 \quad i=1, \dots, q$  και  $Y_i = 0 \quad i=1, 2, \dots, q$ .

**Απόδειξη** Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη από το συμπέρασμα 10.8 για να είναι η σχέση (10.30) απεικόνιση είναι η εξής :

$$\delta_M \begin{bmatrix} \rho E - A & B \\ -C & D \\ -N(\rho) & -Y(\rho) \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \delta_M \begin{bmatrix} \rho E - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \stackrel{(2.81)}{\Leftrightarrow}$$

$$\text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} E & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -N_q & 0 & \dots & 0 & -Y_q & 0 & \dots & 0 \\ -N_{q-1} & -N_q & \dots & 0 & -Y_{q-1} & -Y_q & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -N_1 & -N_2 & \dots & -N_q & -Y_1 & -Y_2 & \dots & -Y_q \end{bmatrix} = \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$N_i = 0 \quad ; \quad Y_i = 0 \quad i=2, 3, \dots, q$$

$$\text{και } N_1 = HE \quad ; \quad Y_1 = 0$$

$$(10.31)$$

για κάποιον σταθερό πίνακα  $H$ . Με την βοήθεια λοιπόν της σχέσεως (10.31) η σχέση (10.30) μπορεί να ξαναγραφτεί ως :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_0 + HE\rho & Y_0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_0 x(t) + HE\dot{x}(t) - Y_0 u(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \stackrel{(10.29\alpha)}{=} \begin{bmatrix} N_0 x(t) + H(Ax(t) + Bu(t)) - Y_0 u(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_0 + HA & Y_0 - HB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.32)$$

και έτσι το θεώρημα αποδείχθηκε.  $\square$

**Συμπέρασμα 10.12** Ο ορισμός της θεμελιώδους ισοδυναμίας για γενικές Π.Π.Σ. ταυτίζεται με την θεμελιώδη ισοδυναμία για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (Hayton *et al.* 1986, ορισμός 10.3).

**Απόδειξη** Στην περίπτωση που υπάρχει μια απεικόνιση της μορφής (10.30) μεταξύ δύο Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, η απεικόνιση αυτή θα πρέπει να είναι σταθερή όπως φαίνεται από το παραπάνω θεώρημα και συνεπώς από το θεώρημα 10.4 οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι θεμελιώδεις ισοδύναμες.  $\square$

**Συμπέρασμα 10.13** Εάν δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, έστω  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ , είναι θεμελιώδεις ισοδύναμες σύμφωνα με τον ορισμό 10.9 τότε θα είναι και τέλεια ισοδύναμες.

**Απόδειξη** Δείξαμε στο συμπέρασμα 10.12 ότι η θεμελιώδης ισοδυναμία του ορισμού 10.9 για γενικές Π.Π.Σ. ταυτίζεται με την θεμελιώδη ισοδυναμία του ορισμού 10.3 για Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και συνεπώς από το λήμμα 10.5 οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι τέλεια ισοδύναμες.  $\square$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι η θεμελιώδης ισοδυναμία για γενικές Π.Π.Σ. ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων.

Εστω οι παρακάτω γενικές Π.Π.Σ.

$$A_i(\rho) \beta_i(t) = B_i(\rho) u(t) \quad i=1,2 \quad (10.33\alpha)$$

$$y(t) = C_i(\rho) \beta_i(t) + D_i(\rho) u(t) \quad (10.33\beta)$$

των οποίων οι κανονικές Π.Π.Σ. είναι οι εξής :

$$T_i(\rho) \xi_i(t) = u_i u(t) \quad (10.34\alpha)$$

$$y(t) = \mathcal{V}_i \xi_i(t) \quad i=1,2 \quad (10.34\beta)$$

**Λήμμα 10.14** Εστω  $\mathcal{X}_0^1, \mathcal{X}_0^2$  οι ομογενείς χώροι λύσεων των Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα της σχέσεως (10.34α). Οι χώροι λύσεων  $\mathcal{X}_u^1$  και  $\mathcal{X}_u^2$  των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της σχέσεως (10.34α) κάτω από συγκεκριμένη είσοδο  $u(t)$  και οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες του  $\xi_i(t)$  γράφονται ισοδύναμα ως εξής

$$\mathcal{X}_u^1 \equiv \mathcal{X}_0^1 + \mathcal{X}_u^1 := \{x_u = x_0^1 + x_u^1 \mid x_0^1 \in \mathcal{X}_0^1\} \quad (10.35\alpha)$$

$$\mathcal{X}_u^2 \equiv \mathcal{X}_0^2 + \mathcal{X}_u^2 := \{x_u = x_0^2 + x_u^2 \mid x_0^2 \in \mathcal{X}_0^2\} \quad (10.35\beta)$$

όπου  $x_u^1$  και  $x_u^2$  είναι οι δυναμικές αποκρίσεις των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της σχέσεως (10.34α) κάτω από συγκεκριμένη είσοδο  $u(t)$ . Εστω δύο γραμμικές απεικονίσεις

$$f : \mathcal{X}_u^1 \rightarrow \mathcal{X}_u^2 \quad \text{και} \quad f' : \mathcal{X}_u^2 \rightarrow \mathcal{X}_u^1 \quad \forall u(t) \quad (10.36)$$

οι οποίες είναι ένα προς ένα. Τότε οι απεικονίσεις  $f$  και  $f'$  θα είναι και επί (και άρα θα είναι αμφιέσεις).

**Απόδειξη** Για είσοδο  $u(t)=0$  θα έχουμε ότι οι χώροι  $\mathcal{X}_0^1$  και  $\mathcal{X}_0^2$  είναι διανυσματικοί χώροι και συνεπώς από το λήμμα 2.2 οι γραμμικές απεικονίσεις

$$f : \mathcal{X}_0^1 \rightarrow \mathcal{X}_0^2 \quad \text{και} \quad f' : \mathcal{X}_0^2 \rightarrow \mathcal{X}_0^1 \quad (10.37)$$

θα είναι ισομορφισμοί. Η απεικόνιση της δυναμικής απόκρισης  $x_u^1$  θα είναι η εξής :

$$f(x_u^1) = x_0^2 + x_u^2 \quad \text{όπου} \quad x_0^2 \in \mathcal{X}_0^2 \quad (10.38)$$

Η  $f$  όμως είναι ένας ισομορφισμός από τον χώρο  $X_0^1$  στον χώρο  $X_0^2$  και συνεπώς θα υπάρχει  $x_0^1$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0^1) = x_0^2$ . Βάσει αυτού του συμπεράσματος και του γεγονότος ότι η  $f$  είναι μια γραμμική απεικόνιση η σχέση (10.38) ξαναγράφεται ως εξής :

$$\begin{aligned} f(x_u^1) &= f(x_0^1) + x_u^2 \Leftrightarrow \\ x_u^2 &= f(x_u^1) - f(x_0^1) = f(-x_0^1 + x_u^1) \end{aligned} \quad (10.39)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η απεικόνιση  $f$  είναι επί και συνεπώς αμφιέση. Εστω ένα στοιχείο  $y \in X_u^2$  το οποίο αναλύεται ως εξής :

$$y = \hat{x}_0^2 + x_u^2 \in X_u^2, \text{ όπου } \hat{x}_0^2 \in X_0^2 \quad (10.40)$$

Η απεικόνιση  $f$  θα είναι επί εαν υπάρχει στοιχείο  $x \in X_u^1$  τέτοιο ώστε  $f(x) = y$ . Η  $f$  είναι ένας ισομορφισμός από τον χώρο  $X_0^1$  στον χώρο  $X_0^2$  και συνεπώς θα υπάρχει  $\hat{x}_0^1$  τέτοιο ώστε  $f(\hat{x}_0^1) = \hat{x}_0^2$ . Βάσει αυτού του συμπεράσματος και των σχέσεων (10.39) και (10.40) θα έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} y = \hat{x}_0^2 + x_u^2 &\Leftrightarrow y = f(\hat{x}_0^1) + f(-x_0^1 + x_u^1) \Leftrightarrow \\ y &= f((\hat{x}_0^1 - x_0^1) + x_u^1) \end{aligned} \quad (10.41)$$

Συνεπώς υπάρχει  $x = (\hat{x}_0^1 - x_0^1) + x_u^1 \in X_u^1$  τέτοιο ώστε  $f(x) = y$  και άρα η απεικόνιση  $f$  είναι επί. Εντελώς όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι και η απεικόνιση  $f'$  είναι επί και συνεπώς οι απεικονίσεις  $f$  και  $f'$  είναι αμφιέσεις.  $\square$

**Θεώρημα 10.15** Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  δύο γενικές Π.Π.Σ. με κανονικές πολυωνυμικές περιγραφές  $\Sigma_1'$  και  $\Sigma_2'$ . Οι  $\Sigma_1'$  και  $\Sigma_2'$  θα είναι πλήρως ισοδύναμες εαν  $-v$  είναι θεμελιώδεις ισοδύναμες.

#### Απόδειξη

( $\Rightarrow$ ) Εστω ότι οι  $\Sigma_1'$  και  $\Sigma_2'$  είναι πλήρως ισοδύναμες. Τότε σύμφωνα με το λήμμα 10.11 θα υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M(\rho)$  και  $N(\rho)$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός μεταξύ των πολυωνυμικών περιγραφών των  $\Sigma_1'$  και  $\Sigma_2'$

$$\begin{bmatrix} M(\rho) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(\rho) & u_1 \\ -v_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(\rho) & u_2 \\ -v_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(\rho) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (10.42)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και τα δύο μέλη της σχέσεως (10.42) με το διάνυσμα  $[\xi_1^T(t) \ u(t)^T]^T$  παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{M}(\rho) & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(\rho) & u_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_2(\rho) & u_2 \\ -\nu_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}(\rho) & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} \mathcal{M}(\rho) & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_2(\rho) & u_2 \\ -\nu_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}(\rho)\xi_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_2(\rho) & u_2 \\ -\nu_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}(\rho)\xi_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.43)$$

και συνεπώς η γραμμική σχέση

$$\xi_2(t) = \mathcal{M}(\rho)\xi_1(t) \quad (10.44)$$

μας δίνει μια λύση του συστήματος  $\Sigma'$ . Από τις McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας (10.42) θα έχουμε ότι

$$\delta_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} T_1(\rho) \\ \mathcal{M}(\rho) \end{bmatrix} = \delta_{\mathbf{M}}(T_1(\rho)) \quad (10.45)$$

μα συνθήκη που από το λήμμα 10.6 μας δίνει ότι η σχέση (10.44) είναι μια γραμμική απεικόνιση. Το γεγονός ότι ο σύνθετος πίνακας

$$\begin{bmatrix} T_1(\rho) \\ \mathcal{M}(\rho) \end{bmatrix} \quad (10.46)$$

δεν έχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$  συνεπάγεται από το λήμμα 10.6 ότι η γραμμική απεικόνιση (10.44) είναι μια ένα προς ένα γραμμική απεικόνιση μεταξύ των χώρων λύσεων  $\mathcal{X}_{\mathbf{u}}^1$  και  $\mathcal{X}_{\mathbf{u}}^2$  αντίστοιχα των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ . Κατά τον ίδιο τρόπο και

χρησιμοποιώντας την συμμετρική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας καθώς και το λήμμα 10.11 έχουμε ότι υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες  $M'(\rho)$  και  $N'(\rho)$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός μεταξύ των Π.Π.Σ.  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$

$$\begin{bmatrix} M'(\rho) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2(\rho) & u_2 \\ -\nu_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(\rho) & u_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N'(\rho) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (10.47)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Έτσι η σχέση

$$\xi_1(t) = N'(\rho)\xi_2(t) \quad (10.48)$$

είναι μια ένα προς ένα γραμμική απεικόνιση μεταξύ των χώρων λύσεων  $X_u^2$  και  $X_u^1$  αντίστοιχα των συστημάτων  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_1$ . Από το λήμμα 10.14 συμπεραίνουμε ότι οι γραμμικές απεικονίσεις (10.44) και (10.48) μεταξύ των χώρων λύσεων  $X_u^1$  και  $X_u^2$  είναι αμφιέσεις γεγονός που αποδεικνύει την συνθήκη (1) του ορισμού 10.9. Η σχέση (10.43) επιβεβαιώνει και την συνθήκη (2) του ορισμού 10.9 πρδ. το διάνυσμα  $\xi_2(t) = M(\rho)\xi_1(t)$  απεικονίζεται διαμέσου της  $y_2(t) = \nu_2\xi_2(t)$  στο διάνυσμα  $y_1(t) = \nu_1\xi_1(t)$  και συνεπώς το διάγραμμα 10.3 μεταθέτεται.

( $\Leftarrow$ ) Για να δείξουμε το αντίστροφο του θεωρήματος ας υποθέσουμε ότι δύο γενικές Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  με την ίδια έξοδο  $y(t)$  έχουν καινουργικές πολυωνυμικές περιγραφές της μορφής

$$\Sigma'_i : T_i\xi_i(t) = u_i u(t) \quad (10.49\alpha)$$

$$y(t) = \nu_i \xi_i(t) \quad i=1,2 \quad (10.49\beta)$$

Εστω

$$\xi_2(t) = N(\rho)\xi_1(t) \quad (10.50)$$

μια αμφίεση μεταξύ των ψευδοκαταστάσεων  $\xi_i(t)$  των συστημάτων  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$ . Εστω επίσης

$$E_i \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t) \quad (10.51\alpha)$$

$$y(t) = C_i x_i(t) \quad i=1,2 \quad (10.51\beta)$$

είναι δύο πλήρεις ισοδύναμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα, οι οποίες κατασκευάζονται σύμφωνα με την ενότητα 9.3.2β. Τότε σύμφωνα με την πρόταση 9.45 θα υπάρχουν οι ακόλουθες αμφιέσεις

$$x_2(t) = \left[ \begin{array}{cc|c} I_{r_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ \hline [(P_{E_2} - \rho P_{A_2})^{-1} P_{B_2}] \rho & & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_p \end{array} \right] \xi_2(t) = N_2(\rho) \xi_2(t) \quad (10.52)$$

$$\xi_1(t) = \left[ \begin{array}{ccc|c} I_{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_p \end{array} \right] x_1(t) = C_0 x_1(t) \quad (10.53)$$

Από την σύνθεση των αμφιέσεων (10.50), (10.52) και (10.53) παίρνουμε την ακόλουθη αμφιέση

$$x_2(t) = [N_2(\rho)N(\rho)C_0] x_1(t) \quad (10.54)$$

μεταξύ των ψευδοκαταστάσεων  $x_1(t)$  των Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (10.51). Μπορούμε να συνάγουμε λοιπόν από το συμπέρασμα 10.13 ότι οι Π.Π.Σ. (10.51) είναι τέλεια ισοδύναμες ή ισοδύναμα από θεώρημα 9.23 πλήρως ισοδύναμες. Θα έχουμε λοιπόν συνοπτικά τις επόμενες σχέσεις

$$\{T_1(s), \mathcal{U}_1, \mathcal{Y}_1\} \underset{\text{ισοδυν.}}{\sim} \text{πλήρως} \{E_1, A_1, B_1, C_1\} \underset{\text{ισοδυν.}}{\sim} \text{πλήρως} \{E_2, A_2, B_2, C_2\} \underset{\text{ισοδυν.}}{\sim} \text{πλήρως} \{T_2(s), \mathcal{U}_2, \mathcal{Y}_2\} \quad (10.55)$$

Ετσι από την μεταβατική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων οι γενικές Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι πλήρως ισοδύναμες. Οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα είναι επίσης ισοδύναμες βάσει του θεωρήματος 9.23 (5).  $\square$



**Συμπέρασμα 10.16** Εάν λάβουμε υπόψη μας την συγκεκριμένη μορφή της πλήρους ισοδυναμίας (10.42) (δες 10.26) θα πάρουμε την συγκεκριμένη αμφίεση μεταξύ των λύσεων  $\xi_i(t) \in \mathcal{X}_u^i$   $i=1,2$  των δύο συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα :

$$\xi_2(t) = \mathcal{M}(\rho) \xi_1(t) \quad (10.27) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \beta_2(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{13}C_1(\rho)+N_{11}(\rho) & N_{13}D_1(\rho)+N_{12}(\rho)+Y_1 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ -u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (10.56)$$

ο οποίος με την σειρά του μας δίνει την ακόλουθη αμφίεση μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  :

$$\begin{bmatrix} \beta_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{13}C_1(\rho) & N_{13}D_1(\rho)+N_{12}(\rho)+Y_1 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.57)$$

Θέλουμε εδώ να σημειώσουμε ότι : είναι η αμφίεση (10.57) μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων των πλήρως ισοδύναμων Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  που διατηρεί αναλλοίωτες τις ιδιότητες ελεγχιμότητας τους.  $\square$

**Συμπέρασμα 10.17** Εστω δύο γενικές Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  με ίδια έξοδο  $y(t)$  των οποίων οι καινουργικές πολυωνυμικές περιγραφές  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα περιγράφονται ως εξής :

$$T_i(\rho)\xi_i(t) = u_i(t) \quad (10.58\alpha)$$

$$y(t) = v_i\xi_i(t) \quad i=1,2 \quad (10.58\beta)$$

όπου

$$T_i(\rho) = T_{0i} + T_{1i}\rho + \dots + T_{q_i}\rho^{q_i} \in \mathbb{R}[\rho]^{\tilde{r}_i \times \tilde{r}_i}, u_i \in \mathbb{R}^{\tilde{r}_i \times m}, v_i \in \mathbb{R}^{p \times \tilde{r}_i} \quad i=1,2 \quad (10.59)$$

Εαν εφαρμόσουμε μετασχηματισμούς Laplace στις σχέσεις (10.58α) και (10.58β) θα πάρουμε ότι :

$$\mathcal{T}_i(s)\hat{\xi}_i(s) = S_{q-1} \tilde{\chi}_i \tilde{\xi}_i(0-) + u_i \hat{u}(s) \quad (10.60\alpha)$$

$$y(s) = \nu_i \hat{\xi}_i(s) \quad i=1,2 \quad (10.60\beta)$$

όπου

$$\tilde{\chi}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{T}_{qi} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{T}_{q-1,i} & \mathcal{T}_{qi} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathcal{T}_{1i} & \mathcal{T}_{2i} & \cdots & \mathcal{T}_{qi} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\xi}_i(0-) := \begin{bmatrix} \xi_i(0-) \\ \xi_i^{(1)}(0-) \\ \vdots \\ \xi_i^{(q-1)}(0-) \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

$$S_{q-1} = [s^{q-1}I_{\tilde{r}}, \dots, sI_{\tilde{r}}, I_{\tilde{r}}] \quad (10.61)$$

και  $\hat{\xi}_i(s) = \mathcal{L}[\xi_i(t)]$ ,  $\hat{u}(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  όπου  $\mathcal{L}[\cdot]$  δηλώνει τον μετασχηματισμό Laplace της περιεχομένης συνάρτησης. Θεωρήστε τώρα ότι οι Π.Π.Σ. των  $\Sigma'_1$  και  $\Sigma'_2$  συνδέονται με τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1(s) & u_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_2(s) & u_2 \\ -\nu_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{M}(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (10.62)$$

Από το θεώρημα 10.15 θα υπάρχει η εξής αμφίεση μεταξύ των ψευδοκαταστάσεων  $\xi_i(t) \in \mathcal{X}_u^i$   $i=1,2$  των δύο συστημάτων :

$$\begin{aligned} \xi_2(t) &= \mathcal{M}(\rho) \xi_1(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} \\ \xi_2(s) &:= \mathcal{M}(s) \xi_1(s) + S_{q-1} \tilde{\chi}_N \tilde{\xi}_1(0-) \end{aligned} \quad (10.63)$$

όπου

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{N}_q s^q + \cdots + \mathcal{N}_1 s + \mathcal{N}_0 \quad \text{και} \quad \tilde{\chi}_N = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_q & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{N}_{q-1} & \mathcal{N}_q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{N}_1 & \mathcal{N}_2 & \cdots & \mathcal{N}_q \end{bmatrix} \quad (10.64)$$

Από τις McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων (10.62) θα έχουμε ότι

$$\delta_M \begin{bmatrix} T_1(\rho) \\ M(\rho) \end{bmatrix} = \delta_M(T_1(\rho)) \Leftrightarrow \text{rank}_{\mathbb{R}} \begin{bmatrix} \tilde{\chi}_1 \\ \tilde{\chi}_N \end{bmatrix} = \text{rank}_{\mathbb{R}}[\tilde{\chi}_1] \Leftrightarrow \exists Q : \tilde{\chi}_N = Q \cdot \tilde{\chi}_1 \quad (10.65)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε τώρα και τα δύο μέλη της σχέσεως (10.62) με το διάνυσμα  $[\hat{\xi}_1(s)^T \hat{u}(s)^T]^T$  θα πάρουμε ότι

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(s) & U_1 \\ -\mathcal{V}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(s) & U_2 \\ -\mathcal{V}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1(s) \\ -\hat{u}(s) \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (10.60\alpha) \\ \Rightarrow \\ (10.63-5) \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{q-1} \tilde{\chi}_1 \tilde{\xi}_1(0-) \\ -y_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2(s) & U_2 \\ -\mathcal{V}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_2(s) - S_{q-1} Q \tilde{\chi}_1 \tilde{\xi}_1(0-) \\ -u(s) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} S_{q-1} \tilde{\chi}_2 \tilde{\xi}_2(0-) \\ -y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{q-1} \tilde{\chi}_1 \tilde{\xi}_1(0-) \\ -y_1(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_2(s) S_{q-1} Q \tilde{\chi}_1 \tilde{\xi}_1(0-) \\ -\mathcal{V}_2 S_{q-1} Q \tilde{\chi}_1 \tilde{\xi}_1(0-) \end{bmatrix} \quad (10.66)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας την σχέση (10.62) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του  $s^i$   $i=0,1,\dots,q-1$  στην σχέση (10.66) παίρνουμε ότι

$$\tilde{\chi}_2 \tilde{\xi}_2(0-) = \left[ \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_{q-1} \\ 0 & M_0 & \cdots & M_{q-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{02} & T_{12} & \cdots & T_{q-1,2} \\ 0 & T_{02} & \cdots & T_{q-2,2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{02} \end{bmatrix} Q \right] \chi_1 \hat{\xi}_1(0-) \quad (10.67)$$

όπου  $M(s) = M_0 + M_1 s + \cdots + M_f s^f$  και  $M_i = 0$  για  $i=f+1, \dots, q-1$  εάν  $f < q$ . Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} y_2(t) = \mathcal{V}_2 \xi_2(t) = [\mathcal{V}_2 M(\rho)] \xi_1(t) &\stackrel{(10.42)}{=} \mathcal{V}_1 \xi_1(t) = y_1(t) \Leftrightarrow \\ y_2(s) = y_1(s) &\stackrel{(10.66)}{\Leftrightarrow} \mathcal{V}_2 S_{q-1} Q \tilde{\chi}_1 \tilde{\xi}_1(0-) = 0 \end{aligned} \quad (10.68)$$

και συνεπώς από τις σχέσεις (10.67) και (10.68) θα έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \tilde{\xi}_2(0-) \\ -y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M} + \tilde{T}_2 Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \tilde{\xi}_1(0-) \\ -y_1(s) \end{bmatrix} \quad (10.69)$$

όπου  $\tilde{M}$  και  $\tilde{T}_2$  ορίζονται στην σχέση (10.67). Επειδή η σχέση (10.63) είναι αμφίεση, άρα και η σχέση (10.69) θα είναι επίσης αμφίεση μεταξύ των αρχικών συνθηκών—εξόδων των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ .

Θέλουμε εδώ να σημειώσουμε όπως και στο συμπέρασμα 10.16 ότι : είναι η αμφίεση (10.69) μεταξύ των χώρων αρχικών συνθηκών—εξόδων των πλήρως ισοδυναμικών Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  που διατηρεί αναλλοίωτες τις ιδιότητες παρατηρησιμότητας τους.  $\square$

**Συμπέρασμα 10.18** Παρατηρούμε από το θεώρημα 10.15 ότι η θεμελιώδης ισοδυναμία γενικών Π.Π.Σ. ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων και συνεπώς θα πληρεί τις ίδιες ιδιότητες. Πιο αναλυτικά θα διατηρεί αναλλοίωτα τα παρακάτω χαρακτηριστικά γενικών Π.Π.Σ.

- (α) την γενικευμένη τάξη  $f := d_M(T(s))$  και τον βαθμό  $d_R$ ,
- (β) την συνάρτηση μεταφοράς  $G(s)$  και συνεπώς τους πόλους και τα μηδενικά μεταφοράς στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ ,
- (γ) το σύνολο των πόλων και των μηδενικών του συστήματος στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ ,
- (δ) το σύνολο των αποσυζευγμένων μηδενικών εισόδου (εξόδου),
- (ε) τους δυναμικούς δείκτες εισόδου (εξόδου),
- (στ) τα αναλλοίωτα μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και τους αναλλοίωτους δείκτες στηλών, και γραμμών.  $\square$

Στην συνέχεια θα δώσουμε, μια ειδική μορφή της θεμελιώδους ισοδυναμίας δίνοντας έτσι μια γενίκευση της ισοδυναμίας εισόδου—εξόδου (input–output equivalence) η οποία προτάθηκε από τον Blomberg (1983).

**Συμπέρασμα 10.19** Θεωρείστε δύο πλήρως ισοδύναμες αριστερές κλασματικές Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  της μορφής

$$A_{L1}(\rho)\beta_1(t) = B_{L1}(\rho)u(t) \quad (10.70\alpha)$$

$$y(t) = \beta_1(t) \quad (10.70\beta)$$

Εφόσον η πλήρης ισοδυναμία κλασματικών Π.Π.Σ. ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη αντιστρέψιμη ισοδυναμία, θα έχουμε ότι οι αριστερές κλασματικές Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι πλήρως αντιστρέψιμα ισοδύναμες και άρα θα υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας  $U(\rho)$  τέτοιος ώστε ο μετασχηματισμός :

$$\begin{bmatrix} U(\rho) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{L1}(\rho) & B_{L1}(\rho) \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{L2}(\rho) & B_{L2}(\rho) \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (10.71)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Εφαρμόζοντας την μέθοδο απόδειξης του ευθέως του θεωρήματος 10.14 μπορούμε να πάρουμε την ακόλουθη αμφίεση μεταξύ των "πεπερασμένων" αλλά και "κρουστικών" χώρων λύσεων-εισόδων των δύο συστημάτων

$$\begin{bmatrix} \beta_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.72)$$

ο οποίος και μας δίνει μια ερμηνεία στο πεδίο του χρόνου της πλήρης ισοδυναμίας, σε αντίθεση με την αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων όπου έχουμε ταύτιση μόνο των "πεπερασμένων" χώρων λύσεων-εισόδων.  $\square$

**Παράδειγμα 10.20** Θεωρείστε τις τρεις παρακάτω αριστερές κλασματικές Π.Π.Σ.

$$\Sigma_1: \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\rho E_1 - A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}}_{\xi(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1} u(t) \quad (E.1)$$

$$\Sigma_2: \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\rho E_2 - A_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} u(t) \quad (\text{E.2})$$

$$\Sigma_3: \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2\rho \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\rho E_3 - A_3} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{bmatrix}}_{\beta(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_3} u(t) \quad (\text{E.3})$$

με κοινή συνάρτηση μεταφοράς και λύσεις αντίστοιχα

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_2(0-)\delta(t) + u(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \beta(t) = \begin{bmatrix} 2\beta_2(0-)\delta(t) + u(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Είναι φανερό ότι ενώ οι Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι αντιστρέψιμα ισοδύναμες κάτω από τον αντιστρέψιμο μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \rho & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.5})$$

δεν είναι δυνατό οι χώροι λύσεων-εισόδων τους να συνδέονται με μια αμφίεση λόγω της έλλειψης κρουστικής συμπεριφοράς της Π.Π.Σ.  $\Sigma_2$  (σε αντίθεση με την Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$ ). Αντίθετα μεταξύ των Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_3$  υπάρχει μια πλήρης αντιστρέψιμη ισοδυναμία που τις συνδέει

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2\rho & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \rho & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.6})$$

και συνεπώς υπάρχει και η ακόλουθη αμφίεση

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad \xi_2(0-) = 2\beta_2(0-) \quad (\text{E.7})$$

Η σχέση μεταξύ των αρχικών συνθηκών στην (E.7) προκύπτει από την σχέση (10.69).  $\square$

#### 10.4 Γενίκευση της ισοδυναμίας Π.Π.Σ. του Wolovich.

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε μαθηματικά να ορίσουμε μια έννοια "ισοδυναμίας" μεταξύ Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και γενικών Π.Π.Σ.. Ο λόγος για τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων έναντι των Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων, είναι διότι είναι οι πιο απλές μορφές Π.Π.Σ. που διαθέτουν "κρουστική" συμπεριφορά. Θα δούμε ότι η "ισοδυναμία" αυτή οδηγεί σε μια σειρά αναγκαίων συνθηκών ισοδυναμίας όπως στην ισοδυναμία του Wolovich (1974) και ανάγεται στην τέλεια ισοδυναμία συστημάτων όταν και οι δύο Π.Π.Σ. είναι Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.

Θεωρείστε λοιπόν την κανονική πολυωνυμική περιγραφή μιας γενικής Π.Π.Σ.

$$T(\rho) \xi(t) = \mathcal{U} u(t) \quad (10.73\alpha)$$

$$y(t) = \mathcal{V} \xi(t) \quad (10.73\beta)$$

όπου

$$T(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) & 0 \\ -C(\rho) & D(\rho) & -I_p \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{(r+p+m) \times (r+p+m)}, \quad \mathcal{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{(r+p+m) \times m}$$

$$\mathcal{V} = [0 \ 0 \ I_p] \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times (r+p+m)} \quad \text{και} \quad \xi(t) = [\beta(t)^T \ -u(t)^T \ y(t)^T]^T \quad (10.74)$$

Θα δηλώνουμε την κανονική πολυωνυμική περιγραφή (10.73) μιας γενικής Π.Π.Σ.  $\Sigma$  με  $\Sigma^{(N)}$ . Θεωρείστε επίσης μια Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (10.75\alpha)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (10.75\beta)$$

Ακολουθώντας τον ορισμό ισοδυναμίας του Wolovich (1974) δίνουμε τον παρακάτω ορισμό "ισοδυναμίας" μεταξύ των συστημάτων (10.73) και (10.75).

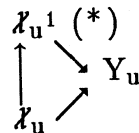
**Ορισμός 10.21** Τα συστήματα (10.73) και (10.75) θα λέγονται *ισοδύναμα* (equivalent) εάν—ν οι ακόλουθες δύο συνθήκες ικανοποιούνται

1) Υπάρχει μια αμφίεση της μορφής

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 & D_0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.76)$$

μεταξύ των χώρων λύσεων—εισόδων  $\mathcal{X}_u^1$  και  $\mathcal{X}_u$  των συστημάτων (10.73) και (10.75) αντίστοιχα, για κάθε  $u(t)$ .

2) η αμφίεση (10.76) είναι τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μεταθέτεται



**Διάγραμμα 10.5**  $Y_u$  είναι ο χώρος των εξόδων που αντιστοιχούν σε είσοδο  $u(t)$ .  $\square$

Με την βοήθεια της σχέσεως (10.76), η σχέση (10.73β) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{V} (C_0 x(t) - D_0 u(t)) = \\ &= \mathcal{V} C_0 x(t) - \mathcal{V} D_0 u(t) = \\ &\equiv Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (10.77)$$

Η συνθήκη (2) του ορισμού 10.21, βάσει της σχέσεως (10.77), είναι ισοδύναμη με την συνθήκη  $C \equiv \mathcal{V} C_0$  και  $D \equiv -\mathcal{V} D_0$ .

Ο λόγος που διαλέξαμε η απεικόνιση (10.76) να είναι σταθερή βρίσκεται στο θεώρημα 10.12, όπου φαίνεται ότι κάθε απεικόνιση από τον χώρο λύσεων—εισόδων της Π.Π.Σ. (10.75) στον χώρο λύσεων—εισόδων της Π.Π.Σ. (10.73) είναι υποχρεωτικά σταθερή.



Η αμφίεση (10.76) είναι πολύ ενδιαφέρουσα λόγω του ότι έχει τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με την αμφίεση (10.23) του ορισμού 10.9, δηλαδή έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την διάσταση του χώρου λύσεων των ομογενών συστημάτων (10.73α) και (10.75α) πρδ.  $\delta_M(T(\rho)) = \delta_M(\rho E - A)$ , καθώς και τους χώρους ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας των δύο συστημάτων (10.73) και (10.75). Είναι λοιπόν λογικό να αποκαλούμε τα δύο αυτά συστήματα "ισοδύναμα" όταν ικανοποιούν τις ιδιότητες (1) και (2) του ορισμού 10.21. Μερικές επιπλέον ιδιότητες του παραπάνω είδους "ισοδυναμίας" περιέχονται στο επόμενο

**Θεώρημα 10.22** Τα ισοδύναμα συστήματα (10.73) και (10.75) είναι :

- 1) Ισοδύναμα ως προς την σχέση ψευδοκαταστάσεως/εισόδου (*partial state/input transfer matrix equivalent*).
- 2) Ισοδύναμα ως προς την σχέση εισόδου/εξόδου (*Input/output transfer matrix equivalent*).

#### Απόδειξη

- 1) Από την συνθήκη (1) του ορισμού 10.21 και αγνοώντας τις αρχικές συνθήκες, εάν εξισώσουμε τους μετασχηματισμούς Laplace του  $\xi(t)$  σε σχέση με το  $u(t)$  στις σχέσεις (10.75α) και (10.76) με τους ισοδύναμους μετασχηματισμούς Laplace στην σχέση (10.73α), θα πάρουμε ότι :

$$C_0(sE - A)^{-1}B - D_0 = T(s)^{-1}u \quad (10.78)$$

- 2) Από την συνθήκη (2) του ορισμού 10.21 και την σχέση (10.77) που απορρέει από τον ορισμό 10.21, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} C(sE - A)^{-1}B + D &= \gamma C_0(sE - A)^{-1}B - \gamma D_0 = \gamma [C_0(sE - A)^{-1}B - D_0] \stackrel{(10.78)}{=} \\ &= \gamma T(s)^{-1}u = C(s)A(s)^{-1}B(s) + D(s) \end{aligned} \quad (10.79) \quad \square$$

### Θεώρημα 10.23

- 1) Ο ορισμός 10.21 ανάγεται στον ορισμό της τέλει ισοδυναμίας, όταν η γενική Π.Π.Σ., της οποίας η καιονική πολυωνυμική περιγραφή είναι η (10.73), βρίσκεται στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.
- 2) Από τις σχέσεις (10.75α) και (10.76) παίρνουμε την Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (10.80\alpha)$$

$$\xi(t) = C_0 x(t) + D_0 u(t) \quad (10.80\beta)$$

Η Π.Π.Σ. (10.80) είναι μια παρατηρήσιμη Π.Π.Σ. πρδ. ο πίνακας  $[(sE-A)^T \ C^T]^T$  δεν περιέχει μηδενικά στην περιοχή  $\mathcal{C}\mathcal{U}\{\infty\}$ .

### Απόδειξη

- 1) Θεωρείστε την γενική Π.Π.Σ. με  $A(\rho) = \rho E_1 - A_1$ ,  $B(\rho) = B_1$ ,  $C(\rho) = C_1$  και  $D(\rho) = D_1$  της οποίας η καιονική πολυωνυμική περιγραφή βρίσκεται επίσης στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και έχει ως εξής

$$\bar{E} \dot{\xi}(t) = \bar{A} \xi(t) + \bar{B} u(t) \quad (10.81\alpha)$$

$$y(t) = \bar{C} \xi(t) \quad (10.81\beta)$$

όπου

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 & 0 \\ C_1 & -D_1 & -I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = [0 \ 0 \ I]$$

$$\text{και } \xi(t) = [\beta(t)^T, -u(t)^T, y(t)^T]^T \quad (10.82)$$

Εαν τώρα οι Π.Π.Σ. (10.75) και (10.81) είναι "ισοδύναμες" τότε σύμφωνα με τον ορισμό 10.21 τα δύο αυτά συστήματα θα είναι θεμελιώδη ισοδύναμα (Ορισμός 10.3 και Θεώρημα 10.4) και συνεπώς από λήμμα 10.5 τέλεια ισοδύναμα. Έχουμε επίσης από το θεώρημα 9.23 την παρακάτω τέλεια ισοδυναμία συστημάτων

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho E_1 - A_1 & B_1 \\ -C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \bar{E} - \bar{A} & \bar{B} \\ -\bar{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ C_1 & -D_1 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (10.83)$$

και συνεπώς από την συμμετρική ιδιότητα της τέλειας ισοδυναμίας συστημάτων (Pugh *et al.* 1987) οι Π.Π.Σ.  $\{\rho E_1 - A_1, B_1, C_1, D_1\}$  και  $\{\rho E - A, B, C, D\}$  θα είναι τέλεια ισοδύναμες.

- 2) Εάν λάβουμε υπόψη ότι η απεικόνιση (10.76) είναι αμφίεση τότε είναι φανερό ότι η Π.Π.Σ. (10.80) είναι παρατηρήσιμη.  $\square$

Εχουμε πάντα την δυνατότητα να δημιουργήσουμε μια "ισοδύναμη" Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων μιας γενικής Π.Π.Σ. όπως φαίνεται από το παρακάτω

**Θεώρημα 10.24** Κάθε γενική Π.Π.Σ. της μορφής (10.1) έχει μια "ισοδύναμη" Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.

**Απόδειξη** Σε μια πρόσφατη εργασία μας (Karampetakis *et al.* 1992) παρουσιάζουμε την μέθοδο αναγωγής μιας γενικής Π.Π.Σ. σε μια "ισοδύναμη" Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων σύμφωνα με τον τρόπο που επέδειξε ο Verghese (1978). Εδώ θα ακολουθήσουμε έναν ευτελώς διαφορετικό τρόπο βασισμένο κατά κύριο λόγο στην ισοδύναμη Π.Π.Σ. της μορφής των Tan & Vandewall (1988) (δες ενότητα 9.3.2δ). Ο τρόπος αυτός όπως θα δούμε αποτελεί μια γενίκευση του αντίστοιχου μοντέλου που πρότεινε ο Wolovich (1973) καθώς και οι Wolovich & Guidorzi (1977), λόγω του ότι αναφέρεται επιπλέον και στην κρουστική συμπεριφορά του συστήματος.

Εστω λοιπόν η καινούρια πολυωνυμική περιγραφή του συστήματος (10.1) έχει την μορφή (10.73).

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Βρίσκουμε έναν αντιστρέψιμο πίνακα  $U(\rho) \in \mathbb{R}[s]^{\tilde{r} \times \tilde{r}}$   $\tilde{r} = r + p + m$ , τέτοιον ώστε ο πίνακας

$$[Q(\rho) \ R(\rho)] := U(\rho) [T(\rho) \ I_{\tilde{r}}] = [U(\rho)T(\rho) \ U(\rho)] \quad (10.84)$$

να είναι κανονικός κατά γραμμές. Ο πίνακας  $[Q(\rho) \ R(\rho)]$  δεν θα περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{w\}$  σύμφωνα με το λήμμα 5.31. Εστω επίσης

$$S^w[Q(\rho) \ R(\rho)](\rho) = [\text{diag}[\rho^{q_1}, \rho^{q_2}, \dots, \rho^{q_r}] \ 0_{\tilde{r}, \tilde{r}}] \quad (10.85)$$

Ορίζουμε τον πίνακα

$$S(\rho) = \begin{bmatrix} \rho^{q_1} & \rho^{q_1-1} & \dots & \rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho^{q_2} & \rho^{q_2-1} & \dots & \rho & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho^{q_r} & \rho^{q_r-1} & \dots & \rho & 1 \end{bmatrix} \quad (10.86)$$

και γράφουμε τους πίνακες  $Q(\rho)$  και  $R(\rho)$  ως εξής

$$\begin{aligned} Q(\rho) &= S(\rho)Q_c \\ R(\rho) &= S(\rho)R_c \end{aligned} \quad (10.87)$$

όπου  $Q_c$  και  $R_c$  είναι σταθεροί πίνακες.

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Σχηματίζουμε μια παρατηρήσιμη πραγμάτωση του πίνακα  $T(\rho)^{-1}u$  ως εξής :

Σχηματίζουμε μια στοιχειώδη πραγμάτωση (core realization) της μορφής

$$\rho E_c - A_c = \text{block diag}\{\rho E_{c_1} - A_{c_1}, \rho E_{c_2} - A_{c_2}, \dots, \rho E_{c_{\tilde{r}}} - A_{c_{\tilde{r}}}\} \quad (10.88)$$

όπου

$$\rho E_{c_i} - A_{c_i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \rho & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \rho \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\rho]^{(q_i+1) \times (q_i+1)} \quad (10.89)$$

και

$$C_c = \text{block diag}[C_1, C_2, \dots, C_{\tilde{r}}] \quad C_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times (q_i+1)}$$

$$B_c = I_n, \quad n = \sum_{i=1}^{\tilde{r}} q_i + \tilde{r} \quad (10.90)$$

Τελικά ορίζουμε την παρακάτω πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

$$E = E_c, \quad A = A_c - Q_c C_c, \quad B = B_c R_c = R_c, \quad C_0 = C_c \quad (10.91)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η παραπάνω Π.Π.Σ. από την κατασκευή της είναι μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση του πίνακα  $T(s)^{-1}$  πρδ. οι πίνακες  $[\rho E - A \ B]$  και  $[(\rho E - A)^T \ -C_0^T]^T$  δεν περιέχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ , και άρα η Π.Π.Σ.

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + (B u) u(t) \quad (10.92\alpha)$$

$$\xi(t) = C_0 x(t) \quad (10.92\beta)$$

θα είναι μια παρατηρήσιμη πραγμάτωση του πίνακα  $T(s)^{-1} u$  πρδ. ο πίνακας  $[(\rho E - A)^T \ -C_0^T]^T$  δεν περιέχει μηδενικά στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  και

$$T(s)^{-1} u = C_0 (sE - A)^{-1} (B u) \quad (10.93)$$

### Βήμα 3<sup>ο</sup>

Η ζητούμενη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων θα είναι η εξής :

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + (B u) u(t) \quad (10.94\alpha)$$

$$y(t) = (\nu C_0) x(t) \quad (10.94\beta)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε τώρα

- 1) ότι η απεικόνιση (10.92β) μεταξύ των ψευδοκαταστάσεων των Π.Π.Σ. (10.73) και (10.94α) είναι αμφίσημη λόγω του ότι η πραγμάτωση (10.92) είναι παρατηρήσιμη και συνεπώς ικανοποιείται το κριτήριο (1) του ορισμού 10.21.
- 2) η σχέση (10.66) ικανοποιείται και συνεπώς η συνθήκη (2) του ορισμού 10.21.

Από (1) και (2) έχουμε ότι τα συστήματα (10.1) και (10.83) είναι "ισοδύναμα" που αποδεικνύει το θεώρημα. □

**Παράδειγμα 10.25** Θεωρείστε την γενική Π.Π.Σ.

$$(\rho^2+5\rho+6) \beta(t) = (\rho+1) u(t) \quad (\text{E.1}\alpha)$$

$$y(t) = (5-2\rho) \beta(t) + (3\rho+2) u(t) \quad (\text{E.1}\beta)$$

της οποίας η καινοκική πολυωνυμική περιγραφή είναι η εξής :

$$\begin{bmatrix} \rho^2+5\rho+6 & \rho+1 & 0 \\ 2\rho-5 & 3\rho+2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.2}\alpha)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ 1) \xi(t) \quad (\text{E.2}\beta)$$

όπου

$$\xi(t) = [\beta(t)^T, -u(t)^T, y(t)^T]^T \quad (\text{E.3})$$

**Βήμα 1<sup>ο</sup>** Παρατηρούμε ότι ο πίνακας

$$[Q(\rho) \ R(\rho)] = [T(\rho) \ I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \rho^2+5\rho+6 & \rho+1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\rho-5 & 3\rho+2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{E.4})$$

είναι κανονικός κατά γραμμές και συνεπώς το πρώτο βήμα παραλείπεται.

Ορίζουμε το πίνακα

$$S(\rho) = \begin{bmatrix} \rho^2 & \rho & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

Τότε θα έχουμε

$$Q(\rho) = T(\rho) = \begin{bmatrix} \rho^2 & \rho & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = S(\rho) Q_c \quad (\text{E.6})$$

και

$$R(\rho) = I_3 = \begin{bmatrix} \rho^2 & \rho & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S(\rho) R_c \quad (\text{E.7})$$

**Βήμα 2<sup>ο</sup>** Βρίσκουμε μια ισχυρά μη αναγώγιμη πραγμάτωση του  $T(s)^{-1}$  ως εξής :

Ορίζουμε την στοιχειώδη πραγμάτωση

$$\rho E_c - A_c = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & \rho & -1 & & & 0 \\ 0 & 0 & \rho & & & \\ \hline & & & 0 & -1 & \\ & & & 0 & -\rho & \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] ; C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; B_c = I_6 \quad (\text{E.8})$$

από την οποία παίρνουμε βάσει της σχέσης (10.90)

$$\rho E - A = \rho E_c - A_c + Q_c C_c = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \rho & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & \rho & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\rho} & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{\rho} & 0 & 0 & 2 & -\rho & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad B = R_c = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$C_0 = C_c = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{E.9})$$

**Βήμα 3<sup>ο</sup>** Η Π.Π.Σ στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων :

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + (B U) u(t) \quad (\text{E.10}\alpha)$$

$$y(t) = (\gamma C_0) x(t) \quad (\text{E.10}\beta)$$

ή ισοδύναμα

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \rho & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & \rho & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\rho} & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{\rho} & 0 & 0 & 2 & -\rho & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{E.11}\alpha)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) x(t) \quad (\text{E.11}\beta)$$

θα είναι "ισοδύναμη" με την Π.Π.Σ. (E.1). Επίσης θα υπάρχει η εξής αμφίεση που θα συνδέει τις ψευδοκαταστάσεις  $\xi(t)$  και  $x(t)$  των συστημάτων (E.2) και (E.11) :

$$\xi(t) = C_0 x(t) = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] x(t) \quad (\text{E.12})$$

από όπου και συμπεραίνουμε ότι

$$\beta(t) = x_1(t) ; \quad u(t) = -x_4(t) ; \quad y(t) = x_6(t) \quad (\text{E.13}) \quad \square$$



Αυτό το καινούργιο είδος "ισοδυναμίας" είναι μια ειδική μορφή της θεμελιώδους ισοδυναμίας συστημάτων καθώς και ένας διαφορετικός χαρακτηρισμός της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων όπως φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 10.26** Η γενική Π.Π.Σ. (10.73) και η Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων (10.75) είναι "ισοδύναμες" εάν  $-v$  είναι πλήρως ισοδύναμες.

#### Απόδειξη

( $\Leftarrow$ ) Εστω ότι οι Π.Π.Σ. (10.73) και (10.75) είναι πλήρως ισοδύναμες και συνεπώς υπάρχουν πολυωνυμικοί πίνακες καταλλήλων διαστάσεων  $M(s)$ ,  $N(s)$ ,  $X(s)$  και  $Y(s)$  τέτοιοι ώστε ο μετασχηματισμός

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(\rho) & 0 & T(\rho) & U \\ X(\rho) & I & -v & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \rho E - A & B \\ -C & D \\ \hline -N(\rho) & -Y(\rho) \\ 0 & -I \end{array} \right] = 0 \quad (10.95)$$

να είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Από τις McMillan συνθήκες του παραπάνω πλήρως ισοδύναμου μετασχηματισμού θα έχουμε ότι ο  $Y(\rho)$  είναι ένας σταθερός πίνακας  $\text{prd. } Y(\rho) = Y_0$  και ότι  $N(\rho) = N_0 + H E \rho$  για κάποιον σταθερό πίνακα  $H$ , οπότε η σχέση (10.95) μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} M(\rho) & 0 & T(\rho) & U \\ X(\rho) & I & -v & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} \rho E - A & B \\ -C & D \\ \hline -N_0 - H E \rho & -Y_0 \\ 0 & -I \end{array} \right] = 0 \quad (10.96)$$

Εαν τώρα πολλαπλασιάσουμε από δεξιά τον πρώτο σύνθετο πίνακα και από αριστερά τον δεύτερο πίνακα με τους πίνακες

$$Q = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -H & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ H & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (10.97)$$

αντίστοιχα, θα πάρουμε τον επίσης πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} M(\rho) - T(\rho)H & 0 & T(\rho) & U \\ X(\rho) + \gamma H & I & -\gamma & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \rho E - A & B \\ -C & D \\ -N_0 - HA & -Y_0 + HB \\ 0 & -I \end{bmatrix} = \quad (10.98)$$

ο οποίος μας δίνει από το θεώρημα 10.15 ότι η απεικόνιση

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 + HA & Y_0 - HB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.99)$$

είναι μια αμφίεση που ικανοποιεί το διάγραμμα 10.5 και συνεπώς οι Π.Π.Σ. (10.73)

και (10.75) είναι "ισοδύναμες" σύμφωνα με τον ορισμό 10.21.

( $\Rightarrow$ ) Εάν οι Π.Π.Σ. (10.73) και (10.75) είναι "ισοδύναμες" τότε προφανώς θα είναι και θεμελιώδεις ισοδύναμες και άρα σύμφωνα με το θεώρημα 10.15 θα είναι πλήρως ισοδύναμες.  $\square$

**Συμπέρασμα 10.27** Η Π.Π.Σ. (10.73) και η Π.Π.Σ. (10.94) είναι "ισοδύναμες" και συνεπώς από το θεώρημα 10.26 πλήρως ισοδύναμες. Είναι εύκολο να δειχθεί βάσει της εφαρμογής 9.71 ότι οι πλήρως ισοδύναμοι μετασχηματισμοί που συνδέουν τις δύο αυτές Π.Π.Σ. είναι οι εξής :

$$\begin{bmatrix} T(s)C_0(sE-A)^{-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE-A & BU \\ -\gamma C_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (10.100)$$

και

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) & U \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE-A & BU \\ -\gamma C_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sE-A)^{-1}BT(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (10.101) \quad \square$$

**Θεώρημα 10.28** Δύο Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων είναι πλήρως ισοδύναμες εαν  $-ν$  είναι τέλεια ισοδύναμες.

### Απόδειξη

( $\Rightarrow$ ) Στην περίπτωση που οι γενικές Π.Π.Σ. βρίσκονται στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και είναι πλήρως ισοδύναμες θα έχουμε από το θεώρημα 10.26 ότι υπάρχει μια αμφίεση μεταξύ των χώρων λύσεων-εισόδων των δύο συστημάτων της μορφής

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_0 + HA & Y_0 - HB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ -u(t) \end{bmatrix} \quad (10.102)$$

που ικανοποιεί το διάγραμμα 10.5. Αρα οι δύο αυτές Π.Π.Σ. θα είναι θεμελιώδεις ισοδύναμες (ορισμός 10.3, θεώρημα 10.4) και συνεπώς τέλεια ισοδύναμες από λήμμα 10.5.

( $\Leftarrow$ ) Είναι φανερό ότι οι συνθήκες της τέλει ισοδυναμίας συστημάτων ταυτίζονται με τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων.  $\square$

Μια διαφορετική απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να έχουμε από τους Pugh & Hayton (1990). Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια της "ισοδυναμίας" μεταξύ δύο γενικών Π.Π.Σ. της μορφής (10.1) κατά τον ίδιο τρόπο που είχε προταθεί από τον Wolovich (1974) λαμβάνοντας υπόψη μας τον ορισμό 10.21 καθώς και τα παραπάνω αποτελέσματα.

**Ορισμός 10.29** Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  είναι δύο γενικές Π.Π.Σ. της μορφής (10.1) με καινουργικές πολυωνυμικές περιγραφές  $\Sigma_1^{(N)}, \Sigma_2^{(N)}$  της μορφής (10.73). Οι  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  θα λέγονται *ισοδύναμες* (equivalent) εαν  $-ν$  οι αντίστοιχες "ισοδύναμες" Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων των  $\Sigma_1^{(N)}, \Sigma_2^{(N)}$  είναι τέλεια ισοδύναμες.  $\square$

Το θεώρημα 10.26 μπορεί να μεταφερθεί και στην περίπτωση όπου και οι δύο Π.Π.Σ. είναι της μορφής (10.1), όπως φαίνεται στο παρακάτω

**Θεώρημα 10.30** Δύο γενικές Π.Π.Σ. είναι "ισοδύναμες" εαν-ν είναι πλήρως ισοδύναμες.

**Απόδειξη**

( $\Rightarrow$ ) Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  είναι δύο "ισοδύναμες" Π.Π.Σ.. Αυτό σημαίνει σύμφωνα με τον ορισμό 10.29 ότι οι "ισοδύναμες" ή σύμφωνα με το θεώρημα 10.26 πλήρως ισοδύναμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $S_1$  και  $S_2$  των καινουργικών πολυωνυμικών περιγραφών  $\Sigma_1^{(N)}, \Sigma_2^{(N)}$  είναι τέλεια ισοδύναμες ή ισοδύναμα σύμφωνα με το θεώρημα 10.28 πλήρως ισοδύναμες. Αρα θα έχουμε ότι

$$\Sigma_1 \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \Sigma_1^{(N)} \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} S_1 \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} S_2 \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \Sigma_2^{(N)} \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \Sigma_2 \quad (10.103)$$

Από την μεταβατική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων (Walker 1988) θα έχουμε ότι οι γενικές Π.Π.Σ.  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  είναι πλήρως ισοδύναμες.

( $\Leftarrow$ ) Εστω  $\Sigma_1, \Sigma_2$  είναι δύο πλήρως ισοδύναμες Π.Π.Σ. και  $S_1, S_2$  είναι οι αντίστοιχες ισοδύναμες ή από θεώρημα 10.26 πλήρως ισοδύναμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ . Τότε θα έχουμε ότι

$$S_1 \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \Sigma_1^{(N)} \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} S_1 \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} S_2 \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} \Sigma_2^{(N)} \underset{\text{ισοδυν.}}{\overset{\text{πλήρως}}{\sim}} S_2 \quad (10.104)$$

και άρα σύμφωνα με την μεταβατική ιδιότητα της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων οι Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $S_1$  και  $S_2$  θα είναι πλήρως ισοδύναμες ή από το θεώρημα 10.28 τέλεια ισοδύναμες.  $\square$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η "ισοδυναμία" συστημάτων ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων και συνεπώς θα διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων στο  $\mathbb{C}\{w\}$  ή ισοδύναμα θα διατηρεί αναλλοίωτα τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται ενδεικτικά στο συμπέρασμα 10.18.

### 10.5 Περίληψη.

Ένας εύστοχος χαρακτηρισμός της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων έχει δοθεί στο κεφάλαιο αυτό σε σχέση με την ύπαρξη μιας αμφίεσης που συνδέει τους "πεπερασμένους" αλλά και "κρουστικούς" χώρους λύσεων Π.Π.Σ. κάτω από συγκεκριμένη είσοδο. Ο χαρακτηρισμός αυτός βοήθησε στην επεξήγηση του πραγματικού ρόλου των συνθηκών της πλήρους ισοδυναμίας. Έτσι για παράδειγμα οι McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων οι οποίες προηγουμένως είχαν εμφανιστεί κάπως αυθαίρετα τώρα φαίνεται να παίζουν καθοριστικό ρόλο.

Η θεμελιώδης ισοδυναμία συστημάτων λοιπόν είναι η πλήρης ερμηνεία υπό μορφή απεικονίσεων του μετασχηματισμού της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων. Έτσι όπου η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων μας δίνει τον τρόπο που συνδέονται οι Rosenbrock πίνακες Π.Π.Σ., η θεμελιώδης ισοδυναμία συστημάτων θα έρχεται να μας δώσει μια ερμηνεία, με την μορφή απεικονίσεων μεταξύ των χώρων λύσεων των δεδομένων διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τις Π.Π.Σ..

Δώσαμε στο κεφάλαιο αυτό επίσης μια γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich (1974) η οποία όπως δείξαμε ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων. Μερικά χρήσιμα αποτελέσματα της καινούργιας αυτής ισοδυναμίας ήταν ο αλγόριθμος προσδιορισμού μιας "ισοδύναμης" Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων μια γενικής Π.Π.Σ. καθώς και ότι η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων ανάγεται στην τέλεια ισοδυναμία συστημάτων όταν και οι δύο ισοδύναμες Π.Π.Σ. βρίσκονται στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων.

B I B Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

- [A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence.(I)., *Journal of the Australian Mathematical Society*, Ser.B, **27**, pp.194–222.
- [B1] Blomberg H. and Ylinen R., 1983, *Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems.*, Academic Press : New York
- [B2] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations and the pole/zero structure at infinity of non–proper and interconnected Linear Multivariable Systems., *Int.J.Control*, **33**, pp.393–411.
- [C1] Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence.(II)., *Journal of the Australian Mathematical Society*, Ser. B **27**, pp.223–237.
- [C2] Cullen D.J., 1986, State space realizations at infinity., *Int.J.Control*, **43**, No.4, pp.1075–1088.
- [F1] Fretwell P., 1986, Ph.D.Thesis, Loughborough University of Technology.
- [F2] Fuhrmann P.A., 1977, On strict system equivalence and similarity.", *Int.J.Control*, **25**, No.1, pp.5–10.
- [H1] Hayton G.E., Fretwell P. and Pugh A.C., 1986, Fundamental equivalence of generalized state space systems. , *IEEE Trans.Auto. Control*, **AC–31**, No.5, pp.431–439.
- [H2] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1990, Infinite frequency structure preserving transformations for general polynomial system matrices., *Int.J.Control*, **52**, No.1, pp.1–14.
- [H3] Hinrichsen D. and Prätzel–Wolters D., 1980, Solution modules and system equivalence., *Int.J.Control*, **32**, No.5, 777–802.
- [K1] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1992, Generalized state space system matrix equivalents of a Rosenbrock system matrix., submitted to *IMA Journal of Mathematical Control and its Information*.

- [K2] Karampetakis N.P., Pugh A.C., Vardulakis A.I.G. and Hayton G.E., 1993, An extension of the Wolovich definition of equivalence., submitted to *IEEE Trans. Auto. Control* and to *32nd IEEE Conference on Decision and Control*, December 15–17, San Antonio.
- [P1] Pernebo L., 1977, Notes on strict system equivalence., *Int.J.Control*, **25**, No.1, pp.21–38.
- [P2] Pugh A.C., 1976, The McMillan degree of a polynomial system matrix., *Int.J.Control*, **24**, pp.129–135.
- [P3] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **27**, pp.657–672.
- [P4] Pugh A.C., Hayton G.E. and Fretwell P., 1987, On transformation of matrix pencils and implications in Linear System Theory., *Int.J.Control*, **45**, pp.529–548.
- [P5] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1990, On two transformations in the generalized theory of linear systems.", *Mathematical Report Number A109*, Loughborough University, Loughborough.
- [P6] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, On a fundamental notion of equivalence in Linear System Theory., *Second IFAC Workshop on "Systems Structure and Control"*, PERGAMON PRESS, pp.356–359, to appear in *Kybernetika* (August 1993).
- [P7] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, Notions of equivalence for general linear systems., submitted to *Int. J. Control*.
- [P8] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, A fundamental notion of equivalence for Linear Multivariable Systems., *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, (to appear in *IEEE Trans. Auto. Control*).
- [P9] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, Interpretation of a certain McMillan degree condition appearing in Control., *Proceedings of Sixth IMA Conference on Control : Modeling, Computation,*

*Information.* (submitted to *IMA Journal of Control and its Information*).

- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State Space and Multivariable Theory*, T.Nelson and Sons Ltd..
- [S1] Smith M.C., 1981, Matrix fractions and strict system equivalence., *Int.J.Control*, **34**, pp.869–883.
- [T1] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1988, A singular system realization for arbitrary matrix fraction descriptions., *ISCAS'88*, 615–618.
- [T2] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1986, Canonical forms for singular systems., *Proceedings of the 25th Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, December 1986, pp.2144–2149.
- [V1] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods*, Nelson–Wiley, London.
- [V2] Vardulakis A.I.G. and Fragulis G., 1989, Infinite elementary divisors of polynomial matrices and impulsive solutions of linear homogeneous matrix differential equations., *Circuit Systems and Signal Process*, **8**, 357–373.
- [V3] Vardulakis A.I., 1991, On the transformation of a polynomial matrix model of a Linear Multivariable System to generalized state–space form., presented in the *30th IEEE Conference on Decision and Control Transactions on Automatic Control*, December 11–13, 1991, Brighton, England.
- [V4] Verghese G.C., 1978, *Infinite Frequency Behavior in Generalized Dynamical Systems*, Ph.D.Thesis, Stanford University.
- [W1] Walker A.B., 1988, *Equivalence Transformations of Linear Systems*, Ph.D.Thesis, University of Hull.
- [W2] Wolovich W.A., 1973, Determination of state–space representation for linear multivariable systems., *Automatica*, **9**, 97–106.
- [W3] Wolovich W.A., 1974, *Linear Multivariable Control*, (Berlin : Springer Verlag).
- [W4] Wolovich W.A. & Guidorzi R., 1977, A general algorithm for determining state–space representations., *Automatica*, **13**, 295–299.



## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 11

### Η ΣΥΝΕΙΣΦΟΡΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΥΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ Π.Π.Σ. ΣΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΙΕΡΑΡΧΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

11.1 *Εισαγωγή.*

11.2 *Ιεραρχική θεωρία συστημάτων και πλήρης ισοδυναμία Π.Π.Σ..*

11.3 *Περίληψη.*

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### 11.1 Εισαγωγή.

Τα γραμμικά σταθερά πολυμεταβλητά συστήματα αυτομάτου ελέγχου μπορούν να θεωρηθούν ως διασύνδεση υποσυστημάτων, τα οποία με την σειρά τους αποτελούνται από την διασύνδεση άλλων υποσυστημάτων κατώτερης βαθμίδος και ούτω καθεξής (Rosenbrock & Pugh 1974). Στην συγκεκριμένη εργασία μάλιστα των Rosenbrock & Pugh (1974) εκτός από τον ορισμό της ιεραρχικής θεωρίας συστημάτων έχουμε και την συμβολή της αυστηρής ισοδυναμίας συστημάτων (Rosenbrock 1970) στην μελέτη της ιεραρχικής θεωρίας συστημάτων. Στην περίπτωση όμως που μας ενδιαφέρει και η "κρουστική" συμπεριφορά των συστημάτων αυτών (εκτός από την "πεπερασμένη" συμπεριφορά) τότε μια μικρή αναθεώρηση των αποτελεσμάτων αυτών φαίνεται ότι είναι αναγκαία, λόγω του ότι η αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή συστημάτων μόνο στο  $\mathbb{C}$ . Στο κεφάλαιο λοιπόν αυτό, διατηρώντας τον γνωστό ορισμό της ιεραρχικής θεωρίας συστημάτων, θα προτείνουμε ως εφαρμογή της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων μια μικρή αναθεώρηση των αποτελεσμάτων των Rosenbrock & Pugh (1974).

### 11.2 Ιεραρχική θεωρία συστημάτων και πλήρης ισοδυναμία Π.Π.Σ..

Θα ξεκινήσουμε την ενότητα αυτή με ένα ερώτημα που θα μας εντάξει εξ αρχής στον ορισμό της ιεραρχικής θεωρίας συστημάτων.

**Τι υποστηρίζει η ιεραρχική θεωρία συστημάτων ;**

Η ιεραρχική θεωρία συστημάτων θεωρεί ότι κάθε σύστημα  $\Sigma$  μπορεί να θεωρηθεί ως διασύνδεση (interconnection) άλλων υποσυστημάτων  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ . Το κάθε υποσύστημα  $\Sigma_i$  μπορεί με την σειρά του να θεωρηθεί ως διασύνδεση άλλων υποσυστημάτων  $\Sigma_{i1}, \Sigma_{i2}, \dots, \Sigma_{i n_i}$  χαμηλότερης βαθμίδος. Σύμφωνα μ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια ιεραρχία βαθμίδων  $0, 1, 2, \dots, p$ ; η βαθμίδα 0 αντιστοιχεί στο σύστημα  $\Sigma$ , η βαθμίδα 1 αντιστοιχεί στα υποσυστήματα  $\Sigma_i$ , η βαθμίδα 2 αντιστοιχεί στα υποσυστήματα  $\Sigma_{ij}$  και ούτω καθεξής. Η βαθμίδα  $q$  θεωρείται ως η μεγαλύτερη υποδιαίρεση του συστήματος  $\Sigma$  και τα στοιχεία της βαθμίδος αυτής θεωρούνται ως τα στοιχειώδη στοιχεία που αποτελούν το σύστημα  $\Sigma$ .

Το παραπάνω σχήμα είναι πολύ γενικό. Για τον λόγο αυτό θα το μεταφέρουμε με την μορφή πινάκων στο πεδίο που μας ενδιαφέρει: τα γραμμικά σταθερά πολυμεταβλητά συστήματα αυτομάτου ελέγχου.

Θεωρήστε λοιπόν ένα σύστημα  $\Sigma$  το οποίο σχηματίζεται από την διασύνδεση των συστημάτων  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  τα οποία έχουν την μορφή:

$$A_i(\rho) \beta_i(t) = B_i(\rho) u_i(t) \quad (11.1\alpha)$$

$$y_i(t) = C_i(\rho) \beta_i(t) + D_i(\rho) u_i(t) \quad (11.1\beta)$$

όπου  $A_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r_i \times r_i}$  με  $\det[A_i(\rho)] \neq 0$ ,  $B_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r_i \times m_i}$ ,  $C_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p_i \times r_i}$ ,  $D_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p_i \times m_i}$  και τα οποία αντιστοιχούν σε πίνακες Rosenbrock της μορφής

$$P_i(s) := \begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \\ -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(p_i+r_i) \times (r_i \times m_i)} \quad (11.2)$$

ενώ στο σύστημα  $\Sigma$  αντιστοιχεί η Π.Π.Σ.

$$A(\rho) \beta(t) = B(\rho) u(t) \quad (11.3\alpha)$$

$$y(t) = C(\rho) \beta(t) + D(\rho) u(t) \quad (11.3\beta)$$

όπου  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times r}$  με  $\det[A(\rho)] \neq 0$ ,  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{r \times m}$ ,  $C(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times r}$ ,  $D_i(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  με πίνακα Rosenbrock της μορφής

$$P(s) := \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ -C(s) & D(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{(p+r) \times (r \times m)} \quad (11.4)$$

Θέλουμε να εκφράσουμε τον πίνακα  $P(s)$  του συστήματος  $\Sigma$ , σε σχέση με τους πίνακες των υποσυστημάτων από τα οποία αποτελείται  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$ , ...,  $P_n(s)$  και με τις εξισώσεις διασύνδεσης

$$u_i(t) = -\sum_{j=1}^n F_{ij} y_j(t) + K_i u(t) \quad (11.5\alpha)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^n L_i y_i(t) \quad (11.5\beta)$$

με  $F_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times p_j}$ ,  $K_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m}$  και  $L_i \in \mathbb{R}^{p \times p_i}$  για  $i=1,2,\dots,n$  και  $j=1,2,\dots,n$ . Για τον λόγο αυτό ορίζουμε τα παρακάτω :

$$\beta_s = \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \vdots \\ \beta_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(t)^{\left[ \sum_{i=1}^n r_i \right] \times 1} ; u_s = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(t)^{\left[ \sum_{i=1}^n m_i \right] \times 1} ; y_s = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(t)^{\left[ \sum_{i=1}^n p_i \right] \times 1}$$

$$A_s(s) = \text{block diag}[A_1(s), A_2(s), \dots, A_n(s)] \in \mathbb{R}[s]^{\left[ \sum_{i=1}^n r_i \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n r_i \right]}$$

$$B_s(s) = \text{block diag}[B_1(s), B_2(s), \dots, B_n(s)] \in \mathbb{R}[s]^{\left[ \sum_{i=1}^n r_i \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n m_i \right]}$$

$$C_s(s) = \text{block diag}[C_1(s), C_2(s), \dots, C_n(s)] \in \mathbb{R}[s]^{\left[ \sum_{i=1}^n p_i \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n r_i \right]}$$

$$D_s(s) = \text{block diag}[D_1(s), D_2(s), \dots, D_n(s)] \in \mathbb{R}[s]^{\left[ \sum_{i=1}^n p_i \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n m_i \right]}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\left[ \sum_{i=1}^n m_i \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n p_i \right]} ; \quad K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\left[ \sum_{i=1}^n m_i \right] \times m}$$

$$L = [L_1, L_2, \dots, L_n] \in \mathbb{R}^{p \times \left[ \sum_{i=1}^n p_i \right]} \quad (11.6)$$

Τότε οι εξισώσεις των συστημάτων  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  οδηγούν σε ένα σύστημα  $\Sigma_s$  και μπορούν να γραφτούν πιο αναλυτικά ως εξής :

$$A_s(\rho) \beta_s(t) = B_s(\rho) u_s(t) \quad (11.7\alpha)$$

$$y_s(t) = C_s(\rho) \beta_s(t) + D_s(\rho) u_s(t) \quad (11.7\beta)$$

Στις εξισώσεις αυτές αντιστοιχεί ο πίνακας Rosenbrock

$$P_s(s) := \begin{bmatrix} A_s(s) & B_s(s) \\ -C_s(s) & D_s(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[s]^{\left[ \sum_{i=1}^n (p_i + r_i) \right] \times \left[ \sum_{i=1}^n (r_i + m_i) \right]} \quad (11.8)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα  $\Sigma$  που προκύπτει από την διασύνδεση των συστημάτων  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} A_s(\rho) & B_s(\rho) & 0 \\ -C_s(\rho) & D_s(\rho) & I \\ 0 & -I & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_s(t) \\ -u_s(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t) \quad (11.9\alpha)$$

$$y(t) = (0 \ 0 \ L) \begin{bmatrix} \xi_s(t) \\ -u_s(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} \quad (11.9\beta)$$

στις οποίες αντιστοιχεί ο πίνακας Rosenbrock

$$P_{\Sigma}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_s(s) & B_s(s) & 0 & 0 \\ -C_s(s) & D_s(s) & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ \hline 0 & 0 & -L & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(p+\tilde{r}) \times (\tilde{r}+m)} \quad (11.10)$$

όπου  $\tilde{r} = \sum_{i=1}^n (r_i + p_i + m_i)$  και υποθέτουμε ότι

$$\det \begin{bmatrix} A_s(\rho) & B_s(\rho) & 0 \\ -C_s(\rho) & D_s(\rho) & I \\ 0 & -I & F \end{bmatrix} \neq 0 \quad (11.11)$$

Είναι σημαντικό να ξέρουμε ποιές ιδιότητες του συστήματος  $\Sigma$  παραμένουν αναλλοίωτες έπειτα από μετασχηματισμούς των υποσυστημάτων του  $\Sigma_i$   $i=1,2,\dots,n$ . Οι Rosenbrock & Pugh (1974) έδειξαν ότι η μηδενική δομή του συστήματος  $\Sigma$  παραμένει αναλλοίωτη έπειτα από μετασχηματισμούς αντιστρέψιμης ισοδυναμίας των υποσυστημάτων του  $\Sigma_i$ . Ένα ερωτηματικό όμως παραμένει όσον αφορά την δομή του συστήματος  $\Sigma$  στο  $s=\infty$ . Την λύση στο πρόβλημα αυτό θα δώσουμε με το παρακάτω

**Θεώρημα 11.1** Κάθε αναλλοίωτο στοιχείο στο  $\mathcal{CU}\{\omega\}$  του συστήματος  $\Sigma$  κάτω από τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας παραμένει επίσης αναλλοίωτο κάτω από οποιοδήποτε μετασχηματισμό πλήρους ισοδυναμίας των υποσυστημάτων του  $\Sigma_i$ .

**Απόδειξη** Κάθε πίνακας Rosenbrock μιας Π.Π.Σ.  $\Sigma'_i$ , πλήρους ισοδυναμίας της Π.Π.Σ.  $\Sigma_i$ , γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} M_i(s) & 0 \\ X_i(s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \\ -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_i(s) & B'_i(s) \\ -C'_i(s) & D'_i(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i(s) & Y_i(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

όπου ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Κατά συνέπεια λοιπόν κάθε σύνολο τέτοιων μετασχηματισμών που εφαρμόζεται στα συστήματα  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  μπορεί να αναπαρασταθεί από τον παρακάτω προφανώς πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό :

$$\begin{bmatrix} M(s) & 0 \\ X(s) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_s(s) & B_s(s) \\ -C_s(s) & D_s(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_s(s) & B'_s(s) \\ -C'_s(s) & D'_s(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (11.13)$$

όπου

$$\begin{aligned} M(s) &= \text{block diag}[M_1(s), M_2(s), \dots, M_n(s)] \\ N(s) &= \text{block diag}[N_1(s), N_2(s), \dots, N_n(s)] \\ X(s) &= \text{block diag}[X_1(s), X_2(s), \dots, X_n(s)] \\ Y(s) &= \text{block diag}[Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_n(s)] \end{aligned} \quad (11.14)$$

Εφαρμόζοντας την διασύνδεση της μορφής (11.5) στο σύστημα  $\Sigma'_s$  θα πάρουμε ένα καινούργιο σύνθετο σύστημα  $\Sigma'$  το οποίο είναι πολύ εύκολο να διαπιστωθεί ότι συνδέεται με το σύστημα  $\Sigma$  διαμέσου του μετασχηματισμού

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} M(s) & 0 & 0 & 0 \\ X(s) & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \hline -\bar{0} & -\bar{0} & -\bar{0} & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} A_s(s) & B_s(s) & 0 & 0 \\ -C_s(s) & D_s(s) & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ \hline -\bar{0} & -\bar{0} & -\bar{0} & -L \end{array} \right] = \\ & = \left[ \begin{array}{ccc|c} A'_s(s) & B'_s(s) & 0 & 0 \\ -C'_s(s) & D'_s(s) & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ \hline -\bar{0} & -\bar{0} & -\bar{0} & -L \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} N(s) & Y(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \hline -\bar{0} & -\bar{0} & -\bar{0} & I \end{array} \right] \quad (11.15) \end{aligned}$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι σύνθετοι πίνακες του μετασχηματισμού (11.15) συνδέονται με αυστηρά ισοδύναμους μετασχηματισμούς με τους παρακάτω πίνακες

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} M(s) & 0 & A'_s(s) & B'_s(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X(s) & I & -C'_s(s) & D'_s(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] = \\
 & = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} M(s) & 0 & 0 & 0 & A'_s(s) & B'_s(s) & 0 & 0 \\ X(s) & I & 0 & 0 & -C'_s(s) & D'_s(s) & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & F & K \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -L & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & I & 0 & -F & -K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & L & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (11.16)
 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cc|cc} A_s(s) & B_s(s) & 0 & 0 \\ -C_s(s) & D_s(s) & 0 & 0 \\ -N(s) & -Y(s) & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & -I & F & K \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & -L & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|cc} A_s(s) & B_s(s) & 0 & 0 \\ -C_s(s) & D_s(s) & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ 0 & 0 & -L & 0 \\ \hline -N(s) & -Y(s) & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{array} \right] \quad (11.17)
 \end{aligned}$$

Οι παραπάνω σύνθετοι πίνακες, λόγω του ότι σχηματίζονται από τους σύνθετους πίνακες του πλήρους ισοδύναμου μετασχηματισμού (11.13), θα ικανοποιούν τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας και συνεπώς ο μετασχηματισμός (11.15) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός που αποδεικνύει το θεώρημα.  $\square$



**Συμπέρασμα 11.2** Κάθε μετασχηματισμός πλήρους ισοδυναμίας στα υποσυστήματα  $\Sigma_i$   $i=1,2,\dots,n$  ή ισοδύναμα στο σύστημα  $\Sigma_s$  ισοδυναμεί με έναν μετασχηματισμό πλήρους ισοδυναμίας στο σύνθετο σύστημα  $\Sigma$ . Στην περίπτωση μάλιστα που οι πίνακες  $F$ ,  $K$  και  $L$  είναι πολυωνυμικοί μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι σύνθετοι πίνακες της πλήρους ισοδυναμίας (11.15) ικανοποιούν επίσης τις συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας και συνεπώς το θεώρημα 11.1 ισχύει πάλι.  $\square$

Το θεώρημα 11.1 λοιπόν μας δείχνει ότι κάθε ιδιότητα του συστήματος  $\Sigma$  που παραμένει αναλλοίωτη με τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας, παραμένει ανεπηρέαστη από την συγκεκριμένη πολυωνυμική περιγραφή (διαμέσου της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων) των υποσυστημάτων  $\Sigma_i$ . Αρα μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο εξής θεώρημα.

**Θεώρημα 11.3** Εστω μια γενική Π.Π.Σ.  $\Sigma$  η οποία προκύπτει από την διασύνδεση των γενικών Π.Π.Σ.  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  (δες (11.9)). Τότε υπάρχει μια Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων η οποία είναι πλήρως ισοδύναμη της Π.Π.Σ.  $\Sigma$ .

**Απόδειξη** Εστω  $\Sigma'_i$  η πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων της γενικής Π.Π.Σ.  $\Sigma_i$  κάτω από τον πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό (9.88) :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i(s) & B_i(s) \\ -C_i(s) & D_i(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sE_i - A_i & B_i \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) & Y(s) \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

Τότε θα πάρουμε σύμφωνα με την σχέση (11.15) τον παρακάτω πλήρη ισοδύναμο μετασχηματισμό

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} A_s(s) & B_s(s) & 0 & 0 \\ -C_s(s) & D_s(s) & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ \hline 0 & 0 & -L & 0 \end{array} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{ccc|c} sE_s - A_s & B_s & 0 & 0 \\ -C_s & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ \hline 0 & 0 & -L & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} N'(s) & Y'(s) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \quad (11.19)$$

όπου

$$\begin{aligned} sE_s - A_s &= \text{block diag}[sE_1 - A_1, sE_2 - A_2, \dots, sE_n - A_n] \\ B_s &= \text{block diag}[B_1, B_2, \dots, B_n] \\ C_s &= \text{block diag}[C_1, C_2, \dots, C_n] \end{aligned} \quad (11.20)$$

Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι ο παρακάτω μετασχηματισμός :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} I & -B_s F & B_s & 0 \\ \hline 0 & L & 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} sE_s - A_s & B_s & 0 & 0 \\ -C_s & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ \hline 0 & 0 & -L & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} sE_s - A_s + B_s F C_s & B_s K \\ \hline -L C_s & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc|c} I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \end{array} \right] \quad (11.21)$$

είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός. Απο την συμμετρική ιδιότητα λοιπόν της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων θα έχουμε ότι η σύνθετη γενική Π.Π.Σ. Σ θα είναι πλήρως ισοδύναμη με την Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων :

$$(\rho E_s - A_s + B_s F C_s) \xi_s(t) = B_s K u(t) \quad (11.22\alpha)$$

$$y(t) = L C_s \xi_s(t) \quad (11.22\beta)$$

που αποδεικνύει το θεώρημα. □

**Παράδειγμα 11.4** Θεωρήστε τις παρακάτω Π.Π.Σ :

$$\Sigma_1: (\rho^2 + 5\rho + 6) \beta_1(t) = (\rho + 1) u_1(t) \quad (E.1\alpha)$$

$$y_1(t) = (5 - 2\rho) \beta_1(t) + (3\rho + 2) u_1(t) \quad (E.1\beta)$$

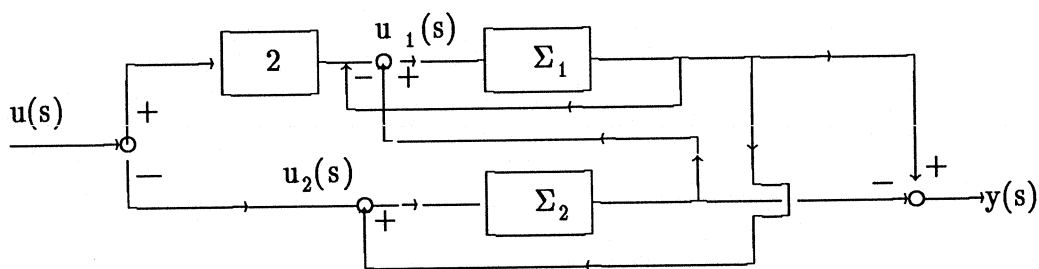
και

$$\Sigma_2: \begin{bmatrix} \rho+1 & \rho^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\beta_2(t)} = \begin{bmatrix} \rho+1 \\ 0 \end{bmatrix} u_2(t) \quad (\text{E.2}\alpha)$$

$$y_2(t) = (1 \ 0) \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\beta_2(t)} \quad (\text{E.2}\beta)$$

Θεωρείστε επίσης τις παρακάτω διασυνδέσεις των συστημάτων  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$ :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + 2u(t) \\ u_2(t) &= y_1(t) - u(t) \\ y(t) &= y_1(t) - y_2(t) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$



Διάγραμμα 11.1 Το σύνθετο σύστημα  $\Sigma$ .

Συνεπώς από την σχέση (11.6) μπορούμε να ορίσουμε τους πίνακες

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad L = [1 \ -1] \quad (\text{E.4})$$

Ο πίνακας Rosenbrock του σύνθετου συστήματος  $\Sigma$  θα έχει την μορφή:

$$P_{\Sigma} = \left[ \begin{array}{ccc|c} A_s(s) & B_s(s) & 0 & 0 \\ -C_s(s) & D_s(s) & I & 0 \\ 0 & -I & F & K \\ \hline 0 & 0 & -L & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.5})$$

όπου

$$A_s(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -s^2+5s+6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] ; \quad B_s(s) = \left[ \begin{array}{c|c} -s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$C_s(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} 5-2s & 0 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] ; \quad D_s(s) = \left[ \begin{array}{c|c} 3s+2 & 0 \\ -0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.6})$$

Θεωρείστε επίσης τις πλήρεις ισοδύναμες Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων  $\Sigma_{R_1}$  και  $\Sigma_{R_2}$ , της μορφής Bosgra & Van Der Weiden (δες ενότητα 9.3.2β), των  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα.

$$\Sigma_{R_1} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 5s+6 & s+1 & -s & 0 & 0 \\ 2s-5 & 3s+2 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{E.7})$$

και

$$\Sigma_{R_2} = \left[ \begin{array}{cccc|c} s+1 & 0 & s+1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \quad (\text{E.8})$$

Τότε το πλήρως ισοδύναμο σύστημα του σύνθετου συστήματος (E.5) θα είναι το εξής :

$$(\rho E_s - A_s + B_s F C_s) \xi_s(t) = B_s K u(t) \quad (\text{E.9}\alpha)$$

$$y(t) = L C_s \xi_s(t) \quad (\text{E.9}\beta)$$

$\acute{o}\pi\omega\upsilon$ 

$$\rho E_s - A_s + B_s F C_s = \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 5s+6 & s+1 & -s & 0 & & & & & & \\ 2s-5 & 3s+2 & 0 & 1 & & & & & & \\ s & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{array} \right] +$$

$$+ \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ - & - & 0 & - & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \end{array} \right] =$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc|ccccc} 5s+6 & s+1 & -s & 0 & & & & & & \\ 2s-5 & 3s+2 & 0 & 1 & & & & & & \\ s & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \end{array} \right] \quad (\text{E.10})$$

$$B_s K = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right] \quad (\text{E.11})$$

$$L C_s = (1 \ -1) \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ - & - & 0 & - & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \end{array} \right] =$$

$$= (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1) \quad (\text{E.12}) \quad \square$$

### 11.3 Περίληψη.

Το κεφάλαιο αυτό αποτέλεσε μια άμεση εφαρμογή της πλήρους ισοδυναμίας Π.Π.Σ., με αντικείμενο την μελέτη της ιεραρχικής θεωρίας συστημάτων. Πιο συγκεκριμένα αποδείξαμε (θεώρημα 11.1) ότι κάθε ιδιότητα μιας Π.Π.Σ.  $\Sigma$ , η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων, παραμένει ανεπηρέαστη από την συγκεκριμένη πολυωνυμική περιγραφή (διαμέσου της πλήρους ισοδυναμίας) των υποσυστημάτων  $\Sigma_i$   $i=1,2,\dots,n$  του  $\Sigma$ . Αποτέλεσμα του συμπεράσματος αυτού ήταν η δημιουργία αλγορίθμου αναγωγής (θεώρημα 11.3) μιας γενικής Π.Π.Σ.  $\Sigma$ , η οποία προκύπτει από την διασύνδεση γενικών Π.Π.Σ.  $\Sigma_i$   $i=1,2,\dots,n$ , σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων. Μια σημαντική εφαρμογή των παραπάνω αποτελεσμάτων και πιο συγκεκριμένα του θεωρήματος 11.3 και του συμπεράσματος 11.2 είναι ότι ανάγει το πρόβλημα της μετατόπισης πόλων στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  (pole placement) μιας γενικής Π.Π.Σ. διαμέσου ανάδρασης εξόδου ή ανάδρασης του διανύσματος καταστάσεως, στο πρόβλημα της μετατόπισης πόλων στο  $\mathbb{C}U\{\omega\}$  μιας Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων διαμέσου ανάδρασης εξόδου.

**BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- [B1] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations in generalized state-space form for polynomial system matrices and the definition of poles, zeros and decoupling zeros at infinity, *Int.J.Control*, **33**, 393–411
- [H1] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1990, Infinite frequency structure-preserving transformations for general polynomial system matrices., *Int.J.Control*, **52**, 1–14.
- [K1] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, Generalized state space system matrix equivalent of a Rosenbrock system matrix., submitted to *IMA Journal of Mathematical Control and its Information* (accepted in European Control Conference in Grenoble ,July 1991).
- [K2] Karampetakis N.P., A.C.Pugh, A.I.Vardulakis and G.E.Hayton, 1992, Minimal realizations and equivalent generalized state-space system matrices of a Rosenbrock system matrix., presented in *SINS'92* and submitted to *Int.J.Control*.
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State Space and Multivariable Theory.*, Nelson, London.
- [R2] Rosenbrock H.H. and Pugh A.C., 1974, Contributions to a hierarchical theory of systems., *Int.J.Control*, **19**, 845–867.
- [V1] Verghese G.C., 1978, *Infinite-frequency behaviour in generalized dynamical systems.*, Ph.D. dissertation, Stanford University, Stanford, C.A..

### 13. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΑΙΡΕΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Σκοπός της διατριβής αυτής ήταν να απαντήσει σε ορισμένα καίρια ερωτήματα που αφορούν ισοδυναμίες ρητών πινάκων, ισοδυναμίες γραμμικά χρονικά αμετάβλητων πολυμεταβλητών συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, καθώς και ερωτήματα δομής συστημάτων πρδ.

- 1) Υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ ρητών πινάκων που να διατηρεί αναλλοίωτη την δομή τους σε μια περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{s\}$  και συνεπώς να γενικεύει όλα τα γνωστά είδη ισοδυναμιών πολυωνυμικών και ρητών πινάκων ;
- 2) Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της αλγεβρικής δομής πολυωνυμικών πινάκων πρδ. μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και δεξιά και αριστερά ελάχιστοι δείκτες ;
- 3) Ποια είναι η ερμηνεία στο πεδίο του χρόνου της πλήρους ισοδυναμίας πολυωνυμικών πινάκων καθώς και πολυωνυμικών περιγραφών συστημάτων ;
- 4) Πως μπορούμε να ανάγουμε μια γενική Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων καθώς και ποια μορφή παίρνει η πλήρης ισοδυναμία συστημάτων στην ειδική μορφή των κλασματικών Π.Π.Σ. ;

Όσον αφορά την πρώτη ερώτηση έχουμε παρουσιάσει, στο κεφάλαιο 4, τον καινούργιο ορισμό της  $\Omega$ -ισοδυναμίας μεταξύ ρητών πινάκων, με πιθανόν διαφορετικές διαστάσεις, η οποία έχει την ιδιότητα να διατηρεί αναλλοίωτη την μηδενική δομή ρητών πινάκων σε μια περιοχή  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{s\}$ .

Η δεύτερη ερώτηση έχει πλήρως αναλυθεί στο κεφάλαιο 6, όπου η σχέση μεταξύ του χώρου λύσεων του ομογενούς συστήματος  $A(\rho)\beta(t)=0$  (με  $\rho:=d/dt$  τον διαφορικό τελεστή,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  και  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r \leq \max(p, m)$ ) και των χαρακτηριστικών στοιχείων του



πολυωνυμικού πίνακα  $A(\rho)$  έχει διατυπωθεί.

Η τρίτη ερώτηση έχει μελετηθεί στα κεφάλαια 7 και 10. Μια ερμηνεία της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων στηριζόμενη σε αμφιέσεις (ένα προς ένα και επί γραμμικών απεικονίσεων) μεταξύ των "πεπερασμένων" και "κρουστικών" χώρων λύσεων των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τα δύο συστήματα (ομογενή συστήματα στην περίπτωση της πλήρους ισοδυναμίας), έχει δωθεί.

Η τέταρτη ερώτηση καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίου 9. Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε πέντε διαφορετικούς τρόπους αναγωγής μιας Π.Π.Σ. σε μια πλήρως ισοδύναμη Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων και ορίζουμε την πλήρη αντιστρέψιμη ισοδυναμία για αριστερές και δεξιά κλασματικές Π.Π.Σ. η οποία αποδεικνύεται ότι ανήκει στην ίδια κλάση ισοδυναμίας με την πλήρη ισοδυναμία συστημάτων.

Τα παραπάνω ερωτήματα δεν ήταν τα μόνα που είχε σαν σκοπό να απαντήσει αυτή η διατριβή αλλά ήταν τα πιο κύρια, πράγμα που φαίνεται από το πλήθος των συμπερασμάτων που απορρέουν από την λύση τους πρδ. η γενίκευση της μορφής Kronecker για ρητούς πίνακες, η ερμηνεία των αναλλοίωτων μηδενικών στο  $\mathbb{C}\{w\}$  ενός συστήματος διαμέσου της επίλυσης του προβλήματος της μηδενικής εξόδου, η γενίκευση της ισοδυναμίας του Wolovich, η σύνδεση όλων των ισχυρά μη αναγώγιμων συστημάτων με την ίδια συνάρτηση μεταφοράς διαμέσου της πλήρους ισοδυναμίας συστημάτων κ.α.

Σκοπός της διατριβής δεν είναι μόνο να επιλύσει τα παραπάνω προβλήματα αλλά και να προβληματίσει, δημιουργώντας έτσι καινούργια θέματα που αξίζουν παραπάνω έρευνα. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής άλυτα προβλήματα που προκύπτουν από αυτήν την διατριβή :

- 1) Η μελέτη του αναλλοίωτου των ελαχίστων δεικτών στηλών και γραμμών πολυωνυμικών (ρητών πινάκων) κάτω από τον μετασχηματισμό της πλήρους ισοδυναμίας ( $\Omega$ -ισοδυναμίας όπου  $\Omega \subseteq \mathbb{C}\{w\}$ ).
- 2) Η ανάλυση, σύνθεση και σχεδίαση ιδιόμορφων συστημάτων της μορφής

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t) \quad (1)$$

ή

$$A(\rho)\beta(t) = 0 \quad (2\alpha)$$

$$y(t) = B(\rho)\beta(t) \quad (2\beta)$$

όπου  $\rho := d/dt$  ο διαφορικός τελεστής,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{q \times n}$  με  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r \leq \max(q, n)$  και  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{q \times m}$  ( $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times n}$ ), συστήματα για τα οποία δεν υπάρχει συνάρτηση μεταφοράς και όπου οι ιδιότητες ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας διαφέρουν από τις γνωστές ιδιότητες γενικών Π.Π.Σ. που μελετήσαμε στην διατριβή αυτή. Σημαντικός παράγων στην επίλυση του προβλήματος αυτού μπορεί να σταθεί το κεφάλαιο 6.

- 3) Η μελέτη ισοδύναμων μετασχηματισμών συστημάτων της μορφής (1) ή (2).

---

## SUMMARY

---

The major purpose of this study is to answer certain questions concerning transformations between rational matrices having possibly different dimensions, transformations between linear time invariant multivariable systems, as well as, questions surrounding the structure of singular systems :

- 1) Is there a transformation, between rational matrices having possibly different dimensions, which has the property of preserving the zero structure of rational matrices in the region  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$  and thus to extend all the known equivalence transformations between polynomial and rational matrices ?
- 2) Which is the geometrical characterization of the algebraic structure of polynomial matrices i.e. the zero structure in  $\mathbb{C}U\{\omega\}$ , the right and left minimal indices ?
- 3) Which is the interpretation in the time domain of the transformation of full equivalence, as well as, of full system equivalence ?
- 4) How can we reduce a general polynomial matrix description (PMD) to a full system equivalent generalized state-space system, as well as, which is the particular form of full system equivalence in the specific class of left and right matrix fraction descriptions (MFDs) ?

With respect to the first question we have presented, in chapter 4, a new definition of  $\Omega$ -equivalence between rational matrices having possibly different dimensions which has the property of preserving the zero structure of rational matrices in a region  $\Omega \subseteq \mathbb{C}U\{\omega\}$ .

The second question has been dealt with fully in chapter 6 where the relation between the solution space of the homogeneous system  $A(\rho)\beta(t)=0$  (with  $\rho:=d/dt$  the

differential operator,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times m}$  and  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r \leq \max(p, m)$ ) and the structural invariants of the polynomial matrix  $A(\rho)$  has been investigated.

The third question has been studied in chapters 7 and 10. An interpretation of full system equivalence based in certain bijective maps between the finite and infinite solution sets of the differential equations describing the two systems (homogeneous systems in case of full equivalence) has been given.

The fourth question has covered the greatest part of chapter 9. We gave five different reduction methods of a general PMD to a fully system equivalent generalized state-space system and we have defined the notion of full unimodular equivalence for left and right MFDs which has been proved to belong into the same equivalence class with full system equivalence.

The above questions do not exhaust the entire body of concerns of this dissertation but they consist the most interesting ones, a fact which becomes apparent from the numerous conclusions resulting from them i.e. the extension of the Kronecker canonical form for rational matrices, the interpretation of the finite and infinite invariant zeros of a system through the solution of the zeroing problem, the extension of the Wolovich definition of equivalence, the connection of all strongly irreducible systems with the same transfer function via the full system equivalence transformation e.t.c.

The purpose of the present dissertation is not only to reach solutions for the above problems but also to give a stimulus for further investigation. As an instance we refer to the following unresolved problems which come as conclusions of this dissertation :

- 1) The study of the preservation of the right and left minimal indices of polynomial (rational) matrices under the transformation of full equivalence ( $\Omega$ -equivalence where  $\Omega \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ).
- 2) The analysis, synthesis and design of singular systems of the form

$$A(\rho)\beta(t) = B(\rho)u(t)$$

or

$$A(\rho)\beta(t) = 0$$

$$y(t) = B(\rho)\beta(t)$$

where  $\rho := d/dt$  is the differential operator,  $A(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{q \times n}$  with  $\text{rank}_{\mathbb{R}} A(\rho) = r \leq \max(q, n)$  and  $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{q \times m}$  ( $B(\rho) \in \mathbb{R}[\rho]^{p \times n}$ ) i.e. those systems have not transfer function matrix and their controllability and observability properties differ from the known ones. An important factor in the solution of this problem may be the chapter 6.

- 3) The notion of equivalence between singular systems of the above form.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι να δώσει μια απόδειξη στην πρόταση 3.24. Ο λόγος που αποδεικνύουμε την πρόταση 3.24 στο σημείο αυτό της διατριβής είναι διότι χρειαζόμαστε ορισμένα πρόσφατα αποτελέσματα του κεφαλαίου 5, κάτι που καθιστούσε αδύνατη την απόδειξη στο κεφάλαιο 3.

Ένα χρήσιμο λήμμα για την απόδειξη της πρότασης 3.24 είναι το παρακάτω :

**Λήμμα 1** (Hayton et al. 1989) Έστω  $P(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$  και  $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$  είναι ένας σταθερός πίνακας τέτοιος ώστε :

$$\delta_M(P(s)B) = \delta_M(P(s)) \quad (1)$$

Τότε για κάθε πίνακα  $C(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times q}$  θα ισχύει η εξής σχέση :

$$\delta_M(P(s)B \ C(s)) = \delta_M(P(s) \ C(s)) \quad (2) \quad \square$$

Ερχόμαστε τώρα με την βοήθεια του λήμματος 1 καθώς και του θεωρήματος 5.40 να δείξουμε την απόδειξη της πρότασης 3.24 :

**Πρόταση 3.24** Έστω  $P_1(s), P_2(s) \in \mathcal{P}_0[p, m]$ . Εάν οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών τότε οι  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  είναι πλήρως ισοδύναμοι.

**Απόδειξη** Έστω ότι οι πίνακες  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$  έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  καθώς και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες στηλών και γραμμών. Τότε από το θεώρημα 5.40 και οι δύο αυτοί πίνακες θα είναι  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμοι, ή από συμπέρασμα 4.28, πλήρως ισοδύναμοι με έναν πίνακα  $sE - A$  στην Kronecker καιονική μορφή, ο οποίος θα περιέχει την κοινή μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ , καθώς και τους ίδιους ελάχιστους δείκτες γραμμών και στηλών των πινάκων  $P_1(s)$  και  $P_2(s)$ . Είναι εύκολο αν ακολουθήσουμε την μέθοδο αναγωγής του θεωρήματος 5.24 ή αυτήν των (Hayton et al. 1989) να δούμε ότι υπάρχουν πίνακες  $M(s), N$  (όπου ο  $N$  έχει πλήρη τάξη γραμμών) και  $M', N'(s)$  (όπου ο πίνακας  $M'$  έχει πλήρη τάξη στηλών) τέτοιοι ώστε οι παρακάτω μετασχηματισμοί :

$$M(s) (sE - A) = P_1(s) N \quad (3)$$

και

$$M' P_2(s) = (sE - A) N'(s) \quad (4)$$

να είναι πλήρως ισοδύναμοι μετασχηματισμοί. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσεως (4) με τον πίνακα  $M(s)$  παίρνουμε με την βοήθεια της σχέσεως (3) τον παρακάτω μετασχηματισμό :

$$[M(s) \cdot M'] P_2(s) = P_1(s) [N \cdot N'(s)] \quad (5)$$

Παρατηρούμε ότι οι μετασχηματισμοί :

$$I \cdot [M(s) \cdot M' \quad P_1(s)] = [M(s) \quad P_1(s)] \begin{bmatrix} M' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (6)$$

και

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2(s) \\ -N'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2(s) \\ -N \cdot N'(s) \end{bmatrix} \cdot I \quad (7)$$

είναι πλήρως ισοδύναμοι μετασχηματισμοί λόγω του ότι οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} M' & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad (8)$$

είναι σταθεροί και συνεπώς δεν παίζουν ρόλο στις McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας καθώς και έχουν πλήρη τάξη στηλών και γραμμών αντίστοιχα (από την υπόθεση μας για τους πίνακες  $M'$  και  $N$ ) γεγονός που αποδεικνύει ότι οι σύνθετοι πίνακες των μετασχηματισμών (6) και (7) δεν έχουν μηδενικά στο  $\mathbb{C}\{s\}$ . Αρα οι πίνακες  $[M(s) \cdot M' \quad P_1(s)]$  και  $[P_2(s)^T \quad [N \cdot N'(s)]^T]^T$  θα έχουν την ίδια μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και το ίδιο έλλειμμα τάξης με τους πίνακες  $[M(s) \quad P_1(s)]$  και  $[P_2(s)^T \quad N'(s)^T]^T$  και συνεπώς λόγω των συνθηκών της πλήρους ισοδυναμίας των μετασχηματισμών (3) και (4), οι σύνθετοι πίνακες  $[M(s) \cdot M' \quad P_1(s)]$  και  $[P_2(s)^T \quad [N \cdot N'(s)]^T]^T$  θα έχουν πλήρη τάξη και δεν θα περιέχουν μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$ .

Έχοντας ως δεδομένο ότι ο πίνακας  $M$  έχει πλήρη τάξη στηλών και χρησιμοποιώντας την Binet–Cauchy φόρμουλα καθώς και τον ορισμό του McMillan βαθμού

ως τον μεγαλύτερο βαθμό από όλους τους βαθμούς όλων των οριζουσών ενός πίνακα θα πάρουμε ότι :

$$\delta_M(M(s) \cdot M') = \delta_M(M(s)) \quad (9)$$

Ομοια μπορούμε να πάρουμε ότι :

$$\delta_M(N \cdot N'(s)) = \delta_M(N'(s)) \quad (10)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το λήμμα 1 και τις σχέσεις (9) και (10) μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι :

$$\delta_M(M(s) \cdot M' \quad P_1(s)) \stackrel{(9)}{\underset{\lambda \eta \mu . 1}{=}} \delta_M(M(s) \quad P_1(s)) \stackrel{(3)}{=} \delta_M(P_1(s)) \quad (11)$$

και

$$\delta_M \begin{bmatrix} P_2(s) \\ -N \cdot N'(s) \end{bmatrix} \stackrel{(10)}{\underset{\lambda \eta \mu . 1}{=}} \delta_M \begin{bmatrix} P_2(s) \\ -N'(s) \end{bmatrix} \stackrel{(4)}{=} \delta_M(P_2(s)) \quad (12)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι οι σύνθετοι πίνακες του μετασχηματισμού (5), α) έχουν πλήρη τάξη, β) δεν έχουν μηδενική δομή στο  $\mathbb{C}\{s\}$  και γ) ικανοποιούν τις McMillan συνθήκες της πλήρους ισοδυναμίας. Άρα ο μετασχηματισμός (5) είναι ένας πλήρης ισοδύναμος μετασχηματισμός που αποδεικνύει την πρόταση.  $\square$

Μπορούμε κάλλιστα να παρατηρήσουμε ότι το λήμμα 1 ισχύει και για την περίπτωση ρητών πινάκων και συνεπώς μπορούμε να συνάγουμε, βάσει παρόμοιας αποδείξεως, ότι η ταύτιση της αλγεβρικής δομής δύο ρητών πινάκων συνεπάγεται απευθείας και την σύνδεση τους μέσω ενός  $\mathbb{C}\{s\}$ -ισοδύναμου μετασχηματισμού.

### BIBLIOΓΡΑΦΙΑ

- [H1] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1989, Matrix pencil equivalents of a general polynomial matrix., *Int.J.Control*, **49**, 1979–1987.



## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Την βιβλιογραφία που ακολουθεί αποτελούν όλες οι αναφορές από το κείμενο της διατριβής, τα βιβλία και ερευνητικές εργασίες που ήταν χρήσιμα στον συγγραφέα αυτής της διατριβής για την εμπέδωση βασικών εννοιών καθώς και όλες οι δημοσιεύσεις που έχουν γίνει από τον ίδιο τον συγγραφέα σε συνέδρια και περιοδικά, και πιστοποιούν την εγκυρότητα των παραπάνω αποτελεσμάτων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Α.Ι.Βαρδουλάκη για την πλούσια υποστήριξη που μου προσέφερε σε ξενόγλωσσα βιβλία και ερευνητικές εργασίες, προσφέροντας μου την δυνατότητα να ζήσω από κοντά την συνεχή εξέλιξη της έρευνας στο αντικείμενο της Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων.

Ενα μεγάλο ευχαριστώ επίσης στους Prof. A.C.Pugh και G.E. Hayton για την προσφορά ενός μεγάλου πλήθους εργασιών δικών τους και όχι μόνο με θέμα ισοδύναμους μετασχηματισμούς Π.Π.Σ., στους Prof. A.J.J.Van Der Weiden, Prof. A. Karamancioglu, Prof. P. Rocha για την γενναιόδωρη προσφορά των διδακτορικών τους διατριβών με σκοπό την ενημέρωσή μου σε θέματα Γραμμικών Συστημάτων, και τέλος στον Prof. Tan Shaohua για την προσφορά δύο εργασιών του πολύ χρήσιμες στην εκπόνηση αυτής της διατριβής. Θέλω να τονίσω ότι η προσφορά των εργασιών των παραπάνω καθηγητών στάθηκε σημαντική στα ερευνητικά αποτελέσματα της διατριβής αυτής καθώς και σε παράλληλες ερευνητικές εργασίες του συγγραφέα.

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [Λ1] Λάκκη Κ., Γραμμική Αλγεβρα, 1984 , Θεσσαλονίκη.
- [Λ2] Λάκκη Κ., Αλγεβρα, 1984 , Θεσσαλονίκη.
- [Μ1] Μποζαμπαλίδη Σ.Μ., Γραμμική Αλγεβρα, 1984, Θεσσαλονίκη.
- [Φ1] Φραγκούλης Γ., 1990, Ανάλυση Γενικευμένων Ιδιόμορφων Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου, Διδακτορική Διατριβή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Θεσσαλονίκη.
- [Ψ1] Ψωμόπουλος Ε., Αλγεβρα, 1984 , Θεσσαλονίκη.

Ξ Ε Ν Η Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

- [A1] Anderson B.D.O., Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (I), *J. Australian Math. Soc.*, Ser.B, **27**, 194–222.
- [A2] Applevich J.D., 1981, Time–domain input–output representations of linear systems. *Automatica*, **17**, 509–522.
- [A3] Atiyah M.F. and MacDonald I.G., 1969, *Introduction to Commutative Algebra*. Reading, MA: Addison–Wesley.
- [B1] Barnett S., 1971, *Matrices in Control Theory with applications to linear programming*, Van Nostrand Reinhold Company, London.
- [B2] Bernhard P., 1982, On singular implicit linear dynamical systems., *Siam J. Control and Optimization*, **20**, 612–633.
- [B3] Bhoot S.S., 1986, *An investigation of the effect of complete equivalence on singular matrix pencils.*, M.Sc., Loughborough University of Technology.
- [B4] Blomberg H. and Ylinen R., 1983, *Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems.*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.166, Academic Press, London.
- [B5] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1980, Input–output invariants for linear multivariable systems., *IEEE Trans. Auto. Control*, **25**, 20–36.
- [B6] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations in generalized state–space form for polynomial system matrices, and the definition of poles, zeros and decoupling zeros at infinity., *Int.J.Control*, **33**, 393–411.  
Springer–Verlag, New York.
- [B7] Bosgra O.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1981, Realizations and the pole/zero structure at infinity of non–proper and interconnected linear multivariable systems., *Proc. Joint Automatic Control Conf. TA–4E.1*, American Automatic Control Council, Charlottesville, V.A..
- [C1] Callier F.M., Cheng V.H.L. and Desoer C.A., 1981, Dynamic interpretation of poles and transmission zeros for distributed multivariable systems., *IEEE Trans.*

- Circuit & Systems, CAS-28*, pp.300–307.
- [C2] Callier F.M. and Desoer C.A., 1982, *Multivariable Feedback Systems.*, New York : Springer Verlag.
- [C3] Chen C.T., 1984, *Linear System Theory and Design.*, Holt, Reinehart and Winston, New York.
- [C4] Christodoulou M.A., 1988, Realizations for generalized state–space singular systems., *Control and Dynamic Systems*, 251–306.
- [C5] Cohen N., 1987, Polynomial systems and Kronecker invariants., *Linear Algebra and its Applications*, **87**, 257–265.
- [C6] Commault C. and Dion J.M., 1981, Structure at infinity of linear multivariable systems. A geometric approach., *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-27**, pp.693.
- [C7] Conte G. and Perdon A.M., 1982, Generalized state–space realizations for non–proper rational transfer functions., *Syst. Contr. Lett.*, **1**, 270–276.
- [C8] Coppel W.A. and Cullen D.J., 1985, Strong system equivalence (II)., *J. Austral. Math. Soc.Ser. B*, **27**, 223–237.
- [C9] Cullen D.J., 1986, State–space realizations at infinity. *Int.J.Control*, **43**, 1075–1088.
- [C10] Cullen D.J., 1987, Underlying algebraic framework of equivalence relations on linear systems., *Int.J.Control*, **45**, 1415–1425.
- [D1] DeClaris N. and A.Rindos, 1984, Semistate analysis of neural networks in Aplysia California., *Proc. 27th MSCS*, Morgantown, WV, 686–689.
- [D2] Desoer C.A. and Schulman J.D., 1974, Zeros and poles of transfer functions and their dynamical interpretation., *IEEE Trans. Circuits & Systems*, **CAS-21**, 3–8.
- [F1] Ferreira P.M., 1980, Infinite system zeros., *Int.J.Control*, **32**, pp.731–735.
- [F2] Forney G.D., 1975, Minimal bases of rational vector spaces with applications to multivariable linear systems., *SIAM J. Control*, **13**, pp.493–520.
- [F3] Fragulis G., Mertzios B.G. and Vardulakis A.I., 1991, Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion.,

- Int.J.Control*, **53**, 431–443.
- [F4] Fretwell P., 1986, Ph.D.Thesis, Loughborough University of Technology.
- [F5] Fuhrmann P.A., 1977, On strict system equivalence and similarity., *Int.J.Control*, **25**, 5–10
- [G1] Gantmacher F.R., 1959, *The Theory of Matrices*. New York : Chelsea.
- [G2] Gohberg I., Langaster P and Rodman I., 1982, *Matrix Polynomials.*, Academic Press, New York.
- [G3] Gracia J.M., Hoyos J. De and Zaballa I., 1990, A characterization of feedback equivalence., *Siam J.Control and Optimization*, **28**, 1103–1112.
- [G4] Grimm Jose, 1988, Realization and canonicity for implicit systems., *SIAM J. Control and Optimiz.*, **26**, 1331–1347.
- [G5] Guidorzi R., 1981, Invariants and canonical forms for systems structural and parametric identification., *Automatica*, **17**, 117–133.
- [H1] Hayton G.E. and Pugh A.C., 1985, Equivalence of generalized state–space systems : New results. *Proc. MTNS'85*, Las Vegas, USA, pp.323–337.
- [H2] Hayton G.E., Fretwell P. and Pugh A.C., 1986, Fundamental equivalence of generalized state–space systems. , *IEEE Trans.Auto. Control*, Vol.AC–31, No.5, pp.431–439.
- [H3] Hayton G.E., Walker A. and Pugh A.C., 1987, On a transformation for general polynomial matrices with applications., *Proc.MTNS'87*, Phoenix, USA.
- [H4] Hayton G.E., Pugh A.C. and Fretwell P., 1988, Infinite elementary divisors of a matrix polynomial and implications., *Int.J.Control*, **47**, 53–64.
- [H5] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1989, On matrix pencil equivalents of a general polynomial matrix., *Int.J.Control*, **49**, 1797–1987.
- [H6] Hayton G.E., Walker A.B. and Pugh A.C., 1990, Infinite frequency structure preserving transformations for general polynomial system matrices., *Int. J. Control*, **52**, No.1, pp.1–14.

- [H7] Heymann M. and Thorpe J.A., 1970, Transfer equivalence of linear dynamical systems., *Siam J. Control*, **8**, 19–40.
- [H8] Hinrichsen D. and Pratzel–Wolters D., 1980, General Hermite matrices and complete invariants of (strict) system equivalence., *Report Nr. 30*, Forschungsschwerpunkt Dynamische Systeme, Universität Bremen.
- [H9] Hinrichsen D. and Pratzel–Wolters D., 1988, Solution Modules and System Equivalence., *Int.J.Control*, Vol.**32**, No.5, 777–802, 1980.
- [J1] Janssen P.H., 1988, General results on the McMillan degree and the Kronecker indices of ARMA and MFD models., *Int.J.Control*, **48**, 591–608.
- [K1] Kailath T., 1980, *Linear Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall.
- [K2] Kalman R.E., 1965, Irreducible realizations and the degree of a rational matrix., *SIAM J.Appl.Math.*, **13**, 520–544.
- [K3] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1991, Polynomial matrices and equivalent singular pencils., presented in *Workshop on Singular Systems* organized by N.Karcanias, City University, December 1991.
- [K4] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1992, Equivalence transformations of rational matrices., *Proceedings of the Second IFAC Workshop on System Structure and Control*, Prague, 3–5 September 1992, 40–43, to appear in *Kybernetika* in August 1993..
- [K5] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1992, Equivalence transformations of rational matrices and applications., to appear in *Int.J.Control*.
- [K6] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I., 1992, Matrix fractions and full system equivalence, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **9**, 147–160.
- [K7] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, On the solution space of singular state–space AR representations., *Proceedings of International Symposium on Implicit and Nonlinear Systems*, pp.191–196, 14–15 December 1992, Fort Worth, Texas.
- [K8] Karampetakis N.P., Pugh A.C. and Vardulakis A.I.G., 1993, An extension of the

- Wolovich definition of equivalence., submitted to *32nd IEEE Conference on Decision and Control*, December 15–17, San Antonio, and to *IEEE Trans. Auto. Control*.
- [K9] Karampetakis N.P., Vardulakis A.I.G. and Pugh A.C., 1993, Structural properties of square linear inverse systems., accepted to *IEEE Mediterranean Control Conference*, June 21–23, 1993, Chania, Crete, Greece.
- [K10] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1992, Generalized state space system matrix equivalents of a Rosenbrock system matrix., submitted to *IMA Journal of Mathematical Control and its Information* (accepted in European Control Conference in Grenoble ,July 1991).
- [K11] Karampetakis N.P., B.G.Mertzios and A.I.Vardulakis, 1992, Computation of the transfer function matrix and its Laurent expansion of generalized two-dimensional systems., to appear in *Int.J.Control*.
- [K12] Karampetakis N.P., B.G.Mertzios and A.I.Vardulakis, 1993, Generalized models of 2-D linear discrete systems and computation of its transfer function., accepted to *Second European Control Conference*, Gronongen, Netherlands.
- [K13] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, Structural invariants of polynomial matrices and solutions of autoregressive representations., to be submitted to *Siam Journal of Control*.
- [K14] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the solution space of discrete time AR representations., accepted to *IEEE Mediterranean Control Conference*, June 21–23, 1993, Chania, Crete, Greece.
- [K15] Karampetakis N.P. and Vardulakis A.I.G., 1993, On the solution space of continuous time AR representations., accepted to *Second European Control Conference*, June 28–July 1, 1993, Groningen, The Netherlands.
- [K16] Karcianas N., 1975, *Geometric theory of zeros and its use in feedback analysis.*, Ph.D. Thesis, University of Manchester, Elec. Eng. Dept., U.K., pp.245–247.
- [K17] Karcianas N. and Kouvaritakis B., 1979, The output zeroing problem and its

- relationship to the invariant zero structure., *Int.J.Control*, **30**, pp.395–415.
- [K18] Karcnias N. and Hayton G.E., 1981, State–space and transfer function invariant infinite zeros : A unified approach., *Joint Automatic Control Conf. TA4C*, Charlottesville, V.A..
- [K19] Kronecker L., 1890, *Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen.*, S.–B. Akad., Berlin 763–76.
- [K20] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1990, Realization of autoregressive equations in pencil and descriptor form., *SIAM J.Cont. Optimiz.*, **28**, 1162–1189.
- [K21] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1990, Realization and partial fractions., *Report BS–R9032*, CWI, Amsterdam, to appear in *Linear Algebra and its Applications*.
- [K22] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1991, Minimality of descriptor representations under external equivalence., *Automatica*, **27**, 985–995.
- [K23] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1991, State space formulas for transfer poles at infinity., *Report BS–R9108*, Dept. of Operations Research, Statistics and Systems Theory, Centre for Mathematics and Computer Science., Amsterdam, Netherlands.
- [K24] Kuijper M. and Schumacher J.M., 1991, Descriptor representations without direct feedthrough term., *Report BS–R9103*, Dept. of Operations Research, Statistics and Systems Theory, Centre for Mathematics and Computer Science., Amsterdam, Netherlands.
- [K25] Kuijper M., 1992, First–order representations of linear systems., Ph.D.Thesis, Centre for Mathematics and Computer Science., Amsterdam, Netherlands.
- [L1] Leontieff W.W., 1953, Static and dynamic theory, in : *Studies in the Structure of the American Economy*. (ed. : W.W. Leontieff), Oxford University Press, New York.
- [L2] Levy B, Kung S–Y, Morf M. and Kailath T., 1977, A unification of system equivalence definitions., *Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision*

- and Control*, New Orleans, pp.795–800.
- [L3] Lewis F.L., 1986, A survey of linear singular systems., *Circuit Systems & Signal Process*, **5**.
- [L4] Luenberger D.G., 1978, Time invariant descriptor systems., *Automatica*, **14**, 473–480.
- [M1] MacDuffe C.C., 1946, *The Theory of Matrices.*, Chelsea Publishing Co., New York.
- [M2] MacFarlane A.G.J. and Karcnias N., 1976, Poles and zeros of linear multivariable systems : a survey of the algebraic, geometric and complex–variable theory., *Int.J.Control*, **24**, pp.33–74.
- [M3] Manke J.W. *et al.*, 1978, Solvability of large–scale descriptor systems., Boeing Computer Services Co..
- [M4] McMillan B., 1952, Introduction to formal realization theory., *Bell Syst. Tech. J.*, **31**, 217–279, 541–600.
- [M5] Molinari B.P., 1978, Structural invariants of linear multivariable systems., *Int.J.Control*, **28**, pp.493–510.
- [M6] Morf M., 1975, Extended system matrices – transfer functions and system equivalence., *Proceedings of the 1975 IEEE Conference on Decision and Control*, Houston, pp.199–206.
- [M7] Morse A.S., 1973, Structural invariants of linear multivariable systems., *SIAM J.Control*, **11**, pp.446–465.
- [M8] Münzner H.F. and Prätzel–Wolters D., 1979, Minimal bases of polynomial modules, structural indices and Brunovsky–transformations., *Int. J. Control*, **30**, 291–318.
- [P1] Pernebo L., 1977, Notes on strict system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.**25**, No.1, pp.21–38.
- [P2] Pernebo L., 1978, *Algebraic Control Theory of Linear Multivariable Systems.*, Ph.D. Dissertation, Dept. of Automatic Control, Lund Institute of Technology.



- [P3] Pernebo L., 1981, An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems. — Part I : Structure Matrices and Feedforward design., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-26**, 171–182.
- [P4] Pernebo L., 1981, An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems. — Part II : Feedback realizations and feedback design., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-26**, 183–194.
- [P5] Prätzel–Wolters D., 1981, Brunovsky equivalence of system matrices : The reachable case., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC-26**, 429–434.
- [P6] Pugh A.C., Infinite frequency behaviour and matrix fractions descriptions.
- [P7] Pugh A.C., 1974, The relationship between order, degree and complexity in the hierarchical theory of systems., *Int.J.Control*, **20**, 713–719.
- [P8] Pugh A.C., 1974, Structural properties of linear multivariable systems., *Int.J.Control*, **20**, pp.191–202.
- [P9] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1984, The extended state space and matrix pencils., Proceedings of 23rd IEEE Conference on Decision & Control, Las Vegas, NV, December 1984.
- [P10] Pugh A.C. , 1976, The McMillan degree of a polynomial system matrix., *Int. J. Control.*, **24**, 129–135.
- [P11] Pugh A.C., 1977, Transmission and system zeros., *Int.J.Control*, **26**, pp.315–324.
- [P12] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, Vol.27, NO.5, 657–672.
- [P13] Pugh A.C. and Shelton A.K., 1978, On a new definition of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **27**, 657–672.
- [P14] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, The infinite zeros of a rational matrix., *Report C.T.5.*
- [P15] Pugh A.C. and Ratcliffe P.A., 1979, On the zeros and poles of a rational matrix., *Int. J. Control*, **30**, 213–226.

- [P16] Pugh A.C. and Krishnaswamy V., 1985, Algebraic and dynamic characterizations of poles and zeros at infinity., *Int.J.Control*, **42**, pp.1145–1153.
- [P17] Pugh A.C., Hayton G.E. and Fretwell P., 1987, On transformations of matrix pencils and implications in Linear System Theory., *Int.J.Control*, **45**, 529–548.
- [P18] Pugh A.C., Kafai A. and Hayton G.E., 1988, Some local results for Linear Systems and implications for state variable feedback., *Int.J.Control*, Vol.48, NO.5, 1755–1767.
- [P19] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1989, Transformations issues in Linear Systems Theory, Proceedings of the International Symposium MTNS–89, 107–116.
- [P20] Pugh A.C., Jones E.R.L., Demianczuk O. and Hayton G.E., 1989, Infinite-frequency structure and a certain matrix Laurent expansion., *Int.J.Control*, **50**, 1793–1805.
- [P21] Pugh A.C., Hayton G.E. and Walker A.B., 1990, System matrix characterization of input–output equivalence., *Int.J.Control*, **51**, 1319–1326.
- [P22] Pugh A.C. and Hayton G.E., 1990, On two transformations in the generalized theory of linear systems, *Mathematics Report Number A109*, Loughborough University, Loughborough.
- [P23] Pugh A.C., D.S.Johnson and Hayton G.E., 1992, On conditions guaranteeing two polynomial matrices possess identical zero structures., *IEEE Trans. Auto. Control*, **AC–37**, 1383–1386.
- [P24] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E. and A.I.G.Vardulakis, 1992, Interpretation of a certain McMillan degree condition appearing in control., *Proceedings of Sixth IMA Conference on Control : Modeling, Computation, Information*. U.M.I.S.T., 2–4 September 1992 (submitted to *IMA Journal of Control and its Information*).
- [P25] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E. and A.I.G.Vardulakis, 1992, On a fundamental notion of equivalence in Linear System Theory., *Second IFAC Workshop on "Systems Structure and Control"*, PERGAMON PRESS,

- pp.356–359, to appear in *Kybernetika* in August 1993.
- [P26] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, Notions of equivalence for general Linear Systems., submitted to *Int. J. Control*.
- [P27] Pugh A.C., Karampetakis N.P., Hayton G.E and A.I.G.Vardulakis, 1992, A fundamental notion of equivalence for Linear Multivariable Systems., *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, (to appear in *IEEE Trans. Auto. Control*).
- [R1] Rosenbrock H.H., 1970, *State Space and Multivariable Theory.*, Nelson, London.
- [R2] Rosenbrock H.H., 1973, The zeros of a system., *Int.J.Control*, **18**, pp.297.
- [R3] Rosenbrock H.H., 1974, Correction to "The zeros of a system.", *Int.J.Control*, **20**, pp.525.
- [R4] Rosenbrock H.H., 1974, Structural properties of linear dynamical systems., *Int.J.Control*, **20**, pp.191–202.
- [R5] Rosenbrock H.H., 1974, Order, degree and complexity., *Int.J.Control*, **19**, pp.323–31.
- [R6] Rosenbrock H.H. and Pugh A.C., 1974, Contributions to a hierarchical theory of systems., *Int.J.Control*, **19**, 845–867.
- [R7] Rosenbrock H.H. and Van Der Weiden A.J.J., 1977, Inverse systems., *Int.J.Control*, **25**, pp.389–392.
- [R8] Rosenbrock H.H., 1977, *Int.J.Control*, **25**, 1.
- [R9] Rosenbrock H.H., 1977, The transformation of strict system equivalence., *Int.J.Control*, **25**, 11–19.
- [S1] Sastry S.S. and Desoer C.A., 1981, Jump behaviour of circuit and systems., *IEEE Trans. Circuit and Systems*, **CAS-28**, 1109–1123.
- [S2] Schrader C.B. and Sain M.K., 1989, Research on system zeros., *Int.J.Control*, **50**, pp.1407–1433.
- [S3] Schumacher J.M., 1988, Transformations of linear systems under external equivalence., *Linear Algebra and its Applications*, **102**, 1–33.

- [S4] Schumacher J.M., 1991, A pointwise criterion for controller robustness., *Syst. Control Lett.*, **18**, 1–8.
- [S5] Smith M.C., 1981, Matrix fractions and strict system equivalence, *Int.J.Control*, **34**, 869–883.
- [S6] Spong M. W., 1986, A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems., *Circuit Systems & Signal Processing*.
- [S7] Stevens B.L., 1984, Modeling, simulation and analysis with state variables., *Report LG84RR002*, Lockheed–Georgia Co., Marietta, GA.
- [S8] Stott B., 1979, Power system response dynamic calculations., *Proc. IEEE*, **67**, 219–241.
- [S9] Suda N. and Mutsuyoshi E., 1978, Invariant zeros and input–output structure of linear time invariant systems., *Int.J.Control*, **28**, pp.525–596.
- [T1] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1986, Canonical forms for singular systems., *Proceedings of the 25th Conference on Decision and Control*, Athens, Greece, December 1986, pp.2144–2149.
- [T2] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1986, A canonical form for regular pencils of matrices., *Systems and Control Letters*, **7**, 373–376.
- [T3] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1988, A singular system realization for arbitrary matrix fraction descriptions., *ISCAS'88*, 615–618.
- [T4] Tan Shaohua and Vandewalle Joos, 1990, The use of the homogeneous form in the study of singular systems., *Circuit Systems & Signal Process*, **9**, 301–317.
- [T5] Taylor G.E. and Pugh A.C., 1985, Equivalence of generalized state–space systems : New results., *Proceedings of M.T.N.S. '85*, 323–337.
- [V1] Van Der Weiden A.J.J. and Bosgra O.H., 1979, The determination of structural properties of a linear multivariable system by operation of system similarity. 1. Stricly proper systems., *Int.J.Control*, **29**, pp.835.
- [V2] Van Der Weiden A.J.J. and Bosgra O.H., 1979, The determination of structural properties of a linear multivariable system by operation of system similarity.

2. Nonproper systems in generalized state-space form., *Int.J.Control*, **32**, pp.489.
- [V3] Van Der Weiden A.J.J., 1983, *The use of structural properties in linear multivariable control system design.*, Ph.D.Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [V4] Van Der Weiden A.J.J., Bosgra O.H. and Valk P., 1980, An algorithm for the decomposition of a system matrix in generalized state-space form., *Report 175-N*, Lab. Meas. Control, Delft University of Technology.
- [V5] Van Dooren P.M., Dewilde P. and Vandewalle J., 1979, On the determination of the Smith-McMillan form of a rational matrix from its Laurent expansion., *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-26**, 180-189.
- [V6] Vardulakis A.I.G. , Limebeer D.J.N. and Karcanias N., 1982, Structure and Smith-McMillan form of a rational matrix at infinity., *Int.J.Control*, **35**, 701-725.
- [V7] Vardulakis A.I. and Karcanias N., 1983, Classification of proper bases of rational vector spaces : minimal McMillan degree bases., *Int.J.Control*, **38**, 779-809.
- [V8] Vardulakis A.I.G. and Karcanias N., 1983, Relations between strict equivalence invariants and structure at infinity of matrix pencils., *IEEE Transactions on Autom.Control*, **AC-28**, 514-516.
- [V9] Vardulakis A.I.G., 1983, Structure and Smith-McMillan form and coprime MFDs of a rational matrix inside a region  $P = \Omega \cup \{\infty\}$ ., *Int.J.Control*, **38**, 927-957.
- [V10] Vardulakis A.I.G. and Fragulis G., 1989, Infinite elementary divisors of polynomial matrices and impulsive solutions of linear homogeneous matrix differential equations., *Circuit Systems and Signal Process* **8**, pp.357-373.
- [V11] Vardulakis A.I.G., 1991, *Linear Multivariable Control, Algebraic Analysis and Synthesis Methods*, Wiley, Chichester.
- [V12] Vardulakis A.I.G., 1991, On the transformation of a polynomial matrix model of a linear multivariable system to generalized state space form., *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control Transactions on Automatic*

- Control*, December 11–13, 1991, Brighton, England.
- [V13] Verghese G.C., Lèvy B. and Kailath T., 1978, Generalized state–space systems., *Proc. 1978 IEEE Conf. on Decision and Control*; New York, pp.518.
- [V14] Verghese G.C., 1978, *Infinite–Frequency Behaviour in Generalized Dynamical Systems.*, Ph.D.Thesis, Stanford University.
- [V15] Verghese G.C., Van Dooren P. and Kailath T., 1979, Properties of the system matrix of a generalized state–space system., *Int.J.Control.*, **30**, 235–243.
- [V16] Verghese G. and Kailath T., 1979, Impulsive behaviour in dynamical systems : Structure and significance., *Proc. 4th Int.Symp. on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Delft, The Netherlands, Vol.3, P.Dewilde, Ed. ; North Hollywood, Ca., Western Periodicals Co., pp.162–168.
- [V17] Verghese G., Kailath T., 1979, Eigenvector Chains for Finite and Infinite Zeros of Rational Matrices., *18th Proc.of CDC*.
- [V18] Verghese G.C. ,Lèvy B.C. and Kailath T., 1981, A generalized state–space for singular systems., *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**, 811–831.
- [V19] Verghese G.C. and Kailath T., 1981, Rational matrix structure., *IEEE Trans. Auto. Control.*, **AC–26**, 434–439.
- [V20] Verghese G.C., 1981, Further notes on singular descriptions., *Joint Automatic Control Conference, TA–4B*, Charlottesville, V.A..
- [W1] Walker B.W., 1988, *Equivalence Transformations for Linear Systems.*, Ph.D.Thesis, Hull University.
- [W2] Walker A., Hayton G.E. and Pugh A.C., Linear system requirements of matrix transformations. Proc. 1st IMA Conference on Control Theory, UK.
- [W3] Willems J.C., 1979, System theoretic models for the analysis of physical systems., *Riserche di Automatica*, **10**, 71–106.
- [W4] Willems J.C., 1986, From time series to Linear System – Part I. Finite dimensional time invariant systems., *Automatica*, **22**, pp.561–580.

- [W5] Willems J.C., 1991, Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems., *IEEE Trans.Auto.Control*, **36**, pp.259–294.
- [W6] Willems J.C. and Nieuwenhuis J.W., 1991, Continuity of latent variable models. *IEEE Trans.Auto.Control*, **36**, pp.528–538.
- [W7] Wimmer H.K., 1979, A Jordan factorization theorem for polynomial matrices., *Proceedings of the American Mathematical Society.*, **75**, 201–206.
- [W8] Wimmer H.K., 1981, The structure of nonsingular polynomial matrices., *Math. Systems Theory*, **14**, 367–379.
- [W9] Wimmer H.K., 1981, Polynomial matrices and dualities., *System & Control Letters*, **1**, 200–203.
- [W10] Wolovich W.A., 1973, Determination of state–space representations for linear multivariable systems., *Automatica*, **9**, 97–106.
- [W11] Wolovich W.A., 1974, *Linear Multivariable Systems.*, Springer–Verlag, New York.
- [W12] Wolovich W.A. and Guidorzi R., 1977, A general algorithm for determining state–space representations., *Automatica*, **13**, 295–299.
- [W13] Wonham W.M., 1979, *Linear Multivariable Control : A geometric approach.*, Second Edition, Vol.10, Applications of Mathematic Series, New York : Springer–Verlag.
- [Z1] Zeeman E.C., 1976, Duffing's equation in brain modelling., *J. Inst. Math. and Its App.* 207–214.
- [Z2] Zhang Shou–Yuan, 1989, Generalized proper inverse of polynomial matrices and the existence of infinite decoupling zeros., *IEEE Trans.on Auto.Control*, **34**, 743–745.
- [Z3] Zhang S–Y, 1989, Polynomial matrix linearization and strongly irreducible realization for singular systems., *Int.J.Control*, **49**, 471–479.

---

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ

---

αλυσίδα Jordan, 199

αναγώγιμο,

μη αναγώγιμο, 132, 328

μη αναγώγιμο στο  $s=\infty$ , 132, 341

ισχυρά μη αναγώγιμο, 132, 341

ανάδραση εξόδου,

$\Omega$ -πολυωνυμική ανάδραση εξόδου, 112

αναδρομική παράσταση, 195

ανακλαστική ιδιότητα, 19

αναλλοίωτο, 20

πλήρες αναλλοίωτο, 20

αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις, 29, 35, 96

αναλλοίωτα πολυώνυμα, 24

αναλλοίωτα μηδενικά, 332, 348

αντίστροφο,

αριστερά (δεξιά) αντίστροφος πίνακας, 41

τετράγωνο αντίστροφο σύστημα, 362

απεικόνιση, 14

έφεσις, 17

εικόνα απεικόνισης, 14, 15

ένεσις, 16

επιμορφισμός, 17

ισομορφισμός, 17

καινική απεικόνιση, 20

μοιομορφισμός, 16



- ομομορφισμός, 16
- πυρήνας μιας απεικόνισης, 15
- αριθμητής ( $\Omega$ ) πολυωνυμικής κλασματικής έκφρασης, 32, 98
- βαθμός, 21
  - ( $\Omega$ ) ελάχιστος βαθμός, 42, 99, 328
  - γενικευμένος ελάχιστος βαθμός, 341
  - McMillan βαθμός, 43
  - Rosenbrock βαθμός, 325
- γενικευμένη ελάχιστη διάσταση, 139
- γράφημα, 14
- δείκτες,
  - αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες στηλών (γραμμών), 350
  - αριστερά (δεξιά) ελάχιστοι δείκτες, 226, 234
  - δείκτες τάξης, 38
  - δυναμικοί δείκτες εισόδου (εξόδου), 335
  - ελάχιστοι δείκτες στηλών (γραμμών), 46, 48
- διαιρέτες,
  - δεξιά (αριστερά) διαιρέτες, 26
  - δεξιά (αριστερά) κοινοί διαιρέτες, 27
  - δεξιά (αριστερά) μέγιστοι κοινοί διαιρέτες, 27
  - διαιρέτες οριζουσών, 25
  - στοιχειώδεις διαιρέτες, 214
- διανύσματα,
  - γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, 199
  - διανύσματα αναλλοίωτων μηδενικών διευθύνσεων, 332, 348
  - ιδιοδιανύσματα, 199
- διασύνδεση, 542
- δυναμικός πολυωνυμικός πίνακας, 213

εκτίμηση, 118

διακριτή εκτίμηση, 32, 91

συντελεστής πίνακας ελάχιστης γραμμικής εκτίμησης, 120

ελέγχμο, 341

πεπερασμένα ελέγχμο, 327, 328

ελέγχμο στο  $s=\infty$ , 340

επιτρεπτές αρχικές συνθήκες, 244

ζεύγος Jordan, 206

ιεραρχική θεωρία συστημάτων, 542

ισοδυναμίες πολυωνυμικών (ρητών) πινάκων, 54

αντιστρέψιμη ισοδυναμία (αριστερή ή δεξιά), 24, 54

αριστερή (δεξιά) ισοδυναμία στο  $\mathbb{C}$  ( $s=\infty$ ), 28, 34

αυστηρή ισοδυναμία, 45, 54

γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία, 55

γενικευμένη πολυωνυμική ισοδυναμία, 56, 61

γενικευμένη ρητή ισοδυναμία, 67

δικαιονική ισοδυναμία, 66

ισχυρή ισοδυναμία, 73

πλήρης ισοδυναμία, 70

πολυωνυμική ισοδυναμία, 74

ρητή ισοδυναμία, 80

τέλεια ισοδυναμία, 68

τοπική ισοδυναμία, 109

$\Omega$ -αντιστρέψιμη ισοδυναμία, 94

$\Omega$ -ισοδυναμία, 100

ισοδυναμίες συστημάτων,

αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων, 385, 386

αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων, 378

- αυστηρή ομοιότητα συστημάτων, 389  
 γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων, 383  
 γενικευμένη Morf's ισοδυναμία συστημάτων, 480  
 θεμελιώδης ισοδυναμία συστημάτων, 275, 294, 498, 507  
 ισοδυναμία συστημάτων, 304, 308, 523  
 ισοδυναμία συστημάτων στο  $s=\infty$ , 394  
 ισοδυναμία ως προς την σχέση εισόδου/εξόδου, 524  
 ισοδυναμία ως προς την σχέση ψευδοκαταστάσεως/εξόδου, 524  
 ισχυρή ισοδυναμία συστημάτων, 391, 394  
 κανονική πλήρης ισοδυναμία συστημάτων, 395  
 ομοιότητα συστημάτων, 377  
 πλήρης αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων, 452, 453  
 πλήρης ισοδυναμία συστημάτων, 394  
 πολυωνυμική ισοδυναμία συστημάτων, 393  
 σταθερή ισοδυναμία συστημάτων, 392  
 τέλεια ισοδυναμία συστημάτων, 391  
 Fuhrmann ισοδυναμία συστημάτων, 383  
 Morf's ισοδυναμία συστημάτων, 479
- κανονική μορφή, 20
- Kronecker, Weierstrass κανονική μορφή, 47, 185, 187
  - Smith–McMillan μορφή στην περιοχή  $\Omega$  (στο  $\mathbb{C}$ , στο  $s=\infty$ ), 29, 34, 95
  - Smith μορφή στο  $\mathbb{C}$  (στο  $s=\infty$ ), 24, 34
- κλάση ισοδυναμίας, 19, 251
- κλασματική έκφραση,
- πολυωνυμική κλασματική έκφραση (αριστερά ή δεξιά), 32
  - $\Omega$ –πολυωνυμική κλασματική έκφραση (αριστερά ή δεξιά), 98
  - κανονική ρητή κλασματική έκφραση, 75
- μεταβατική ιδιότης, 19

- μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  ( $s=\infty$ ), 25, 29, 32, 35, 91, 96
- αποσυζευγμένα μηδενικά (εισόδου, εξόδου, εισόδου–εξόδου), 132, 327, 340
  - μηδενικά μεταφοράς, 329, 345
  - μηδενικά του συστήματος, 331, 346
  - αναλλοίωτα μηδενικά, 332, 348
- μηδενικής–εξόδου πρόβλημα, 332, 348, 351
- παρατηρήσιμο σύστημα, 341, 504
- πεπερασμένα παρατηρήσιμο σύστημα, 328
  - παρατηρήσιμο στο  $s=\infty$  σύστημα, 340
- παρονομαστής ( $\Omega$ ) πολυωνυμικής κλασματικής έκφρασης, 32, 98
- πεδίο ορισμού, 14
- πεδίο τιμών, 14
- πίνακας πολυωνυμικός (ρητός), 21, 28
- αντιστρέψιμος πίνακας, 21
  - κανονικός κατά γραμμές (στήλες), 22, 120
  - κανονικός (ιδιόμορφος) πίνακας, 45
  - ομαλός (ιδιάζων) πίνακας, 22
  - πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας, 44
  - $\Omega$ –πολυωνυμικός πίνακας, 93
  - $\Omega$ –αντιστρέψιμος πίνακας, 93
- πίνακας βάσης, 206
- πίνακας του συστήματος,
- Rosenbrock πίνακας του συστήματος, 320
  - κανονικός πολυωνυμικός πίνακας του συστήματος, 321
- πολλαπλάσιο (αριστερό ή δεξιό), 26
- πόλοι στο  $\mathbb{C}$  ( $s=\infty$ ), 29, 32, 35, 91, 96
- πόλοι μεταφοράς, 329, 345
  - πόλοι του συστήματος, 330, 346

πραγμάτωση,

ελάχιστη πράγματωση, 135

πολυωνυμική πράγματωση, 130

πράγματωση στον (γενικευμένο) χώρο των καταστάσεων, 130, 131

ρητή πράγματωση, 130

πρώτοι πίνακες,

αριστερά ή δεξιά πρώτοι πίνακες στο  $\mathbb{C}$  ( $s=\omega$ ), 27, 75

$\Omega$ -πρώτοι πίνακες, 96, 98

ρητός πίνακας (συνάρτηση), 33

δικαιονικός ρητός πίνακας (συνάρτηση), 33

μη καιονικός ρητός πίνακας, (συνάρτηση), 33

(αυστηρά) καιονικός ρητός πίνακας (συνάρτηση), 33

σταθερά σημεία, 21

στοιχειώδεις,

στοιχειώδεις πράξεις ισχυρής ισοδυναμίας, 390

στοιχειώδεις αντιστρέψιμοι (δικαιονικοί) πίνακες, 23, 34

συμμετρική ιδιότης, 19

συμπλεκτικότητα, 21, 326

ελάχιστη συμπλεκτικότητα, 328

γενικευμένη ελάχιστη συμπλεκτικότητα, 341

συμπλεκτικότητα γραμμών (στηλών), 21, 326

σύνολο πηλίκο, 19

συνάρτηση μεταφοράς, 329

γενικευμένη συνάρτηση μεταφοράς, 478

ελαχίστου φάσεως συνάρτηση μεταφοράς, 117

σύστημα, 316

πολυωνυμική περιγραφή συστήματος (Π.Π.Σ.), 318

καιονική Π.Π.Σ., 319

- Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων, 322
- Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων, 323
- πολυωνυμική κλασματική έκφραση (αριστερά ή δεξιά), 323, 324
- ελάχιστο σύστημα, 329
- γενικευμένα ελάχιστο σύστημα, 345
- σχέση, 19
  - σχέση ισοδυναμίας, 19
- τάξη, 21, 206, 325
  - γενικευμένη τάξη, 260, 339
  - ελάχιστη τάξη, 328
  - γενικευμένη ελάχιστη τάξη, 341

---

 ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ
 

---

Παραθέτουμε τους κυριώτερους Αγγλικούς όρους που εμφανίζονται μέσα στο κείμενο της διατριβής μαζί με την αντίστοιχη Ελληνική μετάφραση τους σαν μια προσπάθεια διευκόλυνσης των μελετητών της διατριβής. Θα πρέπει να σημειώσουμε την έλλειψη επίσημης Ελληνικής τεχνικής ορολογίας στο πεδίο των Γενικευμένων Π.Π.Σ. κάτι που είναι αναμενόμενο εξαιτίας της ολιγόχρονης παρουσίας του μαθήματος των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου στα Ελληνικά Πανεπιστήμια.

Θα πρέπει ακόμη να πούμε ότι στο κείμενο της διατριβής όπου εμφανίζεται για πρώτη φορά κάποιος τεχνικός όρος τότε αυτός σημειώνεται και στην Αγγλική και στην Ελληνική γλώσσα. Στο υπόλοιπο όμως κείμενο εμφανίζεται μόνο στα Ελληνικά.

**aircraft dynamics** : αεροδυναμική

**algebraic structure** : αλγεβρική δομή

**autoregressive representation** : αναδρομική παράσταση

**basis matrix** : πίνακας βάσης

**behaviour** : συμπεριφορά

**canonical map** : κανονική απεικόνιση

**canonical form** : κανονική μορφή

**Kronecker, Weierstrass canonical form** : Kronecker, Weierstrass κανονική μορφή

**Smith–McMillan form at  $\mathbf{C}$  (at  $s=\infty$ )** : Smith–McMillan μορφή στο  $\mathbf{C}$  (στο  $s=\infty$ )

**Smith form at  $\mathbf{C}$  (at  $s=\infty$ )** : Smith μορφή στο  $\mathbf{C}$  (στο  $s=\infty$ )

**catastrophic behaviour theory** : θεωρία καταστροφών

**complexity** : συμπλεκτικότητα

**least complexity** : ελάχιστη συμπλεκτικότητα

**generalized least complexity** : γενικευμένη ελάχιστη συμπλεκτικότητα

**row (column) complexity** : συμπλεκτικότητα γραμμών (στηλών)

**controllable** : ελέγξιμο

**finite (infinite) controllable** : πεπερασμένα ελέγξιμο (ελέγξιμο στο  $s=\infty$ )

**uncontrollable** : μη ελέγξιμο

**controller** : ελεγκτής

**coprime** : πρώτοι

**left or right coprime at  $\mathbb{C}(s=\infty)$**  : αριστερά ή δεξιά πρώτοι στο  $\mathbb{C}(s=\infty)$

**degree** : βαθμός

**least degree** : ελάχιστος βαθμός

**generalized least degree** : γενικευμένος ελάχιστος βαθμός

**McMillan degree** : McMillan βαθμός

**Rosenbrock degree** : Rosenbrock βαθμός

**denominator** : παρονομαστής

**divisor** : διαιρέτες

**determinantal divisors** : διαιρέτες οριζουσών

**elementary divisors (finite, infinite)** : στοιχειώδεις διαιρέτες (πεπερασμένοι, άπειροι)

**right (left) divisor** : δεξιά (αριστερά) διαιρέτες

**right (left) common divisor** : δεξιά (αριστερά) κοινά διαιρέτες

**right (left) greatest common divisor** : δεξιά (αριστερά) μέγιστοι κοινά διαιρέτες

**domain** : πεδίο ορισμού

**codomain** : πεδίο τιμών

**dual** : δυικός



**elementary** : στοιχειώδεις

**elementary operations** : στοιχειώδεις πράξεις

**elementary strong equivalence operations** : στοιχειώδεις πράξεις ισχυρής ισοδυναμίας

**elementary unimodular (biproper) matrices** : στοιχειώδεις αντιστρέψιμοι  
(δικαιονικοί) πίνακες

**epimorphism** : επιμορφισμός

**equivalence** : ισοδυναμία

**biproper equivalence** : δικαιονική ισοδυναμία

**complete equivalence** : τέλεια ισοδυναμία

**extended causal equivalence** : γενικευμένη ρητή ισοδυναμία

**extended unimodular equivalence** : γενικευμένη αντιστρέψιμη ισοδυναμία

**extended polynomial equivalence** : γενικευμένη πολυωνυμική ισοδυναμία

**full equivalence** : πλήρης ισοδυναμία

**left (right) equivalence at  $\mathbb{C}$  [at infinity]** : αριστερή (δεξιά) ισοδυναμία στο  $\mathbb{C}$

[στο  $s=\infty$ ]

**local equivalence** : τοπική ισοδυναμία

**polynomial equivalence** : πολυωνυμική ισοδυναμία

**rational equivalence** : ρητή ισοδυναμία

**strict equivalence** : αυστηρή ισοδυναμία

**strong equivalence** : ισχυρή ισοδυναμία

**unimodular equivalence** : αντιστρέψιμη ισοδυναμία

**$\Omega$ -unimodular equivalence** :  $\Omega$ -αντιστρέψιμη ισοδυναμία

**$\Omega$ -equivalence** :  $\Omega$ -ισοδυναμία

**equivalence class** : κλάση ισοδυναμίας

**R-equivalence class** : R-κλάση ισοδυναμίας

**fixed points** : σταθερά σημεία

**frequency domain** : πεδίο συχνότητας

**generalized least dimension** : γενικευμένη ελάχιστη διάσταση

**graph** : γράφημα

**hierarchical theory** : ιεραρχική θεωρία

**homogeneous** : ομογενής

**homomorphism** : ομομορφισμός

**image** : εικόνα

**impulsive behaviour** : κρουστική συμπεριφορά

**indices** : δείκτες

**left (right) minimal indices** : αριστερά (δεξιά) ελάχιστοι δείκτες ή ελάχιστοι δείκτες γραμμών (στηλών)

**invariant left (right) indices** : αναλλοίωτοι ελάχιστοι δείκτες γραμμών (στηλών)

**input (output) dynamical indices** : δυναμικοί δείκτες εισόδου (εξόδου)

**infinite frequency structure** : κρουστική δομή

**initial conditions** : αρχικές συνθήκες

**admissible initial conditions** : επιτρεπτές αρχικές συνθήκες

**injection** : ένεσις, ένα προς ένα

**input** : είσοδος

**input-output behaviour** : συμπεριφορά εισόδου-εξόδου

**interconnection** : διασύνδεση

**invariant** : αναλλοίωτο

**complete invariant** : πλήρες αναλλοίωτο

**invariant rational functions** : αναλλοίωτες ρητές συναρτήσεις

**invariant polynomial** : αναλλοίωτα πολυώνυμα

**invariant zeros** : αναλλοίωτα μηδενικά

**inverse (left or right)** : αντίστροφο (αριστερό ή δεξιό)

**irreducible** : μη αναγώγιμο

**strongly irreducible** : ισχυρά μη αναγώγιμο

**infinite irreducible** : μη αναγώγιμο στο  $s = \infty$

**isomorphism** : ισομορφισμός

**Jordan chain** : αλυσίδα Jordan

**Jordan pair** : ζεύγος Jordan

**kernel** : πυρήνας

**mapping** : απεικόνιση

**matrix** : πίνακας

**unimodular matrix** : αντιστρέψιμος πίνακας

**row (column) reduced** : κανονικός κατά γραμμές (στήλες)

**row (column) proper** : κανονικός κατά γραμμές (στήλες)

**regular (singular)** : κανονικός (ιδιόμορφος) ή και ομαλός (ιδιάζων)

**$\Omega$ -polynomial matrix** :  $\Omega$ -πολυωνυμικός πίνακας

**$\Omega$ -unimodular matrix** :  $\Omega$ -αντιστρέψιμος πίνακας

**matrix pencil** : πρωτοβάθμιος πολυωνυμικός πίνακας

**minimal** : ελάχιστο

**generalized minimal** : γενικευμένα ελάχιστο

**minimum phase** : ελαχίστου φάσεως συνάρτηση μεταφοράς

**minor of order  $x$**  : ελλάσων ορίζουσα τάξης  $x$

**monomorphism** : μοινομορφισμός

**multiple** : πολλαπλάσιο

**left (right) multiple** : αριστερό (δεξιό) πολλαπλάσιο

**neutral delay systems** : συστήματα ουδέτερης καθυστέρησης

**neurological events** : νευρολογικές καταστάσεις

**nonsingular** : ομαλός, αντιστρέψιμος

**numerator** : αριθμητής

**observable** : παρατηρήσιμο

**finite (infinite) observable** : πεπερασμένο παρατηρήσιμο (παρατηρήσιμο στο  $s=\infty$ )

**unobservable** : μη παρατηρήσιμο

**order** : τάξη

**least order** : ελάχιστη τάξη

**generalized (least) order** : γενικευμένη (ελάχιστη) τάξη

**output** : έξοδος

**output feedback** : ανάδραση εξόδου

**output zeroing problem** : το πρόβλημα της μηδενικής εξόδου

**partial multiplicities** : μερικές πολλαπλότητες

**poles at  $\mathbb{C}$  ( $\Omega$  or  $s=\infty$ )** : πόλοι στο  $\mathbb{C}$  ( $\Omega$  or  $s=\infty$ )

**quotient** : σύνολο πηλίκου

**rank** : τάξη

**normal rank** : φυσική τάξη

**full normal rank** : πλήρης τάξη

**normal rank defect** : έλλειμμα τάξης

**rank indices** : δείκτες τάξης

**rational matrix [function]** : ρητός πίνακας [συνάρτηση]

**biproper rational matrix [function]** : δικαιονικός ρητός πίνακας [συνάρτηση]

**nonproper rational matrix [function]** : μη καιονικός ρητός πίνακας [συνάρτηση]

**(strictly) proper rational matrix [function]** : (αυστηρά) κανονικός ρητός πίνακας  
[συνάρτηση]

**realization** : πραγμάτωση

**generalized state–space realization** : πραγμάτωση στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

**minimal realization** : ελάχιστη πραγμάτωση

**polynomial realization** : πολυωνυμική πραγμάτωση

**rational realization** : ρητή πραγμάτωση

**reflexivity** : ανακλαστική

**relation** : σχέση

**equivalence relation** : σχέση ισοδυναμίας

**row (column) reduced at  $s=\infty$**  : κανονικός κατά γραμμές (στήλες) στο  $s=\infty$

**square inverse systems** : τετράγωνο αντίστροφο σύστημα

**state** : κατάσταση

**pseudostate** : ψευδοκατάσταση

**strictly proper part** : αυστηρά ρητό μέρος

**strictly polynomial part** : αυστηρά πολυωνυμικό μέρος

**structure at infinity** : δομή στο άπειρο

**surjection** : έφεσις, επί

**symmetry** : συμμετρική

**system** : σύστημα

**state–space systems** : Π.Π.Σ. στον χώρο των καταστάσεων

**generalized state–space system** : Π.Π.Σ. στον γενικευμένο χώρο των καταστάσεων

**matrix fraction description (MFD)** : πολυωνυμική κλασματική έκφραση

**left (right) coprime MFD** : αριστερά (δεξιά) πολυωνυμική κλασματική έκφραση

**polynomial matrix description (PMD)**: πολυωνυμική περιγραφή συστήματος (Π.Π.Σ.)

**normalized PMD** : κανονική Π.Π.Σ.

**system matrix** : πίνακας του συστήματος

**Rosenbrock system matrix** : ο Rosenbrock πίνακας του συστήματος

**normalized system matrix** : ο κανονικός πολυωνυμικός πίνακας του συστήματος

**system equivalence** : ισοδυναμία συστημάτων

**constant system equivalence** : σταθερή ισοδυναμία συστημάτων

**complete system equivalence** : τέλεια ισοδυναμία συστημάτων

**equivalence** : ισοδυναμία συστημάτων

**extended strict system equivalence** : γενικευμένη αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων

**full equivalence** : πλήρης ισοδυναμία συστημάτων

**full unimodular equivalence** : πλήρης αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων

**fundamental equivalence** : θεμελιώδης ισοδυναμία συστημάτων

**Fuhrmann system equivalence** : Fuhrmann ισοδυναμία συστημάτων

**generalized Morf's system equivalence** : γενικευμένη Morf's ισοδυναμία συστημάτων

**input/output equivalence** : ισοδυναμία ως προς την σχέση εισόδου/εξόδου

**normal full system equivalence** : κανονική πλήρης ισοδυναμία συστημάτων

**partial state/input equivalence** : ισοδυναμία ως προς την σχέση ψευδοκατάστασης/  
εξόδου

**polynomial system equivalence** : πολυωνυμική ισοδυναμία συστημάτων

**restricted system equivalence** : αυστηρή ομοιότητας συστημάτων

**strict system equivalence** : αυστηρή ισοδυναμία συστημάτων

**strong system equivalence** : ισχυρή ισοδυναμία συστημάτων

**system equivalence at infinity** : ισοδυναμία συστημάτων στο  $s=\infty$

**system similarity** : ομοιότητας συστημάτων

**unimodular equivalence** : αντιστρέψιμη ισοδυναμία συστημάτων

**time domain** : πεδίο του χρόνου

**transitivity** : μεταβατική

**transfer function matrix** : συνάρτηση μεταφοράς

**generalized or extended transfer function matrix** : γενικευμένη συνάρτηση μεταφοράς

**transformation** : μετασχηματισμός

**valuation** : εκτίμηση

**discrete valuation** : διακριτή εκτίμηση

**least row valuation (at  $s=\infty$ )** : συντελεστής πίνακα ελάχιστης γραμμικής εκτίμησης

**coefficient matrix**

**value** : τιμή

**vectors** : διανύσματα

**eigenvectors** : ιδιοδιανύσματα

**generalized eigenvectors** : γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

**zero-directions vectors** : διανύσματα αναλλοίωτων μηδενικών διευθύνσεων

**zeros at  $\mathbb{C}$  ( $\Omega$  or  $s=\infty$ )** : μηδενικά στο  $\mathbb{C}$  ( $\Omega$  or  $s=\infty$ )

**zeros (poles)** : μηδενικά (πόλοι)

**transmission zeros (poles)** : μηδενικά (πόλοι) μεταφοράς

**decoupling zeros (input, output, input-output)** : αποσυζευγμένα μηδενικά (εισόδου, εξόδου, εισόδου-εξόδου)

**invariant zeros** : αναλλοίωτα μηδενικά

**system zeros (poles)** : μηδενικά (πόλοι) του συστήματος

**zero structure (finite, infinite)** : μηδενική δομή (στο  $\mathbb{C}$ , στο  $s=\infty$ )

**$\Omega$ -coprime** :  $\Omega$ -πρώτοι

**$\Omega$ -MFD** :  $\Omega$ -πολυωνυμική κλασματική έκφραση

**$\Omega$ -polynomials** :  $\Omega$ -πολυώνυμα

**$\Omega$ -polynomial feedback** :  $\Omega$ -πολυωνυμική ανάδραση εξόδου

---

**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ**


---

$\in$	$a \in A$	το $a$ είναι στοιχείο του $A$ , το $a$ ανήκει στο $A$
$\subset$	$A \subset B$	το σύνολο $A$ περιέχεται στο σύνολο $B$ , το $A$ είναι υποσύνολο του $B$
$\cup$	$A \cup B$	ένωση του συνόλου $A$ με το σύνολο $B$
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	το $p$ συνεπάγεται το $q$ ή ισοδύναμα το όχι $q$ συνεπάγεται το όχι $p$
$\Leftarrow$	$p \Leftarrow q$	το $q$ συνεπάγεται το $p$
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	το $p$ συνεπάγεται το $q$ και το $q$ συνεπάγεται το $p$ ; $p$ εαν $\neg q$
$:=$	$A := B$	το σύνολο $A$ είναι από ορισμού το σύνολο $B$
$=:$	$A =: B$	το σύνολο $B$ είναι από ορισμού το σύνολο $A$
$\times$	$A \times B$	το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου $A$ με το σύνολο $B$ ; ή ισοδύναμα $A \times B = \{(a,b) ; a \in A \text{ και } b \in B\}$
$\emptyset$		το κενό σύνολο
$\mathbb{m}$		το σύνολο των ακεραίων $\{1,2,\dots,m\}$
$\mathbb{C}$		το σώμα των μιγαδικών αριθμών
$\mathbb{N}$		το σύνολο των φυσικών αριθμών $\{0,1,2,3,\dots\}$
$\mathbb{R}$		το σώμα των πραγματικών αριθμών
$\mathbb{R}^+$		το διάστημα $[0-, +\infty)$
$\mathbb{Z}$		ο δακτύλιος των ακεραίων $\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$
$\mathbb{Z}^+$		ο δακτύλιος των θετικών ακεραίων $\{+1,+2,+3,\dots\}$
$\mathbb{R}[s]$		ο δακτύλιος των πολωνύμων μιας μεταβλητής $s$ με συντελεστές στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}(s)$		ο δακτύλιος των ρητών συναρτήσεων μιας μεταβλητής $s$ με συντελεστές στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}_\Omega(s)$		ο δακτύλιος που περιέχει τα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{R}(s)$ που δεν περιέχουν πόλους στην περιοχή $\Omega$



$\mathbb{R}_{\text{PI}}(s)$	ο δακτύλιος των καιονικών ρητών συναρτήσεων μιας μεταβλητής $s$ με συντελεστές στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$
$\mathbb{C}^+$	$:= \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) \geq 0\}$ ή ισοδύναμα το κλειστό δεξιό μγαδικό επίπεδο του $\mathbb{C}$
$\Omega$	ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}$ το οποίο είναι συμμετρικό σε σχέση με τον πραγματικό άξονα $\mathbb{R}$
$C_p^i$	Το σύνολο των τμηματικά συνεχών διαφορίσιμων συναρτήσεων πάνω στο $\mathbb{R}$ και με πεδίο τιμών που εξαρτάται από το κείμενο, που συνεχίζουν να είναι τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμες μετά από $i$ φορές.
$\mathbb{C}^-$	$:= \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) < 0\}$ ή ισοδύναμα το ανοικτό αριστερό μγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$
$\mathbb{C}U\{\infty\}$	επεκτεταμένο μγαδικό επίπεδο
$\mathbb{C}^+U\{\infty\}$	επεκτεταμένο δεξιό μγαδικό επίπεδο
$\Omega U\{\infty\}$	επεκτεταμένο σύνολο $\Omega$
$\oplus$	ευθύ άρθροισμα δύο υποσυνόλων
$\operatorname{Im}f$	η εικόνα της απεικόνισης $f$
$\operatorname{Im}A$	η εικόνα του συνόλου $A$ (ή εικόνα του πίνακα $A$ )
$f\mathbb{R}$	η εικόνα του συνόλου $\mathbb{R}$ διαμέσου της απεικόνισης $f$
$\ker f$	ο πυρήνας της απεικόνισης $f$
$\ker A$	ο πυρήνας του πίνακα $A$
$\langle x, f(x) \rangle$	γράφημα της $f$
$(x, y) \in \mathbb{R}$	το $x$ σχετίζεται με το $y$ διαμέσου της $\mathbb{R}$
$x \sim_{\mathbb{R}} y$	$(x, y) \in \mathbb{R}$
$x \not\sim_{\mathbb{R}} y$	το $x$ δεν σχετίζεται με το $y$ διαμέσου της $\mathbb{R}$ ή $(x, y) \notin \mathbb{R}$
$[x]_{\mathbb{R}}$	$:= \{y \in X \mid (x, y) \in \mathbb{R}\} = \{y \in X \mid x \sim_{\mathbb{R}} y\}$ , ή η $\mathbb{R}$ -κλάση ισοδυναμίας του $x$
$X/\mathbb{R}$	$:= \{[x]_{\mathbb{R}} \mid x \in X\}$
$\operatorname{rank}_{\mathbb{F}} A$	η τάξη του πίνακα $A$ πάνω στο σώμα $\mathbb{F}$
$a^T, A^T$	ο ανάστροφος του διανύσματος $a$ ή αντίστοιχα του πίνακα $A$
$\mathbb{R}^{p \times m}$	το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία πάνω στο $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}[s]^{p \times m}$	το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία από τον δακτύλιο $\mathbb{R}[s]$

$\mathbb{R}(s)^{p \times m}$	το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία από τον δακτύλιο $\mathbb{R}(s)$
$\mathbb{R}_\Omega(s)^{p \times m}$	το σύνολο των $p \times m$ πινάκων με στοιχεία από τον δακτύλιο $\mathbb{R}_\Omega(s)$
$\det[A]$	ορίζουσα του πίνακα $A$
$\deg[A(s)]$	ο βαθμός του $A(s)$
$\text{rank}_{\mathbb{R}} A$	η τάξη του πίνακα $A$ πάνω στο $\mathbb{R}$
$\text{rank}_{\mathbb{R}(s)} A(s)$	η τάξη του πίνακα $A(s)$ πάνω στο $\mathbb{R}(s)$
$c_r(A(s))$	συμπλεκτικότητα γραμμών του πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$
$c_c(A(s))$	συμπλεκτικότητα στηλών του πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}[s]^{p \times m}$
$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	το σύνολο $\mathbb{R}$ χωρίς το στοιχείο $a$
$\delta_\omega(t(s))$	διακριτή εκτίμηση της ρητής συνάρτησης $t(s)$
$\delta_\omega(T(s))$	διακριτή εκτίμηση του ρητού πίνακα $T(s)$
$\delta_M(T(s))$	ο McMillan βαθμός του πίνακα $T(s)$
$\nu(T(s))$	ο ελάχιστος βαθμός του πίνακα $T(s)$
$\nu_\Omega(T(s))$	ο $\Omega$ -ελάχιστος βαθμός του πίνακα $T(s)$
$\mathcal{L}[f(t)]$	μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$
$\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$	αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της ρητής συνάρτησης $f(s)$
μ.κ.δ.	μέγιστος κοινός διαιρέτης
ε.κ.π.	ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο
$\mathcal{P}_0(p,m)$	το σύνολο των $(r+p) \times (r+m)$ πινάκων με στοιχεία από τον δακτύλιο $\mathbb{R}(s)$
$\mathcal{P}_0[p,m]$	το σύνολο των $(r+p) \times (r+m)$ πινάκων με στοιχεία από τον δακτύλιο $\mathbb{R}[s]$
Π.Π.Σ.	πολυωνυμική περιγραφή συστήματος
$\max(\cdot)$	$\max(a,b)$ είναι το μέγιστο των $a, b$
$\rho := d/dt$	ο διαφορικός τελεστής
$S_{A(s)}^{\mathbb{C}}(s)$	η Smith–McMillan μορφή του ρητού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ στο $\mathbb{C}$
$S_{A(s)}^{\Omega}(s)$	η Smith–McMillan μορφή του ρητού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ στην περιοχή $\Omega$
$S_{A(s)}^{\omega}(s)$	η Smith–McMillan μορφή του ρητού πίνακα $A(s) \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$ στο $s = \omega$